

І.М. Каденко, О.М. Харитонов, Р.В. Єрмоленко

**ОСНОВИ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ ЯДЕРНИХ
ЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК**

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ	4
ПЕРЕДМОВА	5
1 РІВНЯННЯ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ ОДНОФАЗНОГО ТЕПЛОНОСІЯ.	6
1.1 Базові поняття та гіпотези механіки суцільних середовищ.	6
1.2 Рівняння теплогідравліки для однофазного теплоносія	11
1.3 Рівняння теплопровідності.	22
1.4 Підходи до опису динаміки турбулентних потоків.	23
2 РІВНЯННЯ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ ДВОФАЗНИХ ПОТОКІВ	28
2.1 Моделі гомогенного та гетерогенного потоку	28
2.2 Рівняння збереження маси	30
2.3 Рівняння руху	31
2.4 Рівняння енергії	32
2.5 Міжфазний обмін імпульсом та енергією.	34
2.6 Робота внутрішніх сил.	36
3 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОДНОВИМІРНОГО ДВОФАЗНОГО ПОТОКУ	40
3.1 Основні гідромеханічні параметри одновимірного двофазного потоку	40
3.2 Теорія одновимірного гомогенного двофазного потоку	44
3.3 Теорія одновимірного гетерогенного двофазного потоку	58
3.4 Модель потоку дрейфу	76
4 РІВНЯННЯ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ КОДУ RELAP 5.	84
4.1 Осереднення в просторі й часі	85
4.2 Осереднення рівнянь теплогідравліки.	87
4.3 Система рівнянь теплогідравліки двофазного теплоносія коду RELAP 5.	89
5 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ТЕПЛОГІДРАВЛІЧНИХ ПРОЦЕСІВ	106
5.1 Умови подібності	106
5.2 Зведення рівнянь теплогідравліки до безрозмірного вигляду	108
5.3 Фізичний зміст критеріїв подібності	111
5.4 Рівняння подібності	115
5.5 Метод аналізу розмірностей	116
	1

6 ЗАМИКАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДВОФАЗНОГО ПОТОКУ КОДУ RELAP 5.	119
6.1 Загальні особливості системи замикальних співвідношень коду RELAP5	119
6.2 Карти режимів двофазних потоків	120
6.3 Міжфазне тертя	138
6.4 Ефект приєднаних мас	157
6.5 Тертя на стінці	160
6.6 Теплова взаємодія фаз зі стінками каналу	171
6.7 Міжфазний тепломасообмін	215
7 МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ	240
7.1 Метод скінченних різниць	240
7.2 Модифікована система рівнянь теплогідравліки	249
7.3 Напівнеявна скінченно-різницева схема коду RELAP 5	251
7.4 Майже неявна скінченно-різницева схема.	272
7.5 Швидкості, осереднені за об'ємом.	281
7.6 Модель тривимірного гетерогенного двофазного потоку коду RELAP 5 3D	286
8 Спеціальні моделі процесів, що використовуються RELAP5	320
8.1 Запирання потоку.	320
8.2 Модель просочування газу або протікання рідини через отвір у стінці труби при розшарованій течії.	338
8.3 Різка зміна площі поперечного перерізу каналу	342
8.4 Коефіцієнти втрат, що вводяться користувачем.	355
8.5 Модель поперечного з'єднання потоку.	357
8.6 Послаблення ефекту «пакування» води за рахунок стисливості.	363
8.7 Модель захлинання потоку	366
8.8 Модель визначення руху рівня змішаності.	375
8.9 Модель термічного розшарування.	394
8.10 Збереження енергії у випадках стрибкоподібних змін характеристик потоку.	400
8.11 Опція Steady-State	402
9 РІВНЯННЯ СТАНУ	405

9.1	Частинні похідні.	405
9.2	Однокомпонентна двофазна суміш.	408
9.3	Двокомпонентна двофазна суміш.	412
10	ЗАКЛЮЧЕННЯ	419

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АЕС	Атомна електрична станція
ВВЕР	Водо-водяний енергетичний реактор
ЯЕУ	Ядерна енергетична установка

ПЕРЕДМОВА

Вивчення процесів гідромеханіки і теплообміну в системах ядерних енергетичних установок (ЯЕУ) є необхідною складовою у процесі підготовки спеціаліста з ядерної енергетики. В той же час, велика кількість питань цієї галузі науки, необхідних для усвідомлювання фізики процесів у реакторі, лишається за межами загальних курсів фізики і механіки суцільних середовищ. Недостатнім є і викладання питань теплогідравліки (науки, що вивчає процеси теплообміну і гідромеханіки у технічних системах) у зв'язку з оцінкою ядерної безпеки АЕС. Необхідні розрахунки проводяться, як правило, за допомогою комп'ютерних кодів поліпшеної оцінки, таких як RELAP5, MELCOR, CONTAIN та інш., в основі яких лежать математичні моделі нестационарних рухів двофазного багатокомпонентного теплоносія. Коректне використання можливостей цих програм вимагає від користувача знання як базових, так і спеціальних математичних моделей теплогідравліки, меж їх ефективного застосування.

В даному посібнику розглянуто фізичні і математичні основи, на яких будуються математичні моделі коду RELAP5 та інших кодів поліпшеної оцінки, наведено опис даних моделей, а також скінченно-різницевої схем розв'язання відповідних крайових задач.

Першу частину посібника присвячено проблемам побудови систем диференціальних рівнянь математичних моделей двофазних потоків, а також опису основних методів аналітичного дослідження цих рівнянь, розвинених для одновимірного наближення. Також увага приділяється базовим питанням теорії подібності. В другій частині описана система замикаючих співвідношень і система спеціальних моделей теплогідравліки коду RELAP 5, розглянуто алгоритми побудови скінченно-різницевої схем для одновимірної і тривимірної моделі руху теплоносія.

Автори сподіваються, що посібник буде корисним і досить досвідченим користувачам під час роботи з кодом RELAP5.

1 РІВНЯННЯ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ ОДНОФАЗНОГО ТЕПЛОНОСІЯ.

1.1 Базові поняття та гіпотези механіки суцільних середовищ.

Історія розвитку ядерної енергетики доводить, що для цієї галузі науки і техніки, як ні для жодної іншої, пріоритетними є питання раціональної і безпечної експлуатації ЯЕУ. До фахівців з проектування і експлуатації АЕС висуваються надзвичайно високі вимоги. Вони мають володіти глибокими знаннями з усіх галузей науки і техніки, що перетинаються при дослідженні безпеки експлуатації АЕС. Серед науково-технічних дисциплін, що обов'язково мають входити до арсеналу фахівця-енергетика, одне з перших місць належить теплогидравліці – науці, що вивчає питання гідродинаміки і тепломасообміну в системі циркуляції теплоносія.

Ядерна енергетична установка являє собою складну теплообмінну систему, що характеризується різноманітністю теплогидравлічних процесів, які відбуваються в ній. Розглянемо приведену на рис.1.1 спрощену схему відведення тепла з водоводяного енергетичного реактора (ВВЕР). Холодна вода (теплоносієм), що знаходиться під великим тиском (до 160 атмосфер), надходить до опускної камери реактора, потрапляє в нижню камеру змішування і звідти поступає в активну зону. Активна зона реактора ВВЕР складається з тепловидільних зборок із циліндричними тепловидільними елементами (твелями). Тепло, що виділяється у твелях у процесі ланцюгової реакції ділення ядер, переноситься до їх поверхні за рахунок теплопровідності та відводиться теплоносієм, що омиває твели. Важливо, що за умов нормальної експлуатації вода не доходить до кипіння в активній зоні. Нагріта вода поступає в парогенератор, де охолоджується, і знову повертається в реактор. Пара, отримана в парогенераторі, використовується в паросиловому циклі.

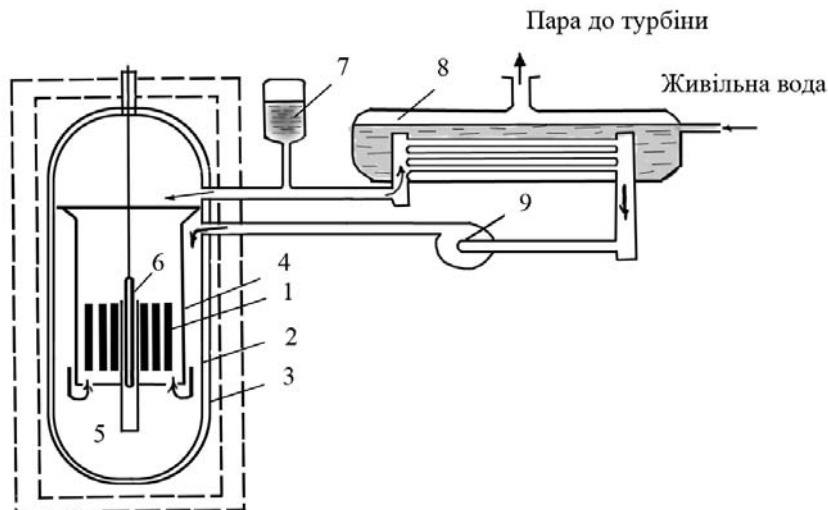


Рис.1.1 Спрощена схема відведення тепла з реактору ВВЕР.

1 - активна зона з тепловидільними збірками; 2 – корпус реактора, 3 – біологічний захист, 4 – опускна камера реактора, 5 - нижня камера змішування, 6 – стержні системи керування та захисту; 7 – компенсатор тиску; 8 – парогенератор; 9 – головний циркуляційний насос.

Основною метою теплового розрахунку реактора є визначення температурних полів в елементах його конструкції для нормальних, перехідних та аварійних режимів. При цьому питання гідродинаміки і теплообміну можуть аналізуватися незалежно від питань фізики реактора, тому що останні практично не впливають на закономірності теплообміну.

Оскільки у реакторах типу ВВЕР теплоносієм є вода, що не доходить до кипіння в активній зоні (при нормальній роботі), то на розрахункових режимах течія теплоносія є однофазною і стаціонарною. Унаслідок аварії, пов'язаної з витіканням теплоносія, вода може закипіти, в результаті чого течія стає двофазною і нестационарною. Забезпечення експлуатації АЕС вимагає розв'язання задач передбачення розвитку процесів в системах ЯЕУ

для всього спектру постульованих вихідних подій та аварійних ситуацій, що потребує притягнення складних моделей теплогідравліки нестационарних двофазних багатокомпонентних потоків. Складність аналізу теплогідравлічних процесів підвищується внаслідок недоцільності проведення на АЕС експериментів, пов'язаних з моделюванням аварійних ситуацій. Отже, такий аналіз повинен носити характер теоретичного передбачення.

Дослідження процесів теплогідравліки проводиться методами **механіки суцільних середовищ** – частини механіки, присвяченої дослідженню рухів газоподібних, рідких і твердих деформівних тіл. У теоретичній механіці вивчаються рух матеріальної точки, системи матеріальних точок, а також рух абсолютно твердого тіла. У механіці суцільних середовищ методи теоретичної механіки застосовуються до вивчення рухів таких матеріальних тіл, які заповнюють простір неперервно, суцільним чином, і відстані між точками яких змінюються під час руху. Зупинимося детальніше на базових поняттях, що лежать в основі цієї науки.

Суцільне середовище – фізична модель, що не враховує молекулярну структуру речовини і припускає, що речовина неперервно розподілена в області простору, яку займає. Введення моделі суцільного середовища складає сутність *гіпотези суцільності*.

Крім того, припускають, що всі функції, які описують рух або стан суцільного середовища, є *неперервними функціями координат та часу*. Введення *гіпотези неперервності* є наслідком якісного врахування процесів молекулярного обміну енергією, масою, кількістю руху між частинами середовища.

В основі опису руху рідини як суцільного середовища лежить поняття *фізичної точки*. Відповідно до прийнятої гіпотези суцільності характеристики руху суцільного середовища одержують внаслідок осереднення відповідних характеристик руху мікрочастинок. Наприклад, щоб ввести поняття густини, слід розглянути елементарний об'єм рідини Δt , взяти суму мас мікрочастинок, що потрапили до цього об'єму, та поділити її на Δt ,

спрямовуючи $\Delta\tau$ до нуля: $\rho = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0, \\ \Delta\tau \geq \Delta\tau_0}} \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\Delta\tau}$. Однак, переходячи до

границі, ми можемо отримати зовсім різні значення. Ураховуючи, що практично вся маса атома зосереджена в ядрі, значення густини, що одержується при переході до границі, буде залежати від того, чи потрапимо ми в ядро, чи в пустоту. Таким чином, об'єм, за яким проводиться осереднення, повинен мати великі розміри порівняно з розмірами мікрочастинок. Під фізичною точкою будемо розуміти об'єм суцільного середовища, зайнятий одними і тими самими частинками, достатньо малий у порівнянні з макророзмірами потоку, але достатньо великий для можливості виконання осереднення характеристик. Тому, розглядаючи надалі рух точок або частинок рідини, ми будемо мати на увазі рух фізичних точок.

При побудові математичних моделей теплогідравліки двофазних потоків використовуються дві моделі суміші фаз як суцільного середовища – моделі гомогенної і гетерогенної суміші.

Гомогенна модель припускає, що складові суміші перемішані на молекулярному рівні. Отже, суміш розглядається як одне суцільне середовище (континуум), що характеризується полями швидкості, температури, тиску та концентрацій складових.

Гетерогенна модель припускає, що складові присутні у суміші у вигляді макроскопічних, по відношенню до молекулярних розмірів, об'ємів. Для двофазного середовища типовим прикладом є модель несучого середовища із включеннями (рідина зі зваженими в ній бульбашками газу або газ зі зваженими краплями рідини). Такі включення називаються *дисперсною фазою*, а оточуюче середовище – *несучою або дисперсійною фазою*. Таким чином, у межах гетерогенної моделі двофазна суміш представляється у вигляді двох континуумів, що взаємодіють між собою, і характеризується двома полями швидкості, температури та тиску. Основні гіпотези механіки гетерогенних середовищ такі:

1. Розміри включень до суміші (діаметри бульбашок, крапель) набагато більші від характерних молекулярно-кінетичних розмірів

(відстаней між молекулами, середніх довжин вільного пробігу молекул). Отже, згідно з цією гіпотезою, включення містять дуже велику кількість молекул.

2. Розмір включень набагато менший за відстані, на яких макроскопічні або осереднені параметри фаз змінюються суттєво (діаметри та довжини труб, по яких тече теплоносії).

Ці припущення дозволяють, по-перше, використати методи механіки суцільних середовищ для опису процесів у масштабах включень, тобто процесів всередині та навколо включень. При цьому для опису фізичних властивостей фаз можна використати рівняння та параметри, отримані для однофазного стану. По-друге, вони дозволяють описувати макроскопічні процеси у гетерогенній суміші (течія суміші у каналі, розповсюдження хвиль) методами механіки суцільних середовищ за допомогою осереднених або макроскопічних параметрів.

Течія в системі циркуляції теплоносія відбувається в умовах теплової взаємодії з елементами енергетичної установки. Інтенсивність та механізм передачі теплоти визначають структуру та основні параметри руху теплоносія. Розрізняють три основні види передачі теплоти: *теплопровідність, конвекція і теплове випромінювання*.

Теплопровідність – процес молекулярного переносу теплоти в суцільному середовищі, що виникає при нерівномірному розподілі температур у середовищі. Теплова енергія передається при безпосередньому контакті частин середовища, що мають різну температуру, а отже, мають різні середні енергії хаотичного руху молекул. Механізм передачі теплоти – обмін енергією хаотичного руху між молекулами. Потік енергії, що передається частинками більш гарячого тіла частинкам тіла більш холодного називається *тепловим потоком*. Згідно з другим законом термодинаміки тепловий потік направлено в бік менших температур.

Конвекція – процес переносу теплоти при переміщенні об'ємів газу або рідини у просторі. Теплообмін між газом або рідиною, що рухаються, і поверхнею твердого тіла називається *конвективним теплообміном*.

Теплове випромінювання – процес розповсюдження теплоти з електромагнітними хвилями. Цей вид передачі теплоти обумовлений перетворенням внутрішньої енергії речовини в енергію випромінювання, переносом випромінювання і його поглинанням речовиною.

1.2 Рівняння теплогідраліки для однофазного теплоносія

На розрахункових режимах роботи реакторів типу ВВЕР у системі охолодження реалізується однофазний рух теплоносія. Розглянемо рівняння, що описують процеси гідродинаміки та теплообміну для однофазного потоку. Дані рівняння являють собою результат застосування законів збереження маси, кількості руху та енергії до виділених скінченних об'ємів рідини. Стан потоку однофазної рідини характеризується макроскопічними параметрами: температурою, тиском та швидкістю, значення яких повинні бути відомими у кожній точці потоку та в кожен момент часу. Тобто, стан потоку повністю визначений, якщо відомі поля температури T , тиску P та швидкості $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} T &= T(x, y, z, t), \\ P &= P(x, y, z, t), \\ \vec{v} &= \vec{v}(x, y, z, t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

де x, y, z - координати деякої просторової системи координат; t - час.

Якщо в (1.1) будь-яке поле не залежить явно від t , то це поле називається *стаціонарним*, якщо залежить – *нестационарним*.

Якщо відомі поля теплогідралічних параметрів (1.1), а також фізичні властивості рідини, то можна обчислити всі інші теплогідралічні характеристики потоку. Для визначення трьох невідомих $T, P, \vec{v}$ необхідно мати 3 рівняння (одне з яких векторне), які отримують унаслідок застосування трьох основних законів збереження – маси, кількості руху (імпульсу) та енергії до виділеного скінченного об'єму рідини. Закони збереження спочатку записуються в інтегральній формі, яка дозволяє на основі теореми

Остроградського-Гаусса [4], отримати диференціальні рівняння збереження, які будуть розглядатися далі.

1.2.1 Рівняння нерозривності (результат застосування закону збереження маси до виділеного рідкого об'єму)

Рівняння нерозривності відбиває результат застосування закону збереження маси до виділеного рідкого об'єму. Воно має такий вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.2)$$

де ρ - густина рідини, $\rho = \rho(T, P)$.

У декартових координатах рівняння (1.2) записується таким чином:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0, \quad (1.2a)$$

де v_x, v_y, v_z - проекції вектора швидкості на осі координат.

Для стаціонарного руху рівняння нерозривності спрощується:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

Подальше спрощення рівняння нерозривності можливе у випадку руху нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.4)$$

1.2.2 Рівняння руху (результат застосування закону зміни кількості руху до виділеного рідкого об'єму).

Рівняння руху відображає результат застосування закону зміни кількості руху до виділеного об'єму рідини: зміна кількості руху даного об'єму дорівнює сумі всіх сил, що діють на об'єм. В механіці суцільних середовищ розрізняють два класи сил – *масові та поверхневі*. **Масовими** називаються сили, що діють на кожен елемент маси (об'єм) окремо, незалежно від сусідніх елементів. Масові сили, як правило, є результатом дії зовнішніх силових полів

(наприклад, гравітаційного). Поверхневими називаються сили, що діють на елементи поверхні виділеного об'єму (наприклад, сили тиску, внутрішнього тертя). На відміну від механіки системи матеріальних точок у механіці суцільних середовищ оперують не із самими силами, а із щільностями їх розподілу. Щільність розподілу масової сили $\vec{F}$ вводиться як границя відношення головного вектора $\Delta\vec{R}$ масових сил, прикладених до точок малого об'єму, до його маси: $\vec{F} = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ \Delta m \geq \Delta m_0}} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta m}$. Ця величина утворює векторне поле (залежить

лише від того, яка фізична точка розташована у даній точці простору у даний момент часу). Поверхневі сили задаються своїм *напруженням*: $\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta S}$, $\Delta\vec{p}$ - головний вектор сил, прикладених

до малого елемента поверхні ΔS даного об'єму з боку оточуючого середовища. Вектори напружень поверхневих сил поля не утворюють, оскільки залежать від орієнтації елемента поверхні (площинки), до якого вони прикладені. Компоненти векторів напружень поверхневих сил визначаються тензором напружень σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

де $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ - нормальні напруження, $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \dots$ - дотичні напруження. Перший індекс вказує на орієнтацію площинки і позначає вісь координат з напрямком якої співпадає напрям нормалі до площинки, по якій діють напруження. Другий індекс вказує на напрям дії напруження, тобто на вісь координат, вздовж якої діє дане нормальне або дотичне напруження. У подальшому часто буде використовуватися позначення координат x, y, z індексами 1, 2, 3, отже, компоненти тензора напружень будуть подані у вигляді $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. Окремі компоненти тензора σ , що утворюють таблицю (1.5), залежать від вибору напрямків осей координат, але

тензор у цілому є фізичною величиною, що виражає певний стан середовища – його *напруженість* і не залежить від вибору системи координат. Тензор напружень утворює поле. У кожній точці середовища вектор напруження $\vec{\sigma}_n$, що діє по площадці з нормаллю $\vec{n}$, визначається через тензор напружень таким чином:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n} \sigma. \quad (1.6)$$

Рівняння руху в проекціях на осі прямокутної декартової системи координат має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right); \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right); \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

де F_x, F_y, F_z - проекції вектора щільності масових сил.

Оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ називається

індивідуальною або **повною** похідною за часом, що складається з **локальної** $\frac{\partial}{\partial t}$ та **конвективної** $\vec{v}\vec{\nabla}$ похідних. Індивідуальна

похідна за часом відображає зміну характеристики у даній точці простору за рахунок нестационарності (локальна похідна) і переносу цієї характеристики в процесі руху фізичних точок через дану точку простору (конвективна похідна). Тобто у лівій частині (1.7) знаходиться повна зміна імпульсу – за рахунок нестационарності поля швидкості та за рахунок конвекції. Конвективний член $(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$ називають **потоким імпульсу**.

Велике значення має результат застосування закону про зміну моменту кількості руху, який має назву **закону парності дотичних напружень**:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{zy} = \sigma_{yz}. \quad (1.8)$$

Співвідношення (1.8) справедливі за умов відсутності в середовищі розподілених моментів. Значення застосування співвідношень (1.8) полягає у зниженні кількості невідомих компонентів тензора напружень з дев'яти до шести.

Для замикання системи (1.2), (1.7) необхідно задати зв'язок між компонентами тензора напружень та компонентами вектора швидкості. Такий зв'язок носить назву **реологічного рівняння стану** (найпростіший приклад, у випадку не руху, а деформації середовища – закон Гука). Для ламінарного режиму течії реологічне рівняння стану називається **узагальненим законом Ньютона**. Його покомпонентний запис має вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -P + \mu \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right); \\ \sigma_{yy} &= -P + \mu \left(2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right); \\ \sigma_{zz} &= -P + \mu \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right); \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ P &= - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

де $\mu = \mu(P, T)$ - динамічний коефіцієнт в'язкості.

Підставляючи (1.9) до (1.7), отримуємо рівняння руху в'язкої ньютонівської рідини (рівняння Нав'є-Стокса):

$$\begin{aligned}
\rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right], \\
\rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right], \\
\rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.10}$$

У випадку постійної в'язкості, $\mu = \text{const}$, запишемо (1.10) у векторному вигляді:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \mu \vec{\nabla} (\operatorname{div} \vec{v}). \tag{1.11}$$

Ліва частина (1.11) являє собою силу інерції; перший доданок у правій частині – масову силу, другий – дію поверхневих сил тиску (нормальних напружень), а останні два доданки – дію дотичних складових поверхневих сил (сил внутрішнього тертя). У випадку, коли ρ і μ є сталими величинами, рівняння (1.11) спрощуються:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v}, \tag{1.12}$$

де $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості. У цьому випадку рівняння (1.4) та (1.11) утворюють замкнену систему.

Важливим для практики випадком є безвихровий рух невязкої нестисливої рідини у полі сили тяжіння ($\rho = \text{const}, \mu = 0, \vec{F} = \vec{g}, \operatorname{rot} \vec{v} = 0$). У цьому випадку система рівнянь руху:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P, \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

має перший інтеграл:

$$B = \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{const}, \quad (1.14)$$

який називається **інтегралом Бернуллі**.

Найчастіше єдиною масовою силою є сила тяжіння, для щільності розподілу якої справедливо: $\vec{F} = \vec{g}$. Як відомо з гідравліки, сила тяжіння впливає на рух рідини лише за наявності у потоці вільних поверхонь або при неоднорідному розподілі густини, у протилежному випадку вона врівноважується архімедовою силою виштовхування. Таким чином, для напорної течії (вільні поверхні відсутні) при однорідному розподілі густини сила тяжіння може не братися до уваги під час визначення поля швидкості (поле тиску, звичайно, і в цьому випадку буде залежати від сили тяжіння). При неоднорідному розподілі густини в рівняння руху вводять рівнодійну сили тяжіння та архімедової сили – **підіймальну силу**. В проекції на вісь x будемо мати:

$$\rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} = (\rho - \rho_0) g_x - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_0 g_x \right).$$

де ρ_0 - густина рідини при постійній температурі T_0 у будь-якій фіксованій точці потоку. Вважаючи зміни ρ та T малими, у порівнянні з їх абсолютними значеннями, прийmemo:

$$\rho - \rho_0 = -\beta \rho (T - T_0), \quad (1.15)$$

де $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$ - коефіцієнт термічного розширення. Оскільки з

рівняння гідростатичної рівноваги [4] випливає $\rho_0 \vec{g} = -\vec{\nabla} P_0$, де P_0 - гідростатичний тиск при $\rho = \rho_0, T = T_0$, вводячи позначення $P_1 = P - P_0$, рівняння (1.12) можна переписати у вигляді:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\bar{g}\beta(T - T_0) - \frac{1}{\rho}\bar{\nabla}P_1 + \nu\nabla^2\vec{v}, \quad (1.16)$$

де перший член в правій частині являє собою підймальну силу.

1.2.3 Рівняння енергії (результат застосування закону збереження енергії до виділеного рідкого об'єму).

Температурне поле в потоці рідини описується рівнянням енергії, яке є результатом застосування до виділеного об'єму рідини закону збереження і перетворення енергії: зміна у часі повної енергії виділеного об'єму рідини обумовлена припливом тепла ззовні через його поверхню, дією внутрішніх джерел тепла та роботою об'ємних та поверхневих сил, прикладених до об'єму. Приплив тепла через поверхню обумовлюється теплопровідністю та підкоряється закону Фур'є: $\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$, де λ - коефіцієнт теплопровідності рідини. Рівняння енергії має вигляд:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad}T) + \rho q_v + \frac{dP}{dt} + \mu\Phi, \quad (1.17)$$

де: h - питома ентальпія, $h = U + \frac{P}{\rho}$, U - внутрішня енергія, $\mu\Phi$ -

дисипативна функція, q_v - потужність внутрішніх джерел тепла (в потоках теплоносія в системі охолодження реактора внутрішні джерела тепла виникають унаслідок поглинання нейтронів і наведеної радіоактивності в теплоносії). У правій частині (1.17) перший член характеризує тепло, що переноситься внаслідок теплопровідності, другий – дію внутрішніх джерел тепла, третій пов'язується з роботою сил тиску. Дисипативна функція враховує тепловиділення у потоці, що обумовлюється дисипацією кінетичної енергії (незворотним переходом кінетичної енергії в теплову) унаслідок дії сил в'язкого тертя і має вигляд:

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{v})^2. \quad (1.18)$$

Рівняння (1.17), яке відображає закон зміни внутрішньої енергії, еквівалентне рівнянню збереження повної енергії:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \vec{v} + \operatorname{div}(\sigma \vec{v}) + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho q_v, \quad (1.19)$$

де $\sigma = \sigma_{ij}$ - тензор напружень.

Дійсно, рівняння (1.17) можна отримати, якщо відняти від рівняння (1.19) рівняння збереження кількості руху (1.7) домножене скалярно на $\vec{v}$.

Рівняння, що описують процеси конвективного теплообміну для однофазного теплоносія (1.2а), (1.10), (1.17), записано у прямокутних декартових координатах. Під час розв'язку задач конвективного теплообміну для руху теплоносія у круглих трубах часто використовують запис цих рівнянь у циліндричній системі координат. У випадку вісесиметричного руху нестисливої рідини система рівнянь конвективного теплообміну в циліндричній системі координат має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_v + \mu \Phi_0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

де x і r - осьова і радіальна координати, v_x і v_r - складові вектора швидкості в напрямках цих координат, Φ_0 - значення дисипативної функції Φ при $\text{div} \vec{v} = 0$.

Перше рівняння (1.20) – це рівняння нерозривності, друге і третє – рівняння руху, четверте – рівняння енергії.

1.2.4 Початкові та граничні умови.

Для постановки задач теплогідравліки необхідно приєднати до розглянутих рівнянь збереження умови, що конкретизують задачу, а саме початкові та граничні умови.

Початкові умови полягають у заданні полів швидкості, температури та тиску в усьому об'ємі даної області (у тому числі й на границях) у початковий момент часу:

$$\begin{aligned}\vec{v}|_{t_0} &= \vec{v}_0(x, y, z, t_0), \\ P|_{t_0} &= P_0(x, y, z, t_0), \\ T|_{t_0} &= T_0(x, y, z, t_0).\end{aligned}\tag{1.21}$$

Якщо рух та теплообмін є стаціонарними, такі умови не потрібні.

Граничні умови зводяться до задання геометричної форми даної області та умов руху рідини та теплообміну на її границях. Границі можуть бути як твердими (стінки), так і рідкими.

Під час руху по трубах рідкими границями є вхідний та вихідний переріз труби. У вхідному перерізі в кожен момент часу задаються поля швидкості, тиску і температури:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{in} &= \vec{v}_{in}(x_{in}, y_{in}, z_{in}, t), \\ P_{in} &= P_{in}(x_{in}, y_{in}, z_{in}, t), \\ T_{in} &= T_{in}(x_{in}, y_{in}, z_{in}, t).\end{aligned}\tag{1.22}$$

де індекс “in” позначає вхідний переріз.

Аналогічні умови задаються і на виході, однак часто труба може бути прийнята напівнескінченною, і тоді необхідність у заданні умов на виході відпадає.

Гранична умова для швидкості, що задається на твердих стінках, – це умова прилипання в'язкої рідини до твердих стінок:

$$\vec{v}|_c = 0. \quad (1.23)$$

Граничні умови для температури являють собою умови теплової взаємодії рідини зі стінками каналу або труби. У загальному випадку вони зводяться до умов рівності температур та теплових потоків по обидва боки від границі контакту рідини і твердої стінки (якщо на границі не відбуваються процеси, що протікають з виділенням або поглинанням тепла):

$$T_f(x_c, y_c, z_c, t) = T_c(x_c, y_c, z_c, t), \quad (1.24)$$

$$\lambda_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial n} \right) \Big|_c = \lambda_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial n} \right) \Big|_c. \quad (1.25)$$

де T_f, T_c - температури рідини та твердої стінки, відповідно; λ_f, λ_c - відповідні коефіцієнти теплопровідності, $\vec{n}$ - нормаль до стінки, спрямована у бік рідини.

Граничні умови, задані у вигляді (1.24), (1.25) вимагають паралельного визначення температурних полів в твердій стінці й у потоці теплоносія, тобто визначають постановку так званої спряженої задачі. У спрощених випадках задачі визначення температурних полів в твердій стінці й у потоці рідини розв'язуються окремо. Розрізняють спрощені граничні умови трьох типів.

Граничні умови першого роду. Задається розподіл температури рідини на поверхні стінки:

$$T_f|_c = T_c(x_c, y_c, z_c, t). \quad (1.26)$$

У найпростішому випадку $T_c = const$.

Граничні умови другого роду. Задається щільність теплового потоку до рідини на поверхні стінки:

$$-\lambda_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial n} \right) \Big|_c = q_c(x_c, y_c, z_c, t). \quad (1.27)$$

У найпростішому випадку $q_c = const$.

Граничні умови третього роду. Задається температура твердої стінки й умови теплообміну між стінкою та рідиною. Як правило, такі умови мають вигляд:

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial n} \right|_c = -\frac{\alpha}{\lambda_f} (T_c - T_f) \Big|_c. \quad (1.28)$$

де α - коефіцієнт тепловіддачі.

Граничні умови третього роду переходять у граничні умови першого роду при $\alpha \rightarrow \infty$, оскільки в таких випадках унаслідок нескінченності теплових потоків миттєво встановлюється теплова рівновага між рідиною і твердою стінкою на поверхні контакту.

1.3 Рівняння теплопровідності.

Поле температур у нерухомому середовищі й, зокрема, у твердому тілі, описується рівнянням теплопровідності. В основі виведення цього рівняння лежить закон збереження енергії, записаний для нескінченно малого елемента тіла: зміна внутрішньої енергії даного елемента $\rho c \partial T$ (c -питома теплоємність) дорівнює сумі кількості тепла, що за час dt переноситься через поверхню елемента вектором щільності теплового потоку, $-\text{div } \vec{q} dt$ і тепла, що виділяється всередині елемента внутрішніми джерелами тепла, $\rho q_v dt$. У результаті застосування цього закону отримаємо рівняння:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \vec{q} + \rho q_v. \quad (1.29)$$

Щоб замкнути рівняння теплопровідності, необхідно задати вирази для $\vec{q}$ та q_v . Щільність теплового потоку пов'язується з градієнтом температури законом Фур'є:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T. \quad (1.30)$$

Питома потужність внутрішніх джерел тепла q_v задається як функція координат та часу. Таким чином, рівняння теплопровідності набуде вигляду:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \rho q_v(x, y, z, t). \quad (1.31)$$

Густина ρ , питома теплоємність c та коефіцієнт теплопровідності λ є заданими функціями температури.

Для розв'язання задачі про розподіл температури у тілі необхідно доповнити рівняння (1.31) початковими та граничними умовами.

Початкова умова полягає у заданні розподілу температури в області, що розглядається, у початковий момент часу:

$$T|_{t_0} = T_0(x, y, z, t_0). \quad (1.32)$$

Граничні умови – умови теплової взаємодії даного твердого тіла з оточуючим середовищем. У загальному випадку спряженої задачі вони мають вигляд (1.24), (1.25). У спрощених випадках розрізняють граничні умови першого, другого та третього роду, аналогічні розглянутим вище граничним умовам конвективного теплообміну.

1.4 Підходи до опису динаміки турбулентних потоків.

У теоретичній гідромеханіці розрізняють два режими течії: **ламінальний і турбулентний**, інколи розглядається ще третій – **перехідний режим**.

Розглянуті в розділі 1 рівняння руху в'язкої рідини описували ламінальний режим течії.

Ламінарний режим течії характеризується плавністю ліній течії, неперервністю зміни в просторі й часі всіх характеристик потоку і стійкістю по відношенню до малих збурень.

Точний розв'язок розглянутих в розділі 1 рівнянь гідродинаміки повинен існувати для будь-яких заданих умов, що реалізуються на практиці. Але не всякий розв'язок рівнянь руху, навіть якщо він є точним, може реально мати місце у природі. Рухи, які здійснюються у природі, мають не тільки задовольняти рівнянням гідродинаміки, але ще й бути стійкими: малі збурення, що постійно виникають у потоці, повинні затухати із часом. Якщо ж, навпаки, як завгодно малі збурення з часом збільшують свою інтенсивність, то рух буде нестійким і фактично не зможе існувати.

Втрата стійкості ламінарного руху по відношенню до малих збурень визначає перехід від ламінарного режиму течії до турбулентного.

Турбулентний режим течії характерний існуванням в потоці нерегулярних випадкових пульсацій швидкості й тиску, які перемішують потік і обумовлюють молярний характер механізму перемішування, тобто на відміну від ламінарного режиму підкреслюється неупорядкований характер зміни параметрів потоку внаслідок хаотичного переносу скінченних об'ємів (молей) рідини.

Дослідження стійкості руху відносно малих збурень проводилися як експериментально, так і теоретично. Основним результатом цих досліджень є встановлення факту, що перехід від ламінарного режиму течії до турбулентного визначається досягненням деяким безрозмірним комплексом, який має назву **числа Рейнольдса**, критичного значення. Вираз для числа Рейнольдса має вигляд:

$$Re = \frac{vD}{\nu},$$

де ν і D – характерні значення швидкості та лінійного розміру потоку.

Експериментальні дослідження свідчать про те, що для заданої геометрії області течії і заданих властивостей рідини існує певний діапазон чисел Re : $0 < Re \leq Re_{cr1}$, у якому завжди реалізується ламінарний режим течії; для діапазону більших значень числа Re : $Re_{cr1} < Re \leq Re_{cr2}$ характерною є зміна ламінарного і турбулентного режимів і, нарешті, в діапазоні $Re_{cr2} < Re$ завжди реалізується турбулентний режим. Така поведінка потоків рідини, зокрема, є причиною введення трьох окремих кореляційних співвідношень, справедливих у власних діапазонах значень чисел Re , при побудові моделей **замикальних** співвідношень для рівнянь теплогідравліки сучасних кодів поліпшеної оцінки теплогідравлічних процесів в системах ЯЕУ (розділ 6).

Основним методом дослідження турбулентних потоків є **метод осереднення**. Як свідчить експеримент, значення характеристик турбулентного потоку коливаються у часі навколо деякого середнього значення і можуть бути подані у вигляді

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \quad (1.33)$$

де φ - миттєве значення характеристики, $\bar{\varphi}$ - осереднене значення, φ' - пульсаційна (випадкова) складова.

При цьому

$$\bar{\varphi}(x, y, z, t) = \frac{1}{\tau_0} \int_{t-\tau_0/2}^{t+\tau_0/2} \varphi(x, y, z, \tau) d\tau, \quad (1.34)$$

де τ_0 - інтервал осереднення.

Основне припущення такого підходу полягає в тому, що миттєві значення параметрів турбулентного потоку задовольняють отримані раніше рівняння ламінарного руху. Проте знайти розв'язки неможливо внаслідок нестійкості цих рівнянь для турбулентного режиму течії.

Для досліджень використовують систему рівнянь, яким задовольняють *осереднені параметри*. Для отримання цієї системи потрібно до рівнянь, що описують ламінарний рух рідини, підставити характеристики у вигляді (1.33) і провести осереднення за формулою (1.34). Детально цю процедуру описано, наприклад, у [4]. У найпростішому випадку стабілізованої, стаціонарної вісесиметричної турбулентної течії нестисливої однофазної рідини у круглій трубі рівняння, які задовольняють осереднені параметри потоку, можна отримати із системи (1.20). Вони матимуть вигляд [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} &= 0, \\ 0 &= -\frac{d\bar{P}}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} - \rho \overline{v'_x v'_r} \right) \right], \\ \rho c_p \bar{v}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \rho c_p \overline{v'_r T'} \right) \right], \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} &= 0, \quad \bar{v}_r = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (1.35)$$

де r_0 - радіус, l - довжина труби, c_p - питома теплоємність при постійному тиску. Рівняння (1.35) записані в циліндричній системі

координат. Стабілізованим буде потік далеко від входу до труби, де можна знехтувати поперечною складовою швидкості. Система (1.35) є незамкненою – сюди входять невідомі величини $\overline{rv'_xv'_r}$ та $\rho c_p \overline{v'_r T''}$.

Їх визначення складає сутність *проблеми замикання*. Аналітично, а також експериментально, строго визначити залежність даних величин від осереднених параметрів не вдається., тому використовують напівемпіричні теорії та кореляції. Такі підходи дуже характерні для теплогідравліки. При цьому наука у кращому випадку дає відповідь на питання: “Як описати процес?”, але не дає відповіді на питання: “Чому процес відбувається саме так?”.

Розглянемо схему застосування напівемпіричного підходу на прикладі замикання системи (1.35). В інших, більш складних випадках ця схема практично не зміниться.

Перший етап. Порівняння з добре вивченим спорідненим процесом. Порівняння з рівняннями збереження кількості руху для ламінарної течії (друге і третє рівняння (1.20)), вказує на те, що член $-\overline{rv'_xv'_r}$ займає місце напруження і має ту ж саму розмірність. Поруч

з $-\overline{rv'_xv'_r}$ стоїть член $\mu \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial r}$, присутній і в рівнянні ламінарного руху (1.20), де він відповідає за в'язке тертя. За аналогією член $-\overline{rv'_xv'_r}$ називається **турбулентним напруженням або напруженням Рейнольдса**.

Зв'язок між напруженням тертя та похідними від компонентів вектора швидкості для ламінарного режиму течії виражається законом Ньютона:

$$\sigma_M = \mu \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial r}.$$

В'язке тертя як фізичний процес виникає внаслідок молекулярного обміну кількістю руху між шарами рідини. Кожна молекула при переході від одного шару до іншого (рис.1.2.) переносить деяку кількість руху, через що кількість руху шару змінюється, і згідно з другим законом Ньютона, з'являються сили взаємодії.

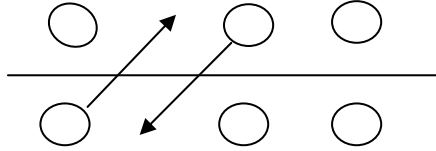


Рис.1.2. Молекулярний обмін між шарами рідини.

За аналогією припускають, що існує турбулентне тертя, напруження якого $\sigma_T = -\rho \overline{v'_x v'_r}$ є наслідком *молярного обміну* між шарами рідини, типового для турбулентного режиму, коли, унаслідок пульсацій, від одного шару до іншого переходять цілі молекули рідини. Таким чином, для повного напруження тертя σ матимемо:

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_T = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} - \rho \overline{v'_x v'_r}. \quad (1.36)$$

Другий етап. *Проведення аналогії.* Припускають, що закономірність, яка описує невідомий процес, якісно подібна закономірності, що описує процес вивчений.

Для молекулярного тертя відомий закон Ньютона $\sigma_M = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r}$.

Припустимо (гіпотеза Буссінеска), що залежність напруження турбулентного тертя від похідних осереднених швидкостей має аналогічний характер:

$$\sigma_T = -\rho \overline{v'_x v'_r} = \rho \varepsilon_\sigma \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r}, \quad (1.37)$$

де ε_σ – турбулентна в'язкість – нова невідома величина. У даному випадку виконується заміна однієї невідомої величини іншою без спрощення.

Третій етап. *Кореляція.* У межах цього етапу потрібно підібрати залежність для нової невідомої величини. Це робиться за допомогою кореляції – апроксимації експериментальних даних функцією обраних величин. При виборі цих визначальних величин, як правило, висуваються нові гіпотези.

Класичний підхід до визначення ε_σ – гіпотеза шляху перемішування Прандтля, є аналогією з кінетичною теорією газів. З

цієї теорії впливає, що кінематичний коефіцієнт в'язкості ν дорівнює добутку середньоквадратичної швидкості молекули та середньої довжини вільного пробігу. Застосувавши аналог довжини вільного пробігу – довжину шляху перемішування l_σ , тобто відстань, на якій моль рідини не втрачає свою індивідуальність (його пульсаційна швидкість відрізняється від нуля), Прандтль отримав співвідношення

$$\sigma_T = \rho l_\sigma^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r}, \quad (1.38)$$

звідки, припускаючи $l_\sigma = \kappa y$, де $y = r_0 - r$ - відстань від стінки труби, можемо отримати вираз для турбулентної в'язкості ϵ_σ :

$$\epsilon_\sigma = \kappa^2 y^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} \right|. \quad (1.39)$$

Співвідношення (1.38)–(1.39) дозволяють замкнути друге рівняння системи (1.35). Коефіцієнт κ вимірюється експериментально.

Аналогічний за методологією підхід застосовується при одержанні багатьох співвідношень, що необхідні для замикання рівнянь теплогідравліки.

2 РІВНЯННЯ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ ДВОФАЗНИХ ПОТОКІВ

2.1 Моделі гомогенного та гетерогенного потоку

При дослідженні процесів гідродинаміки та теплообміну у двофазних потоках використовують моделі гомогенного та гетерогенного потоку. У сучасних кодах, що призначені для розрахунків теплогідравлічних процесів в системах ЯЕУ, зокрема в коді RELAP5, за основу прийнято модель гетерогенного потоку. Однак доцільно коротко розглянути і модель гомогенного потоку оскільки вона може застосовуватися для порівняння з розрахунками за попередніми версіями кодів.

Модель гомогенного потоку. Теорія гомогенного потоку дає найпростіший метод дослідження двофазних потоків. У моделі гомогенного потоку вважається, що складові перемішані на

молекулярному рівні, а отже мають однакові швидкість, температуру, тиск. Таким чином, суміш розглядається як деякий квазіконтинуум, що описується рівняннями однофазного середовища. Звичайно, виникає питання, у яких випадках може застосовуватися модель гомогенного потоку. Відмінності між швидкостями, температурами, тисками фаз обумовлюють взаємний обмін кількістю руху, теплом, масою. Часто процеси обміну проходять дуже швидко, особливо у тих випадках, коли одна із фаз тонко диспергована в іншій. У таких випадках можна зробити припущення про швидке досягнення рівноваги (середні значення швидкостей, температур, тисків фаз рівні) та застосувати гомогенну модель. Типовим прикладом, у якому застосування гомогенної моделі невиправдане, є вертикальна течія, обумовлена силою тяжіння. Дія сили тяжіння на фази, що мають суттєво відмінні густини, призводить до значних відмінностей між швидкостями фаз і, як наслідок – до неможливості застосування гомогенної моделі, що базується на середній швидкості.

Більш точною є модель **гетерогенного потоку**, яка припускає, що складові присутні у суміші у вигляді макроскопічних, по відношенню до молекулярних розмірів, об'ємів. Закони збереження застосовуються окремо для кожної фази. Як наслідок записуються диференціальні рівняння збереження, справедливі окремо для кожної фази, а також рівняння, що описують взаємодію фаз між собою. Гетерогенну модель двофазного потоку іноді називають моделлю **двошвидкісного континуума**, що являє собою сукупність двох взаємопроникних континуумів, кожен із яких відноситься до своєї фази (рідини або газу) та *заповнює один і той самий об'єм, зайнятий сумішшю*. Для кожної фази у кожній точці визначається густина ρ_i (маса i -ї фази в одиниці об'єму суміші), швидкість $\vec{v}_i$ та інші параметри. Надалі параметри, що відносяться до окремих фаз, будуть позначатися або числовими індексами 1, 2, або літерними індексами f , g (першим індексом позначається рідка, а другим – газоподібна фаза). Таким чином, у кожній точці двофазного потоку в кожен момент часу буде визначено 2 густини, 2 температури, 2 швидкості тощо. Також можна ввести параметри, що

характеризують суміш у цілому: густину суміші ρ та середньомасову швидкість суміші $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_1 + \rho_2, \\ \rho \vec{v} &= \rho_1 \vec{v}_1 + \rho_2 \vec{v}_2.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Крім того, розглядаються дифузійні швидкості фаз $\vec{w}_i$, що виражають відмінності швидкостей фаз від середньомасової швидкості:

$$\vec{w}_i = \vec{v}_i - \vec{v}; \quad \rho_1 \vec{w}_1 + \rho_2 \vec{w}_2 = 0. \quad (2.2)$$

У зв'язку з рухом окремих складових та суміші в цілому у диференціальних рівняннях математичних моделей гетерогенних потоків використовуються три *індивідуальні похідні за часом*, які відповідають швидкостям зміни із часом властивостей в індивідуальних фізичних точках, що рухаються зі швидкостями $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ та $\vec{v}$:

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}, \quad i=1,2, \quad (g,f), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla}. \quad (2.3)$$

Механіка двофазного середовища будується на фізичних законах збереження маси, кількості руху та енергії. Наведені нижче диференціальні рівняння збереження маси, кількості руху та енергії фаз є наслідками застосування відповідних законів збереження, записаних для деякого фіксованого у просторі об'єму середовища V , обмеженого поверхнею S . Указані рівняння будуть отримані внаслідок переходу від інтегральної форми запису законів до диференціальної за допомогою теореми Остроградського-Гауса [4,5]. У диференціальних рівняннях збереження враховується не тільки взаємодія із середовищем, що оточує виділений об'єм, але й обмін масою, енергією та кількістю руху між фазами всередині об'єму V .

2.2 Рівняння збереження маси

Позначимо через Γ_{ji} інтенсивність переходу маси з j -ї до i -ї фази. Справедливо $\Gamma_{11} = 0, \Gamma_{22} = 0$. Із закону збереження маси при фазових

переходах отримаємо: $\Gamma_{12} = -\Gamma_{21}$. Тоді рівняння зміни маси кожної фази в об'ємі V матиме вигляд

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i v_i^n dS + \int_V \Gamma_{ji} dV, \quad i, j = 1, 2 (g, f), j \neq i, \quad (2.4)$$

де $\vec{n}$ - напрям нормалі до поверхні S , що оточує об'єм.

Застосуємо формулу Остроградського-Гаусса:

$$\int_S A \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla^k A v^k dV, \quad (2.5)$$

де A – деяка скалярна функція просторових координат, індекс k вгорі позначає компоненти векторних величин. У (2.5) і скрізь далі за верхнім індексом, що повторюється, виконується підсумовування.

У результаті зведемо поверхневий інтеграл у (2.4) до об'ємного і внаслідок довільності об'єму V зможемо опустити знаки інтегралів, а отже – перейти до диференціальної форми запису закону збереження маси i -ї фази:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho_i \vec{v}_i = \Gamma_{ji}, i, j = 1, 2, (g, f), j \neq i. \quad (2.6)$$

2.3 Рівняння руху

Закон збереження кількості руху, записаний для i -ї фази, що знаходиться в об'ємі V , має вигляд:

$$\int_V \frac{\partial \rho_i v_i}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i \vec{v}_i v_i^n dS + \int_S \vec{\sigma}_i^n dS + \int_V \rho_i \vec{g}_i dV + \int_V \vec{P}_{ji} dV, \quad (2.7)$$

$$i, j = 1, 2 (g, f), j \neq i,$$

де перший доданок в правій частині відповідає припливу кількості руху i -ї фази через поверхню S ; другий і третій доданки відповідають впливу зовнішніх поверхневих і масових сил, що діють на i -ту фазу і характеризуються, відповідно, тензором напружень $\sigma_i^{kl} = (\vec{\sigma}_i^1, \vec{\sigma}_i^2, \vec{\sigma}_i^3)$ ($\vec{\sigma}_i^k$ - вектори поверхневих сил, що діють на ортогональних площадках з нормальми 1,2,3 (x,y,z)) і вектором $\vec{g}_i$. Вектор $\vec{P}_{ji}$ характеризує інтенсивність обміну кількістю руху між j -

ю та i -ю фазами. Із умови збереження кількості руху при міжфазних взаємодіях [5] випливає:

$$\vec{P}_{12} = -\vec{P}_{21}, \quad \vec{P}_{11} = \vec{P}_{22} \equiv 0.$$

З інтегральних співвідношень (2.7) після застосування теореми Остроградського-Гаусса отримаємо диференціальні рівняння збереження кількості руху кожної фази:

$$\frac{\partial \rho_i \vec{v}_i}{\partial t} + \nabla^k \rho_i \vec{v}_i v_i^k = \nabla^k \vec{\sigma}_i^k + \rho_i \vec{g}_i + \vec{P}_{ji}, \quad (2.8)$$

$$i, j = 1, 2, (g, f), j \neq i, k = 1, 2, 3.$$

В декартовій системі координат другий член у лівій частині (2.8) матиме вигляд

$$\nabla^k \rho_i \vec{v}_i v_i^k = v_i^x \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i \vec{v}_i) + v_i^y \frac{\partial}{\partial y} (\rho_i \vec{v}_i) + v_i^z \frac{\partial}{\partial z} (\rho_i \vec{v}_i),$$

де v_i^x, v_i^y, v_i^z або v_i^1, v_i^2, v_i^3 - компоненти вектора $\vec{v}_i$.

Перший член у правій частині $\nabla^k \vec{\sigma}_i^k$ в розгорнутому вигляді запишеться так:

$$\nabla^k \vec{\sigma}_i^k = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\sigma}_i^1) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\sigma}_i^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\sigma}_i^3).$$

Ураховуючи (2.3) та (2.6), перепишемо (2.8) у вигляді

$$\rho_i \frac{d_i \vec{v}_i}{dt} = \nabla^k \vec{\sigma}_i^k + \rho_i \vec{g}_i + \vec{P}_{ji} - \Gamma_{ji} \vec{v}_i. \quad (2.9)$$

2.4 Рівняння енергії

Повна енергія E одиниці маси середовища складається з внутрішньої U та кінетичної K енергій: $E = U + K$. Будемо припускати, що $\rho U = \sum_{i=1}^2 \rho_i U_i$; $\rho K = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i v_i^2}{2}$. Отже, для питомої

енергії i -ї фази справедливо: $E_i = U_i + \frac{v_i^2}{2}$.

Рівняння балансу енергії для i -ї фази, записані для об'єму V , матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho_i E_i}{\partial t} dV = & - \int_S \rho_i E_i v_i^n dS + \int_S \vec{\sigma}_i^n \cdot \vec{v}_i dS + \int_V \rho_i \vec{g}_i \cdot \vec{v}_i dV + \\ & + \int_V E_{ji} dV - \int_S q_i^n dS, \quad i, j = 1, 2 \text{ (} g, f \text{)}, j \neq i, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де перший доданок у правій частині відповідає припливу енергії i -ї фази через поверхню S унаслідок конвекції; другий і третій доданки відповідають роботі зовнішніх поверхневих і масових сил, що діють на i -ту фазу; E_{ji} - інтенсивність обміну енергією між j -ю та i -ю фазами; п'ятий доданок є приливом тепла до i -ї фази через поверхню S унаслідок теплопровідності. Із закону збереження енергії при міжфазних взаємодіях [5] випливає:

$$E_{12} = -E_{21}, \quad E_{11} = E_{22} = 0.$$

Застосовуючи до рівняння (2.10) теорему Остроградського-Гауса, отримаємо диференціальні рівняння збереження енергії фаз:

$$\frac{\partial \rho_i E_i}{\partial t} + \nabla^k \rho_i E_i v_i^k = \nabla^k \cdot (\vec{\sigma}_i^k \vec{v}_i - q_i^k) + \rho_i \vec{g}_i \cdot \vec{v}_i + E_{ji}, \quad (2.11)$$

$$i = 1, 2, \text{ (} g, f \text{)}, j \neq i, k = 1, 2, 3,$$

Ураховуючи (2.3) та (2.6), з рівнянь (2.11) отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i}{dt} \left(U_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = & \nabla^k \cdot (\vec{\sigma}_i^k \vec{v}_i - q_i^k) + \rho_i \vec{g}_i \cdot \vec{v}_i + \\ & + E_{ji} - \Gamma_{ji} \left(U_i + \frac{v_i^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отже, рух та теплообмін у двофазному середовищі описуються рівняннями (2.6), (2.8), (2.11) при виконанні умов:

$$\Gamma_{ii} \equiv 0, \Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji}, \vec{P}_{ii} \equiv 0, \vec{P}_{ij} = -\vec{P}_{ji}, E_{ii} \equiv 0, E_{ij} = -E_{ji}.$$

Гетерогенна модель двофазного потоку припускає, що об'єм, зайнятий сумішшю, дорівнює сумі об'ємів, зайнятих окремими фазами. Тому необхідно ввести величини α_1 та α_2 , які характеризують об'ємні частки, зайняті кожною фазою в одиниці об'єму суміші. Для цих величин справедливо:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Густини ρ_i , визначені як маси i -ї фази в одиниці об'єму двофазного середовища, будуть відрізнятися від істинних густин фаз ρ_i^0 , які вводяться як відношення маси i -ї фази до одиниці об'єму i -ї фази:

$$\rho_i^0 = \frac{\rho_i}{\alpha_i}. \quad (2.13)$$

Як впливає з побудованих рівнянь, зміна параметрів кожної фази залежить не лише від умов на зовнішніх границях виділеного об'єму, але і від процесів, що протікають на міжфазних поверхнях всередині виділеного об'єму, руху (деформації) міжфазних поверхонь.

Отже, проблема замикання системи (2.6), (2.8), (2.11) зводиться до задання умов сумісного руху фаз та визначення величин, що описують внутрішньофазні (силову σ_i^{kl} , енергетичну q_i^k) та міжфазні (масову Γ_{ji} , силову $\vec{P}_{ji}$ та енергетичну E_{ji}) взаємодії. Такими є загальні проблеми побудови замкнених математичних моделей гетерогенних двофазних потоків.

2.5 Міжфазний обмін імпульсом та енергією.

Введена вище інтенсивність обміну кількістю руху між i -ю та j -ю фазами може бути подана у вигляді

$$\vec{P}_{ji} = -\vec{P}_{ij} = \vec{R}_{ji} + \Gamma_{ji}\vec{v}_{ji}, \quad (2.14)$$

де $\vec{R}_{ji}$ - віднесена до одиниці об'єму суміші міжфазна сила, рівнодійна сил тертя, тиску між фазами, ефекту приєднаних мас тощо; $\Gamma_{ji}\vec{v}_{ji}$ - інтенсивність обміну імпульсом унаслідок фазових переходів, $\vec{v}_{ji}$ - швидкість маси, що зазнає переходу з j -ї фази до i -ї та знаходиться в i -й фазі. Оскільки фазові переходи відбуваються на міжфазній поверхні, то $\vec{v}_{ji}$ є швидкість речовини i -ї фази на межі з j -ю фазою. Оскільки для в'язких рідин характерна плавна зміна швидкості при переході через міжфазну поверхню, будемо припускати

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_{ji}, \text{ тоді } \vec{R}_{ji} = -\vec{R}_{ij}.$$

Інтенсивність обміну енергією між j -ю та i -ю фазами можна представити у вигляді:

$$E_{ji} = W_{ji} + Q_{ji} + \Gamma_{ji} \left(U_{ji} + \frac{1}{2} v_{ji}^2 \right), E_{ji} = -E_{ij}, \quad (2.15)$$

де: W_{ji} - приплив енергії з j -ї до i -ї фази за рахунок роботи міжфазних сил, Q_{ji} - приплив енергії за рахунок теплопередачі на міжфазній поверхні, останній доданок – перенос внутрішньої та кінетичної енергії разом з переносом маси з j -ї до i -ї фази у процесі фазових переходів; U_{ji} - питома внутрішня енергія маси, що зазнає переходу $j \rightarrow i$ та знаходиться в i -й фазі. Однак, оскільки фазові переходи відбуваються з виділенням або поглинанням енергії то $U_{ji} \neq U_{ij}$.

Використовуючи (2.11), (2.12) і (2.15) можна отримати рівняння припливу тепла для i -ї фази:

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{dU_i}{dt} &= \rho_i A_i + \rho_i Q_i + \Gamma_{ji} (U_{ji} - U_i), \\ \rho_i Q_i &= -\nabla^k q_i^k + Q_{ji}, \\ \rho_i A_i &= \nabla^k \sigma_i^k \vec{v}_i - v_i^l \cdot \nabla^k \sigma_i^{kl} + W_{ji} - R_{ji}^k v_i^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ji} (v_{ji}^2 - v_i^2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Величини A_i та Q_i , відповідно, характеризують роботу внутрішніх сил та приплив тепла за одиницю часу, віднесені до одиниці маси i -ї фази.

Зауважимо, що при фазовому переході $j \rightarrow i$ з j -ї фази до i -ї уходить кінетична енергія $\frac{1}{2} \Gamma_{ji} v_{ji}^2$, з якої лише частина $\frac{1}{2} \Gamma_{ji} v_i^2$ залишається у вигляді кінетичної енергії цієї маси, а інша частина $\frac{1}{2} \Gamma_{ji} (v_{ji}^2 - v_i^2)$ йде на зміну питомої енергії i -ї фази, причому на

зміну питомої кінетичної енергії витрачається $\Gamma_{ji}((v_{ji} - v_i)v_i)$, а на зміну питомої внутрішньої енергії $-\frac{1}{2}\Gamma_{ji}(v_{ji} - v_i)^2$.

Аналогічний зміст має і різниця $W_{ji} - R_{ji}v_i$ як частина роботи міжфазних сил, що витрачається на зміну внутрішньої енергії i -ї фази.

2.6 Робота внутрішніх сил.

Робота внутрішніх сил, що діють у кожній фазі, A_i , поділяється на оборотну роботу внутрішніх сил тиску на розширення-стиснення та на роботу внутрішніх сил зсуву (тертя), що приводить до дисипації кінетичної енергії.

Поділимо напруження σ_i^{kl} на нормальні та дотичні:

$$\sigma_i^{kl} = -\alpha_i P_i \delta^{kl} + \tau_i^{kl}, \quad (2.17)$$

де δ^{kl} - символ Кронекера, τ_i^{kl} - дотичні напруження; P_i - тиск в i -й фазі, що вводиться як середнє арифметичне нормальних напружень:

$$\frac{\sigma_i^{11} + \sigma_i^{22} + \sigma_i^{33}}{3} = -\alpha_i P_i.$$

На основі закону парності дотичних напружень в більшості практично цікавих випадків тензор напружень можна вважати симетричним: $\sigma_i^{kl} = \sigma_i^{lk}$. Отже $\tau_i^{kk} = 0$, $\tau_i^{kl} = \tau_i^{lk}$. Урахуємо, що дисипація енергії можлива лише внаслідок дії дотичних напружень. Далі будемо вважати тиск у фазах однаковим $P_1 = P_2 = P$, тоді:

$$\vec{R}_{ji} = P\vec{\nabla}\alpha_i + \vec{F}_{ji}. \quad (2.18)$$

Таким чином, у міжфазній силі виділяється частина $P\vec{\nabla}\alpha_i$, що діє на розширення-стиснення об'ємної частки, зайнятої i -ю фазою, та частина $\vec{F}_{ji}$ або $\vec{F}_{12}$, пов'язана з дисипацією кінетичної енергії, Розглянемо складові $\vec{F}_{12}$:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^{(\mu)} + \vec{F}_{12}^{(m)} + \vec{F}_{12}^{(r)}, \quad (2.19)$$

де $\vec{F}_{12}^{(\mu)}$ - сила тертя (стоксова сила), що виникає завдяки дії в'язких сил при взаємодії між фазами, та визначається різницею швидкостей фаз $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (ковзанням);

$\vec{F}_{12}^{(m)}$ - сила, пов'язана з ефектом “приєднаних мас”, що виникає через прискорений рух включень відносно несучого середовища;

$\vec{F}_{12}^{(r)}$ - сила додаткового впливу на включення через наявність градієнтів у полі середніх швидкостей несучого середовища (сила Магнуса). Для введених сил справедливі такі вирази:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12}^{(\mu)} &= \alpha_2 \rho_1^0 K^{(\mu)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \\ \vec{F}_{12}^{(m)} &= \alpha_2 \rho_1^0 K^{(m)} \left(\frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} - \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} \right), \\ \vec{F}_{12}^{(r)} &= \alpha_2 \rho_1^0 K^{(r)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \text{rot } \vec{v}_1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Зовнішні форми включень, їх непоодинокість і подібні інші фактори враховуються у коефіцієнтах $K^{(\mu)}, K^{(m)}, K^{(r)}$.

З урахуванням всього сказаного вище відносно міжфазної взаємодії запишемо систему рівнянь теплогідроліки моделі двошвидкісного та двотемпературного потоку двофазної рідини з однаковим тиском у фазах:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \bar{\nabla} \rho_i \bar{v}_i &= \Gamma_{ji}, \\
\rho_i \frac{d_i \bar{v}_i}{dt} &= -\alpha_i \bar{\nabla} P + \nabla^k \bar{\tau}_i^k + \rho_i \bar{g}_i + \bar{F}_{ji} + \Gamma_{ji} (\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i), \\
\rho_i \frac{d_i U_i}{dt} &= \frac{\alpha_i P}{\rho_i^0} \frac{d_i \rho_i^0}{dt} + \bar{F}_{ji} (\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i) + \Gamma_{ji} \frac{(\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i)^2}{2} + \\
&\quad + \Gamma_{ji} (U_{ji} - U_i) + Q_{ji} + \tau_i^{kl} e_i^{kl} - \nabla^k q_i^k, \tag{2.21}
\end{aligned}$$

$$P_1(\rho_1^0, T_1) = P_2(\rho_2^0, T_2) = P, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho_i^0 = \frac{\rho_i}{\alpha_i},$$

$$\Gamma_{ji} = -\Gamma_{ij}, \quad \bar{F}_{ji} = -\bar{F}_{ij}, \quad \bar{v}_{ji} = \bar{v}_{ij},$$

$$Q_{ji} + Q_{ij} + \Gamma_{ji} (h_{ji} - h_{ij}) = 0, \quad h_{ij} = U_{ij} + \frac{P}{\rho_i^0},$$

де: $\tau_i^{kl} e_i^{kl} = \tau_i^{kl} \nabla^k v_i^l$, $e_i^{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^k}{\partial x^l} + \frac{\partial v_i^l}{\partial x^k} \right)$ - тензор швидкостей

деформацій i -ї фази.

Розглянемо детальніше третє рівняння (2.21), яке визначає зміну внутрішньої енергії i -ї фази.

Перший доданок у правій частині – оборотна робота сил тиску, інші доданки відповідають за роботу дисипативних сил, яка характеризує незворотний перехід кінетичної енергії в теплову, а також – за приплив тепла внаслідок теплопровідності та фазових переходів. За дисипацію кінетичної енергії відповідають такі члени:

- $\tau_i^{kl} e_i^{kl}$ – дисипація за рахунок дії макроскопічних в'язких сил, аналог дисипативної функції Φ , введеної для однофазної течії;
- $\bar{F}_{ji} (\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i)$ – дисипація за рахунок роботи міжфазних сил через міжфазну швидкісну нерівноважність, її складові визначаються за допомогою (2.20);

- $\frac{1}{2}\Gamma_{ji}(\vec{v}_{ji} - \vec{v}_i)^2$ – дисипація внаслідок нерівноважності обміну імпульсом при фазових переходах, які відбуваються при нерівних швидкостях фаз.

Зауважимо, що у випадку $\vec{v}_{ji} = \vec{v}_{ij} = \vec{v}_i$ в i -ій фазі буде відсутня дисипація через міжфазну взаємодію.

Для замикання системи (2.21) необхідно, крім зовнішніх силових впливів $(\vec{g}_i)$, задати рівняння, які визначають внутрішньофазні (τ_i^{kl}, q_i^k) та міжфазні $(\Gamma_{ji}, \vec{F}_{ji}, \vec{v}_{ji}, Q_{ji})$ взаємодії.

3 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОДНОВИМІРНОГО ДВОФАЗНОГО ПОТОКУ

Аналітичне дослідження задач конвективного теплообміну в двофазних потоках на основі загальної системи рівнянь (2.21) являє собою надзвичайно складну задачу. Переважну більшість теоретичних результатів при дослідженні двофазних потоків отримано для наближення одновимірного руху двофазного теплоносія по системі трубопроводів. Крім того, модель одновимірного нестационарного гетерогенного потоку двофазного теплоносія є базовою для всіх сучасних кодів поліпшеного аналізу теплогідравлічних процесів у системах ЯЕУ.

Метою даного розділу є стисле викладення основ аналітичної теорії одновимірних двофазних потоків. Розглянуті нижче підходи складають теоретичну основу для побудови багатьох моделей, що використовуються в системі замикальних співвідношень коду RELAP 5. Таким чином, одновимірна теорія представляє не тільки самостійний інтерес. Детальне викладення теорії одновимірного двофазного потоку наведене в монографії [8].

3.1 Основні гідромеханічні параметри одновимірного двофазного потоку

У цьому підрозділі визначаються основні параметри, які традиційно використовуються для опису закономірностей руху двофазного теплоносія при застосуванні одновимірної моделі.

Нехай розглядається рух двофазного теплоносія по трубі або каналу, площа поперечного перерізу якого змінюється в аксіальному напрямку. Аксіальну швидкість можна охарактеризувати за допомогою масової витрати через поперечний переріз труби або каналу. Повна масова витрата двофазного теплоносія позначається W , і має розмірність [кг/с]. Повна витрата дорівнює сумі витрат фаз:

$$W = W_1 + W_2. \quad (3.1)$$

Надалі будемо вважати, що індекс “1” відноситься до рідкої, а “2” – до газоподібної фази.

Повна об'ємна витрата двофазного теплоносія Q , $[m^3/c]$, дорівнює сумі об'ємних витрат фаз:

$$Q = Q_1 + Q_2. \quad (3.2)$$

Зв'язок між масовими та об'ємними витратами має вигляд

$$Q_1 = \frac{W_1}{\rho_1}, Q_2 = \frac{W_2}{\rho_2}. \quad (3.3)$$

Позначимо через α частину об'єму двофазного потоку, яку займає в певний момент часу компонент 2. Тоді, якщо об'єм достатньо малим, α може дорівнювати тільки нулю або одиниці. Однак, згідно з гіпотезами механіки гетерогенних суцільних середовищ [5], під час побудови диференціальних рівнянь збереження об'єм повинен обиратися значно більшим, ніж розмір частинок дисперсної фази, і, таким чином, величина α представлятиме середню об'ємну концентрацію.

Значення α , осереднене за об'ємом і часом, визначається як

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\iint \alpha(\vec{r}, t) d\vec{r} dt}{\int d\vec{r} \int dt}. \quad (3.4)$$

В сумішах води і пари (газу) об'ємна концентрація газу α має назву **істинного об'ємного вмісту пари (газу)**.

У багатьох випадках, особливо в задачах, пов'язаних з кипінням або конденсацією, бажано знати частину повної масової витрати через заданий переріз, що відповідає кожній фазі. Тому до розгляду вводять *витратний масовий вміст пари (газу) X* , що визначається як

$$X = \frac{W_2}{W}. \quad (3.5)$$

Уведені згідно з (3.3) об'ємні витрати Q_1 і Q_2 є інтегральними характеристиками для обраного перерізу труби або каналу. Витрати фаз в кожній точці перерізу труби характеризуються **щільностями об'ємних витрат (зведеними швидкостями)** фаз, які позначаються j_1 і j_2 і вимірюються в $[m/c]$. Вирази об'ємних витрат через зведені швидкості мають вигляд:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_A j_1 dA = \int_{A_1} v_1 dA_1 = \int_A v_1 (1 - \alpha) dA, \\
Q_2 &= \int_A j_2 dA = \int_{A_2} v_2 dA_2 = \int_A v_2 \alpha dA.
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

Звичайно, j_1 і j_2 є векторними величинами, однак в рамках одновимірної моделі вони використовуються як скаляри, бо позначають складові в аксіальному напрямку вздовж труби або каналу. Як випливає з (3.6), зведені швидкості виражаються через істинний об'ємний вміст пари (газу) та істинні швидкості компонентів:

$$j_1 = (1 - \alpha)v_1, \quad j_2 = \alpha v_2. \tag{3.7}$$

Зведена швидкість двофазного потоку дорівнює сумі зведених швидкостей компонентів:

$$j = j_1 + j_2. \tag{3.8}$$

Середні за перерізом площі A значення зведених швидкостей визначаються як:

$$\langle j_1 \rangle = \frac{Q_1}{A}, \quad \langle j_2 \rangle = \frac{Q_2}{A}. \tag{3.9}$$

Введемо ще одне означення. **Масовою швидкістю речовини** називається щільність масової витрати речовини через переріз труби або каналу. Масові швидкості компонентів двофазного потоку позначаються G_1 і G_2 , $\left[\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) \right]$. Справедливі такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_A G_1 dA, \quad W_2 = \int_A G_2 dA, \quad \text{звідки} \\
G_1 &= \rho_1 j_1, \quad G_2 = \rho_2 j_2, \quad G = G_1 + G_2.
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Середня щільність потоку маси, наприклад, другого компонента через переріз площею A визначається як:

$$\langle G_2 \rangle = \frac{W_2}{A}. \tag{3.11}$$

За допомогою масових швидкостей знаходиться середнє значення витратного масового вмісту пари (газу):

$$\langle X \rangle = \frac{\iint G_2 dA dt}{\iint G dA dt}. \quad (3.12)$$

Оскільки у межах одновимірної теорії досліджуються тільки величини, осереднені за перерізом труби, знаки осереднення надалі опущені.

Випишемо деякі співвідношення між введеними параметрами одновимірного двофазного потоку, які будуть використовуватися в подальшому:

$$j_1 = \frac{Q_1}{A}, j_2 = \frac{Q_2}{A}, j = \frac{Q_1 + Q_2}{A}. \quad (3.13)$$

$$v_1 = \frac{j_1}{1-\alpha}, v_2 = \frac{j_2}{\alpha}. \quad (3.14)$$

$$G_1 = \frac{W_1}{A}, G_2 = \frac{W_2}{A}. \quad (3.15)$$

$$W_1 = Q_1 \rho_1, W_2 = Q_2 \rho_2. \quad (3.16)$$

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v_1}{v_2} \frac{1-\alpha}{\alpha}. \quad (3.17)$$

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{1-X}{X}. \quad (3.18)$$

З рівнянь (3.17)-(3.18) випливає

$$\frac{1-X}{X} = \frac{v_1}{v_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1-\alpha}{\alpha}. \quad (3.19)$$

Введемо деякі нові величини, які являють собою комбінації розглянутих основних параметрів двофазного потоку.

Відносна швидкість фаз визначається як

$$v_{21} = (v_2 - v_1) = -v_{12}. \quad (3.20)$$

Швидкість дрейфу фази вводиться як різниця між швидкістю фази і швидкістю суміші:

$$v_{1j} = v_1 - j, v_{2j} = v_2 - j. \quad (3.21)$$

Швидкість потоку дрейфу (зведена швидкість дрейфу) фази являє собою щільність об'ємної витрати фази через поверхню, що рухається зі швидкістю суміші, тобто

$$j_{21} = \alpha(v_2 - j), \quad j_{12} = (1 - \alpha)(v_1 - j). \quad (3.22)$$

Підставляючи співвідношення (3.7) в перше рівняння (3.22) і використовуючи (3.6), будемо мати:

$$j_{21} = j_2 - \alpha(j_1 + j_2) = j_2(1 - \alpha) - \alpha j_1. \quad (3.23)$$

Аналогічно:

$$j_{12} = j_1\alpha - (1 - \alpha)j_2. \quad (3.24)$$

Звідки випливає:

$$j_{21} = -j_{12}. \quad (3.25)$$

З співвідношень (3.21), (3.25) отримаємо залежність зведеної швидкості дрейфу від відносної швидкості:

$$j_{12} = \alpha(1 - \alpha)(v_1 - v_2) = \alpha(1 - \alpha)v_{12}. \quad (3.26)$$

3.2 Теорія одновимірного гомогенного двофазного потоку

Теорія гомогенного потоку дає найпростіший метод дослідження двофазних потоків. У ній визначаються відповідні середні властивості потоку і суміш розглядається як деякий квазіконтинуум, що описується рівняннями однофазного середовища. Отже, стан двофазного потоку відомий, якщо відомі середні параметри: швидкість, температура, тиск, що характеризують суміш у цілому. Ці параметри є середньозваженими і не обов'язково відповідають властивостям окремої фази.

Теорія гомогенного потоку може застосовуватися у випадках, коли процеси міжфазного обміну кількістю руху, енергією і масою відбуваються з великою інтенсивністю, отже швидко встановлюється рівновага, що дозволяє описати двофазний потік за допомогою середньозважених параметрів.

3.2.1 Одновимірний стаціонарний гомогенний потік

Основні рівняння одновимірного стаціонарного гомогенного потоку в трубі, площа перерізу якої дорівнює A , мають такий вигляд.

Рівняння нерозривності:

$$W = \rho_m v A = \text{const.} \quad (3.27)$$

Рівняння руху:

$$W \frac{dv}{dx} = -A \frac{dP}{dx} - P_w \tau_w - A \rho_m g \cos \theta, \quad (3.28)$$

Рівняння енергії:

$$\frac{dq_e}{dx} - \frac{dL}{dx} = W \frac{d}{dx} \left(h + \frac{v^2}{2} + g x \cos \theta \right). \quad (3.29)$$

У рівняннях (3.27)-(3.29) приймаються такі позначення: x – координата, спрямована вздовж осі труби; A і P_w – відповідно, площа перерізу і змочений периметр труби, τ_w – середнє дотичне напруження на стінці (характеризує тертя на стінці), $\frac{dq_e}{dx}$ – питомий тепловий потік, що передається від стінок до теплоносія і припадає на одиницю довжини труби, $\frac{dL}{dx}$ – питома робота зовнішніх сил (технічна робота) та робота сил тертя, що припадає на одиницю довжини труби, θ – кут нахилу осі труби відносно вертикалі.

Рівняння (3.28) часто записують у явному вигляді відносно градієнта тиску:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{W}{A} \frac{dv}{dx} - \frac{P_w}{A} \tau_w - \rho_m g \cos \theta. \quad (3.30)$$

Три члени у правій частині цього рівняння можна розглядати як складові градієнту тиску, обумовлені тертям, прискоренням та дією сили тяжіння:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F = \frac{P_w}{A} \tau_w, \quad -\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = \frac{W}{A} \frac{dv}{dx}, \quad -\left(\frac{dP}{dx}\right)_G = \rho_m g \cos \theta, \quad (3.31)$$

де $-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F$ – втрати тиску внаслідок тертя на стінці;

$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = \frac{W}{A} \frac{dv}{dx}$ – втрати тиску, пов'язані з прискоренням потоку

(обумовлені геометрією області течії); $-\left(\frac{dP}{dx}\right)_G$ – втрати тиску,

пов'язані з дією сили тяжіння.

Повний градієнт тиску дорівнює сумі окремих складових:

$$\frac{dP}{dx} = \left(\frac{dP}{dx}\right)_F + \left(\frac{dP}{dx}\right)_A + \left(\frac{dP}{dx}\right)_G. \quad (3.32)$$

Для замикання розглянутої системи рівнянь (3.27)-(3.29) слід додати ще рівняння стану, вирази для щільностей зовнішніх енергетичних потоків $\frac{dq_e}{dx}$, $\frac{dL}{dx}$, густини суміші ρ_m та напруження тертя на стінці τ_w .

Середню густину суміші ρ_m можна виразити різними шляхами.

У функції від об'ємного вмісту пари (газу) α вона записується як

$$\rho_m = \alpha \rho_2 + (1 - \alpha) \rho_1. \quad (3.33)$$

У той же час у функції від витратного масового вмісту пари (газу) X , ρ_m визначається таким чином:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{X}{\rho_2} + \frac{1 - X}{\rho_1}. \quad (3.34)$$

Отже, у першому випадку ((3.33)) адитивними величинами є питомі маси, а у другому ((3.34)) – питомі об'єми. Маса кожної фази в одиниці об'єму у функції від α та X може бути визначена зі співвідношень

$$X \rho_m = \alpha \rho_2, (1 - X) \rho_m = (1 - \alpha) \rho_1. \quad (3.35)$$

При цьому, ураховуючи рівність швидкостей фаз у межах гомогенної моделі, об'ємний і масовий вмісти пари (газу) даються виразами

$$\alpha = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{j_2}{j}, X = \frac{W_2}{W_1 + W_2} = \frac{G_2}{G}. \quad (3.36)$$

Розглянемо детальніше складові загального градієнту тиску (3.31). Спочатку отримаємо формулу для визначення втрат тиску внаслідок дії тертя на стінці. Для цього виразимо дотичне напруження на стінці через коефіцієнт тертя і середній гідрравлічний

діаметр D , який являє собою відношення площі поперечного перерізу труби до однієї четвертої змоченого периметра:

$$D = \frac{4A}{P_w}. \quad (3.37)$$

Середнє дотичне напруження на стінці подається таким чином:

$$\tau_w = \frac{1}{2} C_f \rho_m v^2, \quad (3.38)$$

де C_f - коефіцієнт тертя.

Градієнт тиску, обумовлений силами тертя, має вигляд

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F = 2C_f \rho_m \frac{v^2}{D}. \quad (3.39)$$

Ураховуючи, що

$$v = j = \frac{Q_1 + Q_2}{A}, \quad \rho_m v = G = \frac{W_1 + W_2}{A}, \quad (3.40)$$

отримаємо

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F = \frac{2C_f G j}{D}. \quad (3.41)$$

Втрати тиску, обумовлені дією сил тертя на стінці, також можна виразити через питомі об'єми компонентів $v_1 = \frac{1}{\rho_1}$, $v_2 = \frac{1}{\rho_2}$ та витратний масовий вміст пари (газу) X . З рівнянь (3.34) і (3.40) будемо мати:

$$v = \frac{G}{\rho_m} = G[Xv_2 + (1-X)v_1] = G(v_1 + Xv_{12}), \quad (3.42)$$

де $v_{12} = v_2 - v_1$.

За допомогою рівнянь (3.42) і (3.40) перепишемо рівняння (3.39) у такий спосіб:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F = \frac{2C_f G^2}{D} (v_1 + Xv_{12}). \quad (3.43)$$

На ділянці труби скінченної довжини L перепад тиску внаслідок тертя часто визначається за допомогою коефіцієнту гідродинамічного опору ζ такою формулою:

$$\Delta P = \zeta \frac{\rho_m v^2}{2} \frac{L}{D}, \quad (3.44)$$

Зв'язок між коефіцієнтами тертя C_f і гідродинамічного опору ζ має вигляд:

$$C_f = \frac{\zeta A}{P_w D}, \quad (3.45)$$

отже, для круглих труб справедливо:

$$C_f = \frac{\zeta}{4}. \quad (3.46)$$

Ураховуючи постійність масової витрати і рівність швидкостей фаз для градієнта тиску, обумовленого прискоренням потоку, відповідно до (3.31), будемо мати:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = G \frac{dv}{dx}. \quad (3.47)$$

Виразивши швидкість з рівняння нерозривності (3.27) і підставляючи в (3.47), отримаємо:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = G \frac{d}{dx} \left(\frac{W}{A \rho_m} \right). \quad (3.48)$$

Виконуючи диференціювання рівності (3.48), знайдемо:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = G^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_m} \right) - \frac{G^2}{\rho_m} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx}. \quad (3.49)$$

Виразимо втрати тиску внаслідок прискорення потоку $-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A$ через витратний масовий вміст пари (газу) X . Для цього здиференціюємо (3.34):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_m} \right) = \frac{dX}{dx} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) + X \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_2} \right) + (1-X) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_1} \right), \quad \text{або} \quad \text{у}$$

функції питомих об'ємів фаз:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_m} \right) = v_{12} \frac{dX}{dx} + X \frac{dv_2}{dx} + (1-X) \frac{dv_1}{dx}. \quad (3.50)$$

Для однокомпонентної суміші (наприклад, пароводяної) v_1 і v_2 залежать лише від тиску. Для двокомпонентної суміші v_1 і v_2 також можна задати функціями тиску, якщо відомий термодинамічний процес, у якому перебуває потік. Таким чином, рівняння (3.50) можна переписати у вигляді

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_m} \right) = v_{12} \frac{dX}{dx} + \frac{dP}{dx} \left[X \frac{dv_2}{dP} + (1-X) \frac{dv_1}{dP} \right]. \quad (3.51)$$

Рівняння (3.49) і (3.51) дозволяють отримати вираз для втрат тиску внаслідок прискорення потоку у функції витратного масового вмісту пари (газу) X :

$$-\left(\frac{dP}{dx} \right)_A = G^2 \left\{ v_{12} \frac{dX}{dx} + \frac{dP}{dx} \left[X \frac{dv_2}{dP} + (1-X) \frac{dv_1}{dP} \right] - (v_1 + Xv_{12}) \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right\}. \quad (3.52)$$

Для отримання виразу для втрат тиску внаслідок дії сили тяжіння, підставимо густину суміші ρ_m з (3.34) до третього рівняння (3.31):

$$-\left(\frac{dP}{dx} \right)_G = g \cos \theta \frac{1}{v_1 + Xv_{12}}. \quad (3.53)$$

Співвідношення (3.43), (3.52) і (3.53) дозволяють отримати вираз для повних втрат тиску, справедливий для гомогенної моделі:

$$\begin{aligned} -\frac{dP}{dx} &= \quad (3.54) \\ &= \frac{\frac{2C_f}{D} G^2 (v_1 + Xv_{12}) + G^2 v_{12} \frac{dX}{dx} - G^2 (v_1 + Xv_{12}) \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{g \cos \theta}{(v_1 + Xv_{12})}}{1 + G^2 \left[X \frac{dv_2}{dP} + (1-X) \frac{dv_1}{dP} \right]}. \end{aligned}$$

Інколи застосовують інші форми цього рівняння, але всі вони зводяться до такого загального вигляду:

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{C_F + C_X \frac{dX}{dx} + C_A \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + C_g g \cos \theta}{1 - M^2}. \quad (3.55)$$

У рівнянні (3.55) C_F, C_X, C_A, C_g - так звані **коефіцієнти впливу**, які враховують, відповідно, внесок тертя, фазових переходів, зміни площі поперечного перерізу і сили тяжіння в повний градієнт тиску. Величина M^2 у знаменнику має той же фізичний зміст, що і квадрат числа Маха в однофазному випадку. З рівнянь (3.54) і (3.55) можемо знайти вираз для гомогенної рівноважної швидкості звуку a_{HE} (швидкості розповсюдження пружних хвиль в гомогенному середовищі). Ураховуючи, що $M^2 = \frac{v^2}{a_{HE}^2}$ і використовуючи (3.40), з

(3.54) отримаємо:

$$a_{HE} = \left\{ -\rho_m^2 \left[X \frac{dv_2}{dP} + (1-X) \frac{dv_1}{dP} \right] \right\}^{-1/2} \quad (3.56)$$

Використовуючи співвідношення (3.33) і (3.35), побудуємо вираз для a_{HE} як функції істиного об'ємного вмісту пари (газу) α :

$$a_{HE} = \left\{ [\alpha \rho_2 + (1-\alpha) \rho_1] \left[\alpha \rho_2 \left(-\frac{dv_2}{dP} \right) + (1-\alpha) \rho_1 \left(-\frac{dv_1}{dP} \right) \right] \right\}^{-1/2} \quad (3.57)$$

Псевдозвукові швидкості для чистих компонентів в такому ж термодинамічному процесі, як і для двофазного потоку, можна визначити таким чином:

$$a_1^2 = \frac{dP}{d\rho_1} = \rho_1^{-2} \left(-\frac{dv_1}{dP} \right)^{-1}, \quad a_2^2 = \frac{dP}{d\rho_2} = \rho_2^{-2} \left(-\frac{dv_2}{dP} \right)^{-1}. \quad (3.58)$$

Використовуючи вирази (3.58) отримаємо співвідношення між гомогенною рівноважною швидкістю звуку a_{HE} і псевдозвуковими швидкостями a_1 і a_2 :

$$\frac{1}{a_{HE}^2} = [\alpha \rho_2 + (1 - \alpha) \rho_1] \left(\frac{\alpha}{\rho_2 a_2^2} + \frac{1 - \alpha}{\rho_1 a_1^2} \right). \quad (3.59)$$

Для сумішей рідини і пари (газу) це рівняння можна спростити, внаслідок співвідношень $\rho_1 a_1^2 \gg \rho_2 a_2^2$ і $\rho_1 \gg \rho_2$. Отримаємо:

$$a_{HE}^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{a_2^2}{\alpha(1 - \alpha)}. \quad (3.60)$$

Звідси можна зробити висновок, що швидкість звуку в гомогенній суміші може бути набагато меншою за швидкість звуку в чистому газі. Мінімум швидкості звуку досягається при $\alpha = \frac{1}{2}$. Так, для суміші повітря з водою при атмосферному тиску швидкість звуку приблизно дорівнює 21 м/с [8].

Рівняння (3.55) дозволяє розрахувати повні втрати тиску, якщо відомою є зміна витратного масового вмісту пари (газу) X по довжині труби. Масовий вміст пари (газу) X визначається з рівняння енергії у припущенні, що підведене тепло витрачається на випаровування. Проте, якщо відбувається достатньо різке *закипання* теплоносія (кипіння внаслідок зниження тиску), масовий витратний вміст пари (газу) залежатиме не лише від внутрішньої енергії або ентальпії суміші, але й від тиску, тобто

$$X = X(h, P), \quad (3.61)$$

де h – ентальпія суміші, що визначається як

$$h = Xh_2 + (1 - X)h_1. \quad (3.62)$$

Тоді справедливо

$$X = \frac{h - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{h - h_1}{h_{12}}, \quad (3.63)$$

де $h_{12} = h_2 - h_1$.

Для швидкості зміни X по довжині труби будемо мати:

$$\frac{dX}{dx} = \left(\frac{\partial X}{\partial h} \right)_P \frac{dh}{dx} + \left(\frac{\partial X}{\partial P} \right)_h \frac{dP}{dx}, \quad (3.64)$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial h} \right)_P = \frac{1}{h_{12}}.$$

З урахуванням (3.64) рівняння (3.54) набуде такого вигляду:

$$-\frac{dP}{dx} = \quad (3.65)$$

$$= \frac{\frac{2C_f}{D} G^2 (v_1 + X v_{12}) + G^2 \frac{v_{12}}{h_{12}} \frac{dh}{dx} - G^2 (v_1 + X v_{12}) \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{g \cos \theta}{(v_1 + X v_{12})}}{1 + G^2 \left[X \frac{dv_2}{dP} + (1 - X) \frac{dv_1}{dP} + v_{12} \left(\frac{\partial X}{\partial P} \right)_h \right]}.$$

Відзначимо, що на практиці використовується умова запирання потоку ($M=1$), в якій швидкість звуку розраховується за формулою (3.56), а не за виразом, який можна отримати виходячи з аналізу знаменника правої частини рівняння (3.65). Це пов'язано з ефектами нерівноважності, які заважають швидкому протіканню фазових переходів, викликаних різкою зміною тиску.

3.2.2 Втрати тиску, обумовлені тертям на стінці

3.2.2.1 Ламінарна течія

Коефіцієнт тертя C_f , необхідний для розрахунку втрат тиску, пов'язаних із тертям на стінці, являє собою емпіричний параметр. З метою аналізу внеску сил тертя у загальні втрати тиску, як правило, користуються ефективною в'язкістю суміші. Для малих концентрацій дисперсної фази ефективна в'язкість суміші μ визначається теоретично на основі енергетичного підходу Ейнштейна. Наприклад, для емульсії рідких сферичних частинок при низьких концентраціях для ефективної в'язкості отримано вираз:

$$\mu = \mu_1 \left(1 + 2.5\alpha \frac{\mu_2 + \frac{2}{5}\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \right). \quad (3.66)$$

де індекс 1 відповідає дисперсійній (неперервній) фазі. Якщо суміш являє собою суспензію твердих частинок, величина μ_2 дуже велика і рівняння (3.66) приводиться до відомого рівняння Ейнштейна

$$\mu = \mu_1 (1 + 2.5\alpha) \quad (3.67)$$

Для суміші, що містить бульбашки газу з малою в'язкістю, з (3.66) отримаємо:

$$\mu = \mu_1 (1 + \alpha). \quad (3.68)$$

На жаль, рівняння (3.66)-(3.68) забезпечують необхідну точність опису лише за малих концентрацій частинок, до 5%.

У тих випадках, коли структура двофазного потоку невідома, використовувати ідеалізовану реологічну модель течії не можна. При цьому застосовуються напівемпіричні співвідношення для в'язкості, які задовольняють граничним випадкам відсутності однієї з фаз. Найбільш відомі співвідношення для газорідних потоків наведено нижче:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &= \frac{X}{\mu_g} + \frac{1-X}{\mu_f}, \\ \mu &= X\mu_g + (1-X)\mu_f, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\mu = \frac{j_f}{j} \mu_f + \frac{j_g}{j} \mu_g.$$

За допомогою ефективної в'язкості суміші втрати тиску, пов'язані з тертям у двофазному потоці визначаються через втрати тиску у відповідному однофазному потоці. Наприклад, з першого рівняння (3.69) будемо мати

$$\frac{\mu}{\mu_f} = \left[X \frac{\mu_f}{\mu_g} + (1-X) \right]^{-1}. \quad (3.70)$$

Позначимо індексом f_0 параметри однофазного потоку рідини, що має ту ж масову швидкість, що і двофазний потік. Тоді:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F = \frac{2C_f G j}{D} = \frac{2C_f G v}{D} = \frac{2C_f G^2}{D\rho_m},$$

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_{F_{f_0}} = \frac{2C_f^0 G^2}{D\rho_f}.$$

Отже:

$$\frac{-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F}{-\left(\frac{dP}{dx}\right)_{F_{f_0}}} = \frac{C_f \rho_f}{C_{f_0} \rho_m}.$$

Як впливає з формули (3.45), коефіцієнт тертя C_f є пропорційним коефіцієнту гідродинамічного опору ζ . У той же час, фундаментальний закон гідродинамічного опору для стабілізованої ламінарної течії має вигляд:

$$\zeta = C / \text{Re},$$

де $\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$ - число Рейнольдса. Звідси можемо припустити:

$$\frac{C_f}{C_{f_0}} = \frac{\mu}{\mu_f}, \text{ а отже}$$

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F = -\left(\frac{dP}{dx}\right)_{F_{f_0}} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_m} \cdot \frac{\mu}{\mu_f}. \quad (3.71)$$

З співвідношення (3.34) знайдемо вираз для відношення густин $\frac{\rho_f}{\rho_m}$:

$$\frac{\rho_f}{\rho_m} = \frac{X\rho_f}{\rho_g} + (1-X) = 1 + X\left(\frac{\rho_f}{\rho_g} - 1\right). \quad (3.72)$$

Використовуючи вирази (3.71), (3.70) і (3.72), отримаємо співвідношення між втратами тиску у двофазному потоці й відповідному однофазному потоці рідини:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F = -\left(\frac{dP}{dx}\right)_{F_0} \left[1 + X \left(\frac{\rho_f}{\rho_g} - 1 \right) \right] \left[1 + X \left(\frac{\mu_f}{\mu_g} - 1 \right) \right]^{-1}. \quad (3.73)$$

Відношення градієнту тиску, обумовленого тертям, для двофазного потоку до такого ж градієнту тиску для відповідного однофазного потоку називається **параметром двофазності** й позначається ϕ^2 з відповідним індексом, наприклад:

$$\phi_{f_0}^2 = \frac{-\left(\frac{dP}{dx}\right)_F}{-\left(\frac{dP}{dx}\right)_{F_0}}. \quad (3.74)$$

Якщо на основі тих або інших міркувань вдається визначити $\phi_{f_0}^2$, то перший член в чисельнику рівнянь (3.54), (3.65), який характеризує втрати тиску у двофазному потоці внаслідок тертя на стінці, можна переписати відповідно до співвідношення:

$$\frac{2C_f}{D} G^2 (v_f + X v_{fg}) = \phi_{f_0}^2 \frac{2C_{f_0}}{D} G^2 v_f. \quad (3.75)$$

3.2.2.2 Турбулентна течія

Коефіцієнт тертя для однофазної турбулентної течії як правило подається у вигляді функції від числа Рейнольдса і негладкості труби. Середня, приблизна оцінка дає значення $C_f \approx 0.005$. В умовах експлуатації системи трубопроводів ЯЕУ стінки труб піддаються впливу корозії, деформуються, на них утворюється налип. У зв'язку з цим похибка визначення втрат тиску для однофазного потоку часто перевищує 25%. Природньо, що не слід очікувати більшої точності й для двофазного потоку.

Існує три головних способи оцінювання коефіцієнту тертя для двофазного турбулентного потоку.

1. Приймається постійне значення коефіцієнту тертя для всіх умов течії. Найкращі результати дає величина $C_f = 0.005$.

2. Використовується коефіцієнт тертя, розрахований для деякого еквівалентного однофазного потоку. Наприклад, для пароводяної суміші з низьким вмістом пари коефіцієнт тертя можна прийняти рівним коефіцієнту тертя для потоку чистої рідини при однакових масових швидкостях.

3. За одним зі співвідношень для еквівалентної в'язкості визначається число Рейнольдса і використовується залежність коефіцієнта тертя від числа Рейнольдса, справедлива для однофазного потоку. Наприклад, рівняння Блазіуса для течії у гладких трубах дає

$$C_f = 0.079 \text{Re}^{-0.25}. \quad (3.76)$$

За допомогою (3.76), з першої формули (3.69) і визначення коефіцієнту двофазності $\phi_{f_0}^2$ (3.74) будемо мати

$$\phi_{f_0}^2 = \left[1 + X \left(\frac{\rho_f}{\rho_g} - 1 \right) \right] \left[1 + X \left(\frac{\mu_f}{\mu_g} - 1 \right) \right]^{-1/4}. \quad (3.77)$$

Далі використовуючи відомі втрати тиску на тертя в однофазному потоці та параметр двофазності $\phi_{f_0}^2$, розраховуються втрати тиску на тертя у двофазному потоці.

Іншим методом розрахунку втрат тиску на тертя є введення додаткових співвідношень не для коефіцієнту тертя, а для параметра двофазності. Цей метод розглянуто нижче в підрозділі 3.3.

3.2.3 Нестационарний одновимірний гомогенний потік двофазної рідини

Диференціальні рівняння, що описують нестационарний одновимірний гомогенний потік порівняно з рівняннями, справедливими для стаціонарного випадку (3.27)-(3.29), містять члени, залежні від часу. Ці рівняння мають такий вигляд.

Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m v) = 0. \quad (3.78)$$

Рівняння руху:

$$\rho_m \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_m g \cos \theta - \frac{P_w}{A} \tau_w. \quad (3.79)$$

Рівняння енергії:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_m \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_m v \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \right] = \\ = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial q_e}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) - \rho_m v g \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Рівняння (3.80) часто переписують в термінах питомої ентальпії суміші h . Для цього використаємо підстановку

$$\rho_m U = \rho_m h - P. \quad (3.81)$$

Диференціюючи перший член (3.80) після підстановки (3.81), отримаємо:

$$\begin{aligned} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m v)}{\partial x} \right] + \rho_m \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \\ + \rho_m v \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \cos \theta \right) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial q_e}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Використовуючи рівняння нерозривності (3.78) і рівняння руху (3.79), помножене почленно на швидкість v , остаточно будемо мати:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} \right) + v \frac{P_w}{A} \frac{\tau_w}{\rho_m} + \frac{1}{A \rho_m} \left(\frac{\partial q_e}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} \right). \quad (3.83)$$

Приклад. Розглянемо застосування рівняння (3.83) для розрахунку масового вмісту пари X у потоці, що рухається у прямій трубі під високим тиском, припускаючи, що члени, пов'язані з нестационарністю поля тиску, а також в'язкою дисипацією на неусталеному режимі (роботою сил тертя), є малими порівняно з іншими членами рівняння енергії (3.83). Нехай діаметр труби дорівнює D , механічна робота відсутня, а щільність теплового потоку на стінці q відома. Тоді рівняння (3.83) набуде вигляду

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\rho_m} \frac{4q}{D}, \quad (3.84)$$

бо на одиницю довжини труби підводиться кількість тепла $\frac{dq_e}{dx} = \pi Dq$. Якщо зміна тиску і його вплив на властивості суміші незначні, то ентальпію і густину можна представити таким чином:

$$h = h_f + Xh_{fg}, \quad \frac{1}{\rho_m} = v_f + Xv_{fg}. \quad (3.85)$$

Підстановка співвідношень (3.85) в (3.84) веде до рівняння

$$\frac{\partial X}{\partial t} + v \frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{v_f}{v_{fg}} + X \right) \Omega, \quad (3.86)$$

$$\text{де } \Omega = \frac{4v_{fg}q}{Dh_{fg}}.$$

Рівняння (3.86) являє собою рівняння розповсюдження для витратного масового вмісту пари (газу) X . Перед тим, як інтегрувати (3.86), відзначимо, що ліва частина рівняння є індивідуальною похідною за часом від витратного масового вмісту пари (газу) і характеризує швидкість зміни вмісту пари в даній фізичній точці рідини. Ураховуючи сказане, після інтегрування (3.86) отримаємо

$$X(t, t_0) = \frac{v_f}{v_{fg}} (e^{\Omega(t-t_0)} - 1), \quad (3.87)$$

де t_0 - момент часу, у який елемент рідини почав випаровуватися. Таким чином, масовий вміст пари в даному елементі рідини зростає з часом за експоненціальним законом.

3.3 Теорія одновимірного гетерогенного двофазного потоку

Модель гетерогенного двофазного потоку допускає швидкісну, температурну і силову нерівноважність між фазами, тобто в межах цієї моделі фази можуть мати різні властивості й швидкості. Природно, що гетерогенна модель забезпечує достатню точність опису для більш широкого діапазону умов, ніж гомогенна модель. Тому гетерогенне наближення покладено в основу математичних

моделей двофазних потоків, що використовуються кодами поліпшеної оцінки для розрахунку теплогідравлічних процесів в системах ЯЕУ.

Дослідження властивостей потоку за допомогою гетерогенної моделі може виконуватися методами різної міри складності. Найдетальніший аналіз передбачає використання рівнянь нерозривності, руху і енергії, записаних окремо для кожної фази, при цьому вказані шість рівнянь розв'язуються сумісно з рівняннями, що описують взаємодію фаз між собою та зі стінками труби. Такий підхід використаний у коді RELAP5, відповідна модель одновимірного двофазного гетерогенного потоку розглядається в розд. 4. У простіших випадках припускається нерівноважність лише за одним параметром фаз, наприклад за швидкістю, а рівняння збереження записуються для суміші в цілому. Якщо кількість невідомих при використанні того або іншого модельного підходу перевищує кількість рівнянь, до складу моделі вводяться замикаючі кореляційні співвідношення або приймаються спрощуючі припущення.

В цьому підрозділі стисло розглянуто застосування найбільш відомих підходів, що використовуються при дослідженні двофазних потоків у межах гетерогенної моделі.

3.3.1 Стаціонарний потік зі швидкісною нерівноважністю між фазами

Будемо припускати, що з метою урахування відмінності між параметрами фаз, одне з припущень гомогенної рівноважної теорії опущене і швидкості фаз можуть бути різними. Наведемо рівняння нерозривності, руху і енергії, справедливі для вказаного випадку. Додаткова степінь вільності системи може враховуватися шляхом уведення в рівняння як об'ємного, так і масового вмісту пари, що дає додаткове співвідношення між швидкостями фаз (3.19).

3.3.1.1 Рівняння нерозривності

Рівняння нерозривності виражає постійність повної масової витрати теплоносія через переріз труби. Отже, воно має вигляд:

$$W = W_1 + W_2 = \text{const} . \quad (3.88)$$

Якщо фазові переходи відсутні, величини W_1 і W_2 постійні. Масові витрати можна виразити як функції інших змінних:

$$W_1 = \rho_1 v_1 A_1, W_2 = \rho_2 v_2 A_2. \quad (3.89)$$

Щільності потоків маси G_1 і G_2 , відповідно до залежності

$$G_i = \frac{W_i}{A}, i = \overline{1,2}, \text{ даються виразами} \quad (3.90)$$

$$G_1 = \rho_1 v_1 (1 - \alpha), G_2 = \rho_2 v_2 \alpha.$$

Якщо використати співвідношення $X = \frac{G_2}{G}$, то можемо виразити повну щільність потоку маси через істинний об'ємний та витратний масовий вміст пари (газу):

$$G = \rho_1 v_1 \frac{1 - \alpha}{1 - X}, G = \rho_2 v_2 \frac{\alpha}{X}. \quad (3.91)$$

3.3.1.2 Рівняння руху

Використовуючи співвідношення між параметрами двофазного потоку α, X, G, v_1, v_2 можемо отримати велику кількість різних форм запису рівняння руху. Наприклад, один із розповсюджених варіантів рівняння стаціонарної течії в круглій трубі має вигляд [8]

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{4\tau_w}{D} + G \frac{d}{dx} [Xv_2 + (1 - X)v_1] + [\alpha\rho_2 + (1 - \alpha)\rho_1] g \cos\theta. \quad (3.92)$$

Рівняння (3.92) одержується з рівняння стаціонарного гомогенного руху (3.28), використовуючи для густини суміші ρ_m співвідношення (3.33), а для швидкості суміші v_m співвідношення:

$$v_m = Xv_2 + (1 - X)v_1. \quad (3.93)$$

3.3.1.3 Рівняння енергії

Рівняння енергії, записане з використанням витратного масового вмісту пари (газу) для представлення ентальпії та швидкості суміші, одержується з рівняння енергії для гомогенного потоку та має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{W} \left(\frac{dq_e}{dx} - \frac{dL}{dx} \right) &= \frac{d}{dx} [Xh_2 + (1-X)h_1] + \\ &+ \frac{d}{dx} \left[X \frac{v_2^2}{2} + (1-X) \frac{v_1^2}{2} \right] + g \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.94)$$

3.3.1.4 Замикання системи рівнянь збереження

Для розв'язання наведеної системи рівнянь збереження (3.88), (3.92), (3.94), окрім рівнянь стану необхідні ще два додаткових співвідношення для τ_w і α . Як правило, використовуються емпіричні залежності, які представляють параметри τ_w і α у функціях, що залежать від витрат, властивостей рідини і геометрії. При використанні цих емпіричних залежностей слід пам'ятати, що всі вони побудовані для адіабатичної течії з малим градієнтом тиску. За умов суттєвих швидкостей фазових переходів і суттєвих прискорень потоку емпіричні співвідношення можуть давати значну похибку. Загальновизнаним методом кореляції напруження тертя на стінці є метод Локкарта-Мартінееллі, розроблений на базі експериментальних даних, отриманих для стабілізованих адіабатних двофазних потоків за умов відсутності фазових переходів. У моделі Локкарта-Мартінееллі припускається, що рідина і газ в трубі рухаються окремо, тобто не перемішуються, як, наприклад у випадку кільцевої течії (див. розд. 6). Напруження тертя у двофазному потоці визначається як добуток параметра двофазності ϕ^2 та значення напруження тертя для відповідного однофазного потоку.

Отже, припустимо, що при заданих масових швидкостях газу і рідини G_g і G_f відомий спосіб визначення градієнтів тиску, які мали б місце під час течії по трубі лише одної фази з масовою швидкістю G_g або G_f . Позначимо ці градієнти тиску $\left(\frac{dP}{dx} \right)_g$ і

$\left(\frac{dP}{dx}\right)_f$. Уведемо у розгляд відношення дійсного градієнта тиску

$\frac{dP}{dx}$ за умов відсутності фазових переходів, прискорення потоку і масових сил до градієнта тиску для окремого руху кожної фази з тією ж масовою швидкістю, яку вона має у двофазному потоці:

$$\phi_g^2 = \frac{\frac{dP}{dx}}{\left(\frac{dP}{dx}\right)_g}, \quad \phi_f^2 = \frac{\frac{dP}{dx}}{\left(\frac{dP}{dx}\right)_f}. \quad (3.95)$$

Градієнти тиску $\left(\frac{dP}{dx}\right)_g$ і $\left(\frac{dP}{dx}\right)_f$ визначаються за формулами для однофазного потоку: у випадку ламінарної течії застосовується закон Пуазейля, у випадку турбулентної течії співвідношення Блазіуса або Нікурадзе [4].

Якщо потік газу відсутній, то справедливо

$$\frac{1}{\phi_f^2} = 1, \quad \frac{1}{\phi_g^2} = 0. \quad (3.96)$$

Аналогічно, у випадку відсутності потоку рідини

$$\frac{1}{\phi_g^2} = 1, \quad \frac{1}{\phi_f^2} = 0. \quad (3.97)$$

У критичній точці, де фази розрізнити не можна, співвідношення між ϕ_g і ϕ_f набуває вигляду

$$\frac{1}{\phi_f^2} + \frac{1}{\phi_g^2} = 1 \quad (3.98)$$

для ламінарного потоку, і

$$\left(\frac{1}{\phi_f}\right)^{8/7} + \left(\frac{1}{\phi_g}\right)^{8/7} = 1, \quad (3.99)$$

у випадку турбулентного потоку, для якого справедливий закон Блазіуса для гладких труб [8].

Загальний вигляд співвідношення між параметрами двофазності прийнято таким:

$$\left(\frac{1}{\phi_f}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{\phi_g}\right)^{1/n} = 1, \quad (3.100)$$

де $n=1$ для ламінарної течії, $n=2,375-2,5$ для турбулентної течії при розрахунку втрат тиску за допомогою коефіцієнту тертя, $n=2,5-3,5$ при розрахунку втрат тиску за теорією шляху перемішування Прандтля.

З метою виключення невідомого градієнта тиску з обох кореляційних параметрів введемо нову змінну, яка являє собою їх відношення:

$$\chi^2 = \frac{\phi_g^2}{\phi_f^2} = \frac{\left(\frac{dP}{dx}\right)_f}{\left(\frac{dP}{dx}\right)_g}. \quad (3.101)$$

Величина χ^2 показує у якій мірі поведінка двофазної суміші ближча до рідини, ніж до газу. Таким чином, слід очікувати існування деякого співвідношення між χ^2 і об'ємним вмістом пари (газу) α . Кореляційна залежність між цими параметрами, отримана Мартінееллі, має вигляд:

$$\alpha = (1 + \chi^{0,8})^{-0,378}. \quad (3.102)$$

Можливі чотири комбінації режимів течії рідкої та газоподібної фаз:

1. Турбулентний режим течії газоподібної фази і турбулентний режим течії рідкої фази, яким відповідають спеціальні індексні позначення параметрів потоку: $\phi_{g,tt}, \phi_{f,tt}, \chi_{tt}$.

2. Ламінарний режим течії газоподібної фази і турбулентний режим течії рідкої фази, яким відповідають спеціальні індекси позначення параметрів потоку: $\phi_{g,lt}, \phi_{f,lt}, \chi_{lt}$.

3. Турбулентний режим течії газоподібної фази і ламінарний режим течії рідкої фази, яким відповідають спеціальні індекси позначення параметрів потоку: $\phi_{g,tl}, \phi_{f,tl}, \chi_{tl}$.

4. Ламінарний режим течії газоподібної фази і ламінарний режим течії рідкої фази, яким відповідають спеціальні індекси позначення параметрів потоку: $\phi_{g,ll}, \phi_{f,ll}, \chi_{ll}$.

Якщо параметр χ відомий, параметри двофазності ϕ_g і ϕ_f можуть розраховуватись або зі співвідношень (3.100), (3.101), або з наведених нижче співвідношень, також отриманих внаслідок апроксимації експериментальних даних, але таких, які на відміну від (3.100) і (3.101), дають явні вирази для ϕ_g і ϕ_f :

$$\phi_g^2 = 1 + C\chi + \chi^2; \quad \phi_f^2 = 1 + \frac{C}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}. \quad (3.103)$$

Параметр C має різні значення для чотирьох вказаних вище комбінацій режимів течії фаз.

Таким чином, розрахунок втрат тиску, обумовлених тертям, за методом Локкарта-Мартінееллі проводиться згідно з такою схемою. Спочатку для заданих витрат газу і рідини G_g і G_f розраховуються числа Рейнольдса для відповідних однофазних потоків Re_g і Re_f , які дозволяють встановити, який режим течії реалізується для кожної фази. Далі отримані числа Рейнольдса використовуються для розрахунку градієнтів тиску $\left(\frac{dP}{dx}\right)_g$ і $\left(\frac{dP}{dx}\right)_f$ в однофазних потоках газу і рідини за формулами для ламінарної або турбулентної течії. Потім за формулами (3.101) і (3.103) визначаються параметри двофазності ϕ_g і ϕ_f та, нарешті, за однією з формул (3.95)

знаходиться градієнт тиску $\frac{dP}{dx}$, пов'язаний з тертям у двофазному потоці.

До переваг методу Локкарта-Мартіnellі слід віднести той факт, що при його використанні не потрібні значення яких-небудь характеристик потоку, які важко було б визначити. Результати, отримані за даним методом, мають достатню точність, насамперед для кільцевої течії. Для дисперсних режимів кращі результати дає застосування гомогенної моделі. Для дисперсно-кільцевого режиму експериментальні дані із втрат тиску внаслідок тертя на стінці розташовуються в інтервалі, проміжному між значеннями, розрахованими за методом Локкарта-Мартіnellі і значеннями, розрахованими за допомогою гомогенної моделі. Згідно із [8], дані експерименту узгоджуються з розрахунками за методом Локкарта-Мартіnellі тим краще, чим більше рідини знаходиться у плівці й, відповідно, менше у краплях.

3.3.2 Повністю нерівноважний одновимірний гетерогенний потік

З метою зменшення кількості емпіричних співвідношень, що використовуються для замикання системи рівнянь гетерогенної моделі двофазного потоку, необхідно збільшити кількість вихідних рівнянь. Для цього достатньо замість рівнянь, записаних для суміші в цілому, використовувати рівняння, отримані внаслідок застосування законів збереження до кожної фази окремо, як це було зроблено у розд. 2. Таким чином, рівняння одновимірного гетерогенного двофазного потоку, розглянуті нижче, є наслідками наведених у розд. 2 загальних рівнянь, отриманими за рахунок певних спрощень, справедливих для одновимірного випадку.

3.3.2.1 Рівняння нерозривності

Рівняння нерозривності для тривимірного двофазного потоку можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1(1-\alpha)) + \vec{\nabla} \cdot [\rho_1(1-\alpha)\vec{v}_1] &= \Gamma_{12}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2\alpha) + \vec{\nabla} \cdot [\rho_2\alpha\vec{v}_2] &= -\Gamma_{12}.\end{aligned}\quad (3.104)$$

де Γ_{12} - швидкість зміни маси рідкої фази в одиниці об'єму за рахунок фазових переходів. Прийнемо припущення про одновимірність потоку і проінтегруємо (3.104) по елементарному об'єму труби довжиною Δx , $\Delta V = A\Delta x$. Для першого рівняння (3.104) отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_1(1-\alpha)A\Delta x] = \rho_1(1-\alpha)v_1A|_x - \rho_1(1-\alpha)v_1A|_{x+\Delta x} + \int_A \Gamma_{12}dA \cdot \Delta x.$$

Поділимо це рівняння на Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, після чого будемо мати

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_1(1-\alpha)A] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_1(1-\alpha)v_1A] = \int_A \Gamma_{12}dA = \Gamma_{12}. \quad (3.105)$$

Аналогічно, інтегрування другого рівняння (3.104) дає:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_2\alpha A] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_2\alpha v_2 A] = \int_A -\Gamma_{12}dA = -\Gamma_{12}. \quad (3.106)$$

3.3.2.2 Рівняння руху

Рівняння руху для тривимірної двофазної течії запишемо в спрощеній, в порівнянні з приведеною в розд. 2 (рівняння (2.21)), формі:

$$\begin{aligned}\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_1 \right) &= \vec{b}_1 + \vec{f}_1 - \vec{\nabla} P, \\ \rho_2 \left(\frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \vec{v}_2 \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_2 \right) &= \vec{b}_2 + \vec{f}_2 - \vec{\nabla} P.\end{aligned}\quad (3.107)$$

де $\vec{b}_1$ і $\vec{b}_2$ - масові сили, прикладені до одиниці об'єму кожної фази; $\vec{\nabla} P$ - середній градієнт тиску, введений у межах припущення про спільний тиск у фазах; $\vec{f}_1$ і $\vec{f}_2$ - прикладені до одиниці об'єму

першої та другої фази сили, пов'язані з міжфазною взаємодією та тертям на стінці. Засіб визначення конкретного вигляду сил $\vec{f}_1$ і $\vec{f}_2$ залежить від режиму потоку. Складові цих сил розглянуто в розд. 2.

Для зручності аналізу замість величин $\vec{f}_1$ і $\vec{f}_2$ часто використовуються еквівалентні величини $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що виражають ті ж самі сили, але віднесені до одиниці об'єму двофазного потоку, а не окремої фази:

$$\vec{F}_1 = \vec{f}_1(1 - \alpha), \vec{F}_2 = \vec{f}_2\alpha. \quad (3.108)$$

Якщо розглядувані сили повністю обумовлені міжфазною взаємодією, то для них справедливо:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}_{12}. \quad (3.109)$$

У випадку одновимірної течії рівняння (3.107) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &= b_1 + f_1 - \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \rho_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) &= b_2 + f_2 - \frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Члени b_1, b_2, f_1, f_2 , що входять до складу рівнянь (3.110), конкретизуються після врахування особливостей структури двофазного потоку для кожного режиму потоку.

Розглянемо, як приклад, кільцевий потік, у якому рідина рухається у вигляді плівки по стінці труби, а потік газу утворює центральне циліндричне ядро. Нехай діаметр труби дорівнює D , а дотичні напруження на поверхні розділу фаз і на стінці – τ_i і τ_w відповідно. Побудуємо рівняння руху для вертикального симетричного потоку.

$$\text{Діаметр газового ядра знайдемо зі співвідношення: } \frac{\pi D_g^2}{\pi D^2} = \alpha,$$

звідки $D_g = D\sqrt{\alpha}$. Оскільки напруження τ_i являє собою силу

міжфазного тертя, прикладену до одиниці поверхні, що розділяє фази, розглядаючи елементарний об'єм $\Delta V = \frac{\pi D^2}{4} \Delta x$, будемо мати:

$$F_g = \frac{-\tau_i \pi D \sqrt{\alpha} \Delta x}{\pi D^2 / 4 \Delta x} = -\frac{4\tau_i \sqrt{\alpha}}{D}.$$

Аналогічно, для сили F_f отримаємо:

$$F_f = \frac{\tau_i \pi D \sqrt{\alpha} \Delta x - \tau_w \pi D \Delta x}{\pi D^2 / 4 \Delta x} = \frac{4(\tau_i \sqrt{\alpha} - \tau_w)}{D}.$$

Відповідні значення f_f і f_g дорівнюють:

$$f_f = \frac{F_f}{1 - \alpha} = \frac{4(\tau_i \sqrt{\alpha} - \tau_w)}{D(1 - \alpha)}, \quad f_g = \frac{F_g}{\alpha} = -\frac{4\tau_i}{D\sqrt{\alpha}}.$$

Для компонентів масових сил справедливо:

$$b_f = -\rho_f g, \quad b_g = -\rho_g g.$$

Таким чином, рівняння руху (3.110) для вертикального кільцевого потоку матимуть вигляд

$$\rho_f \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \cdot \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) = -\rho_f g + \frac{4}{D(1 - \alpha)} (\tau_i \sqrt{\alpha} - \tau_w) - \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\rho_g \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + v_g \cdot \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) = -\rho_g g - \frac{4\tau_i}{D\sqrt{\alpha}} - \frac{\partial P}{\partial x}.$$

3.3.3 Потік з фазовими переходами

У даному підрозділі розглядатимуться загальні рівняння одновимірного гетерогенного потоку, що супроводжується процесом фазових переходів. Дані рівняння будуть отримані з рівнянь (3.110) шляхом конкретизації складових сил f_1 і f_2 .

Перш за все, домовимося, що сили тертя на стінці, які діють на першу і другу фазу і відносяться до одиниці об'єму потоку, позначаються F_{w1} і F_{w2} , відповідно. Нехай сила міжфазної взаємодії F_{12} діє на першу фазу у напрямку руху, а на другу – у

протилежному напрямку. Оскільки фази мають різні швидкості, то будь-який фазовий перехід веде до зміни кількості руху кожної фази. Масова швидкість фазових переходів на одиницю довжини труби дорівнює $\frac{d}{dx}G_2A = \frac{d}{dx}\frac{G_2GA}{G} = W\frac{dX}{dx}$, а зміна швидкості - $v_2 - v_1$. Отже, сила, з якою пов'язана зміна кількості руху внаслідок фазових переходів, віднесена до одиниці об'єму труби, буде дорівнювати:

$$(v_2 - v_1)\frac{W}{A}\frac{dX}{dx} = (v_2 - v_1)G\frac{dX}{dx} = P_{12}. \quad (3.111)$$

Залишається з'ясувати, яким чином силу міжфазної взаємодії внаслідок фазових переходів P_{12} розділити між компонентами. Розподіл P_{12} буде залежати від типу процесу фазового переходу (кипіння або конденсація) і характеру взаємозалежності між процесом фазових переходів і процесом гідродинамічної взаємодії фаз, що обумовлює виникнення сили F_{12} . Наприклад, сила опору, яка діє на краплю, що випаровується, буде залежати від швидкості випаровування. Нехай до другої фази прикладена сила ηP_{12} , тоді до першої фази буде прикладена сила $(1 - \eta)P_{12}$. Визначення величини η ($0 \leq \eta \leq 1$) складає окрему задачу, розв'язання якої залежить, в першу чергу, від структури двофазного потоку.

Запишемо рівняння стаціонарної одновимірної гетерогенної течії з фазовими переходами, припускаючи, що масові сили представлені лише силою тяжіння.

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 \frac{dv_1}{dx} &= -\frac{dP}{dx} - \rho_1 g \cos \theta + \frac{F_{12} - F_{w1}}{1 - \alpha} - \frac{1 - \eta}{1 - \alpha} (v_2 - v_1) G \frac{dX}{dx}, \\ \rho_2 v_2 \frac{dv_2}{dx} &= -\frac{dP}{dx} - \rho_2 g \cos \theta - \frac{F_{12} + F_{w2}}{\alpha} - \frac{\eta}{\alpha} (v_2 - v_1) G \frac{dX}{dx}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Для подальшого аналізу зручним є використання не рівнянь (3.112), а певних їх лінійних комбінацій.

Для побудови лінійних комбінацій рівнянь (3.112), помножимо перше рівняння (3.112) на $1 - \alpha$, а друге – на α і складемо їх. У

результаті отримаємо так зване рівняння суми збереження кількості руху:

$$(1-\alpha)\rho_1 v_1 \frac{dv_1}{dx} + \alpha\rho_2 v_2 \frac{dv_2}{dx} = -\frac{dP}{dx} - g \cos \theta [\rho_1(1-\alpha) + \rho_2\alpha] - (F_{w1} + F_{w2}) - (v_2 - v_1)G \frac{dX}{dx}. \quad (3.113)$$

Перенесемо останній член в правій частині в ліву, використаємо рівняння (3.89), (3.90), (3.111), і отримаємо рівняння, що виражає баланс кількості руху для двофазного потоку в цілому:

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx} (W_1 v_1 + W_2 v_2) = -\frac{dP}{dx} - g \cos \theta [\rho_1(1-\alpha) + \rho_2\alpha] - (F_{w1} + F_{w2}). \quad (3.114)$$

Віднімаючи від другого рівняння (3.112) перше, одержимо

$$\rho_1 v_1 \frac{dv_1}{dx} - \rho_2 v_2 \frac{dv_2}{dx} = g \cos \theta (\rho_2 - \rho_1) - \frac{F_{w1}}{1-\alpha} + \frac{F_{w2}}{\alpha} + \frac{F_{12}}{\alpha(1-\alpha)} - G \frac{dX}{dx} \left(\frac{1-\eta}{1-\alpha} - \frac{\eta}{\alpha} \right) \cdot (v_2 - v_1). \quad (3.115)$$

Рівняння різниці збереження кількості руху (3.115) не містить градієнта тиску і має розглядатися як рівняння відносного руху, оскільки воно характеризує різницю швидкостей зміни кінетичної енергії фаз. Отримати аналітичний розв'язок отриманих рівнянь (3.114), (3.115) вдається лише в окремих випадках і це спряжено з великими труднощами.

Проведемо дослідження *ефектів стисливості* гетерогенного двофазного потоку. Для цього об'єднаємо рівняння руху з рівняннями нерозривності. Розглянемо спочатку другу фазу. Для її параметрів справедлива тотожність:

$$\rho_2 v_2 \frac{dv_2}{dx} = v_2 \frac{d(\rho_2 v_2)}{dx} - v_2^2 \frac{d\rho_2}{dx}. \quad (3.116)$$

Зміна густини другої фази, як правило, пов'язана зі зміною тиску і характером термодинамічного процесу, в якому беруть участь фази. Отже, можемо записати

$$\frac{d\rho_2}{dx} = \frac{\partial \rho_2}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{dP/dx}{\partial P / \partial \rho_2}, \quad (3.117)$$

При цьому $\partial P / \partial \rho_2$ визначається із заданих умов.

Уведемо псевдозвукову швидкість a_2 для компонента 2 відповідно до співвідношення:

$$a_2^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho_2}. \quad (3.118)$$

Якщо об'єднати рівняння (3.116)-(3.118) і підставити результат у друге рівняння (3.112), отримаємо

$$\begin{aligned} -\frac{dP}{dx} \left(1 - \frac{v_2^2}{a_2^2} \right) &= v_2 \frac{d}{dx} (\rho_2 v_2) + \rho_2 g \cos \theta + \\ &+ \frac{F_{l2} + F_{w2}}{\alpha} + \frac{\eta}{\alpha} (v_2 - v_1) G \frac{dX}{dx}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Використаємо співвідношення $\frac{W}{A} = G = \frac{G_2}{X}$, звідки

$$WX = AG_2 = A\alpha\rho_2 v_2. \quad (3.120)$$

Диференціюючи останнє співвідношення, отримаємо

$$W \frac{dX}{dx} = \alpha\rho_2 v_2 \frac{dA}{dx} + A\rho_2 v_2 \frac{d\alpha}{dx} + \alpha v_2 A \frac{d\rho_2}{dx} + \alpha\rho_2 A \frac{dv_2}{dx}.$$

Почленно поділимо отримане рівняння на $AG_2 = A\alpha\rho_2 v_2$, після чого матимемо

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dx} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{1}{\rho_2 v_2} \frac{d(\rho_2 v_2)}{dx}. \quad (3.121)$$

Вилучимо з (3.121) похідну $\frac{d(\rho_2 v_2)}{dx}$ за допомогою (3.119) і одержимо рівняння

$$\begin{aligned}
-\frac{dP}{dx} \frac{1}{\rho_2 v_2^2} \left(1 - \frac{v_2^2}{a_2^2}\right) &= \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} - \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} - \\
-\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{\rho_2 v_2^2} &\left[\rho_2 g \cos \theta + \frac{F_{12} + F_{w2}}{\alpha} + \frac{\eta}{\alpha} (v_2 - v_1) G \frac{dX}{dx} \right].
\end{aligned}
\tag{3.122}$$

Аналогічне рівняння для першої фази має вигляд

$$\begin{aligned}
-\frac{dP}{dx} \frac{1}{\rho_1 v_1^2} \left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2}\right) &= -\frac{1}{1-X} \frac{dX}{dx} + \frac{1}{1-\alpha} \frac{d\alpha}{dx} - \\
-\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{\rho_1 v_1^2} &\left[\rho_1 g \cos \theta - \frac{F_{12} - F_{w1}}{1-\alpha} + \frac{1-\eta}{1-\alpha} (v_2 - v_1) G \frac{dX}{dx} \right].
\end{aligned}
\tag{3.123}$$

Наведені рівняння нагадують загальні рівняння одновимірного стаціонарного однофазного потоку [4], за винятком членів, пов'язаних із фазовими переходами, а також додаткової степені вільності, пов'язаної зі змінною величиною α . Звідси доходимо висновку, що коефіцієнти при градієнтах тиску в лівих частинах рівнянь (3.122)-(3.123) можуть подаватися вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_2 v_2^2} \left(1 - \frac{v_2^2}{a_2^2}\right) &= \frac{1}{\rho_2 v_2^2} (1 - M_2^2); \\
\frac{1}{\rho_1 v_1^2} \left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2}\right) &= \frac{1}{\rho_1 v_1^2} (1 - M_1^2),
\end{aligned}
\tag{3.124}$$

де $M_1 = \frac{v_1}{a_1}$, $M_2 = \frac{v_2}{a_2}$ - числа Маха для потоків першої і другої фази.

Аналогічно однофазному випадку величини a_1 і a_2 являють собою швидкості розповсюдження малих збурень параметрів, відповідно, у потоках першої і другої фази.

Визначимо явище *запирання* потоку як ситуацію, коли малі збурення параметрів потоку перестають розповсюджуватися вгору по потоку. Причиною запирання є знесення збурень у випадку, коли швидкість потоку перевищує або дорівнює швидкості

розповсюдження збурень. Таким чином, умови запирання потоків окремих компонентів двофазної течії мають вигляд

$$v_1 = a_1, v_2 = a_2.$$

Проте, ці умови не обов'язково відповідають запиранню спільного потоку, що характеризується додатковим параметром α , бо величина α не пов'язана однозначно з локальними умовами у потоці.

Для дослідження умов запирання спільного потоку, виключимо похідну $\frac{d\alpha}{dx}$ з рівнянь (3.122), (3.123). Для цього помножимо рівняння (3.122) на α , рівняння (3.123) на $1 - \alpha$ і додамо результати. Отримаємо:

$$\begin{aligned} & -\frac{dP}{dx} \left[\frac{\alpha}{\rho_2 v_2^2} \left(1 - \frac{v_2^2}{a_2^2} \right) + \frac{1-\alpha}{\rho_1 v_1^2} \left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2} \right) \right] = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \\ & + g \cos \theta \left(\frac{\alpha}{v_2^2} + \frac{1-\alpha}{v_1^2} \right) + F_{12} \left(\frac{1}{\rho_2 v_2^2} - \frac{1}{\rho_1 v_1^2} \right) + \frac{F_{w2}}{\rho_2 v_2^2} + \frac{F_{w1}}{\rho_1 v_1^2} + \\ & + \frac{dX}{dx} \left[\frac{\alpha}{X} - \frac{1-\alpha}{1-X} + G(v_2 - v_1) \left(\frac{1-\eta}{\rho_1 v_1^2} + \frac{\eta}{\rho_2 v_2^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Рівняння (3.125) являє собою рівняння сумісного руху компонентів двофазної течії. Оскільки члени F_{12} і $\frac{dX}{dx}$ не залежать явно від градієнта тиску, то коефіцієнт при $\frac{dP}{dx}$ можна, аналогічно (3.124) інтерпретувати як

$$\frac{\alpha}{\rho_2 v_2^2} \left(1 - \frac{v_2^2}{a_2^2} \right) + \frac{1-\alpha}{\rho_1 v_1^2} \left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2} \right) = 1 - M^2, \quad (3.126)$$

де M – число Маха спільного потоку.

Умовою запирання, так само, як і в однофазному випадку, буде умова рівності числа Маха одиниці. На основі (3.126) ця умова записується у вигляді

$$\frac{\alpha}{\rho_2 v_2^2} \left(1 - \frac{v_2^2}{a_2^2} \right) + \frac{1-\alpha}{\rho_1 v_1^2} \left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2} \right) = 0. \quad (3.127)$$

Умови запирання суттєво змінюються, якщо відбувається закипання рідини. У такому випадку слід ураховувати залежність похідної $\frac{dX}{dx}$ від градієнта тиску $\frac{dP}{dx}$.

У загальному випадку, якщо термодинамічний процес відомий, то величину $\frac{\partial X}{\partial P}$ можна знайти зі співвідношення

$$\frac{dX}{dx} = \frac{\partial X}{\partial P} \frac{dP}{dx}. \quad (3.128)$$

Уводячи в рівняння (3.122), (3.123) подання похідної $\frac{dX}{dx}$ через градієнт тиску $\frac{dP}{dx}$ (3.128) і поєднуючи результати аналогічно попереднім, отримаємо умову запирання двофазного потоку у випадку закипання:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\rho_2 v_2^2} (1 - M_2^2) + \frac{1-\alpha}{\rho_1 v_1^2} (1 - M_1^2) - \frac{\partial X}{\partial P} \left[\frac{\alpha}{X} - \frac{1-\alpha}{1-X} + \right. \\ & \left. + G(v_2 - v_1) \left(\frac{1-\eta}{\rho_1 v_1^2} + \frac{\eta}{\rho_2 v_2^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Умова запирання (3.129) залежить від невідомого в загальному випадку коефіцієнту розподілу міжфазної сили η . Ця залежність відсутня у випадку рівності кінетичних енергій фаз:

$$\rho_1 v_1^2 = \rho_2 v_2^2. \quad (3.130)$$

Зауважимо, що поруч з підходами, оснований на введенні коефіцієнту η і визначенні його з тих або інших міркувань [8],

розповсюджені моделі, в яких разом з двома основними фазами розглядається ще окрема третя фаза, яку утворюють частинки міжфазної поверхні. Останній підхід лежить в основі співвідношення (2.14), яке також може використовуватися для визначення прикладених до фаз сил, обумовлених переносом кількості руху в процесі фазових переходів. У відповідності до (2.14) на i -ту фазу діятиме сила $\Gamma_{ji}v_{ji}$ (v_{ji} – швидкість точок міжфазної поверхні), а на j -ту – рівна за величиною, але протилежна за напрямком сила $-\Gamma_{ji}v_{ji}$.

3.3.4 Рівняння енергії

Загальне рівняння збереження енергії для одновимірного двофазного потоку можна отримати, якщо розглянути баланс енергії в елементарному об'ємі труби, площа перерізу якого A , а довжина Δx . Зміна повної енергії i -ї фази в елементарному об'ємі за

проміжок часу Δt , $d \left[A \alpha_i \rho_i v_i \left(U_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right] \Delta x$, визначається

конвективним припливом енергії через рідкі границі об'єму та роботою сил тиску $\left[A \alpha_i \rho_i v_i \left(h_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right]_x - A \alpha_i \rho_i v_i \left(h_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \Big|_{x+\Delta x} \Delta t$,

тепловим потоком від стінок труби $q_e A \Delta x \Delta t$, потоком енергії внаслідок фазових переходів $q_m A \Delta x \Delta t$, роботою сил тертя $-L_\tau A \Delta x \Delta t$ і роботою масових сил $-A \rho_i v_i g \cos \theta \Delta x \Delta t$:

$$\begin{aligned} d \left[A \alpha_i \rho_i \left(U_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right] \Delta x = \\ = \left[A \alpha_i \rho_i v_i \left(h_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right]_x - A \alpha_i \rho_i v_i \left(h_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \Big|_{x+\Delta x} \Delta t + \\ + (q_e + q_m - L_\tau) A \Delta x \Delta t - A \rho_i v_i g \cos \theta \Delta x \Delta t, \quad i = 1, 2 \text{ (} f, g \text{)}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Поділимо рівняння (3.131) почленно на $\Delta x \Delta t$ і перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. У результаті отримаємо диференціальне рівняння збереження енергії для i -ї фази:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[A \alpha_i \rho_i \left(U_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[A \alpha_i \rho_i v_i \left(h_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right] =$$

$$= (q_e + q_m - L_\tau) A - A \rho_i \alpha_i v_i g \cos \theta, \quad i = 1, 2 \text{ (} f, g \text{)}.$$
(3.132)

Конкретизація членів рівняння (3.132) проводиться за допомогою так званих замикальних співвідношень, які визначають залежності величин q_e, q_m, L_τ від параметрів двофазного потоку.

3.4 Модель потоку дрейфу

3.4.1 Загальні співвідношення

Модель потоку дрейфу являє собою, по суті, модель гетерогенного двофазного потоку, у якій досліджується не абсолютний, а відносний рух фаз. Дана модель часто використовується при побудові замикальних співвідношень у моделях теплогідравліки сучасних кодів, призначених для розрахунків параметрів теплоносія в системах ЯЕУ. Застосування теорії потоку дрейфу є особливо ефективним у випадках, коли відносний рух фаз визначається декількома ключовими параметрами, пов'язаними зі структурою потоку, і не залежить від витрат фаз. Наприклад, у бульбашкових потоках, що рухаються з невеликими швидкостями у вертикальних трубах із перерізом великої площі, відносний рух між бульбашками і рідиною визначається співвідношенням між силами опору і виштовхування, яке залежить від концентрації бульбашок, а не від витрат [8]. Теорія потоку дрейфу широко використовується при дослідженні одновимірних бульбашкових, снарядних і крапельних течій суміші рідини і газу у трубах.

Поняття щільності потоку дрейфу (зведеної швидкості дрейфу) j_{21} було введено в підрозділі 3.1, де відзначено, що зведена швидкість дрейфу – це щільність об'ємної витрати кожної фази

через поверхню, що рухається зі швидкістю суміші j . Указану об'ємну витрату можна виразити через відносну швидкість v_{21} :

$$j_{21} = v_{21}\alpha(1 - \alpha), \quad (3.133)$$

а також – через зведені швидкості (щільності об'ємних витрат) компонентів j_1 і j_2 :

$$j_{21} = (1 - \alpha)j_2 - \alpha j_1. \quad (3.134)$$

Ураховуючи, що $j = j_1 + j_2$, з рівняння (3.134) можна виразити зведені швидкості компонентів j_1 і j_2 через зведену швидкість дрейфу j_{21} і швидкість суміші j :

$$j_1 = (1 - \alpha)j - \alpha j_{21}, \quad (3.135)$$

$$j_2 = \alpha j + j_{21}.$$

Відповідно до (3.135) зведена швидкість фази (j_1 або j_2) дорівнює сумі добутку об'ємного вмісту фази на швидкість суміші, середню за об'ємом, та зведеної швидкості дрейфу ($j_{21} = -j_{12}$). За допомогою цих співвідношень значення параметрів, які характеризують гетерогенний потік, можна виразити через їх значення для гомогенного потоку за рахунок введення поправки на відносний рух. Наприклад, для об'ємного вмісту пари (газу) з рівняння (3.134) будемо мати

$$\alpha = \frac{j_2}{j} \left(1 - \frac{j_{21}}{j_2} \right), \quad (3.136)$$

а для середньої густини суміші ρ_m

$$\rho_m = \frac{j_1 \rho_1 + j_2 \rho_2}{j} + (\rho_1 - \rho_2) \frac{j_{21}}{j}. \quad (3.137)$$

Якщо в (3.136) і (3.137) покласти $j_{21} = 0$, отримаємо значення параметрів для гомогенного потоку.

3.4.2 Режим течії без тертя на стінках з домінуючим впливом сили тяжіння

Теорія потоку дрейфа особливо зручна при аналізі течій, у яких масові сили врівноважуються градієнтом тиску і силою взаємодії

між фазами (квазістатичний рух). За таких умов рівняння руху вертикального потоку набувають вигляду:

$$0 = -\frac{dP}{dx} - g\rho_1 + \frac{F_{12}}{1-\alpha}, \quad (3.138)$$

$$0 = -\frac{dP}{dx} - g\rho_2 - \frac{F_{12}}{\alpha}.$$

Віднімаючи від другого рівняння (3.138) перше, отримаємо

$$F_{12} = \alpha(1-\alpha)g(\rho_1 - \rho_2). \quad (3.139)$$

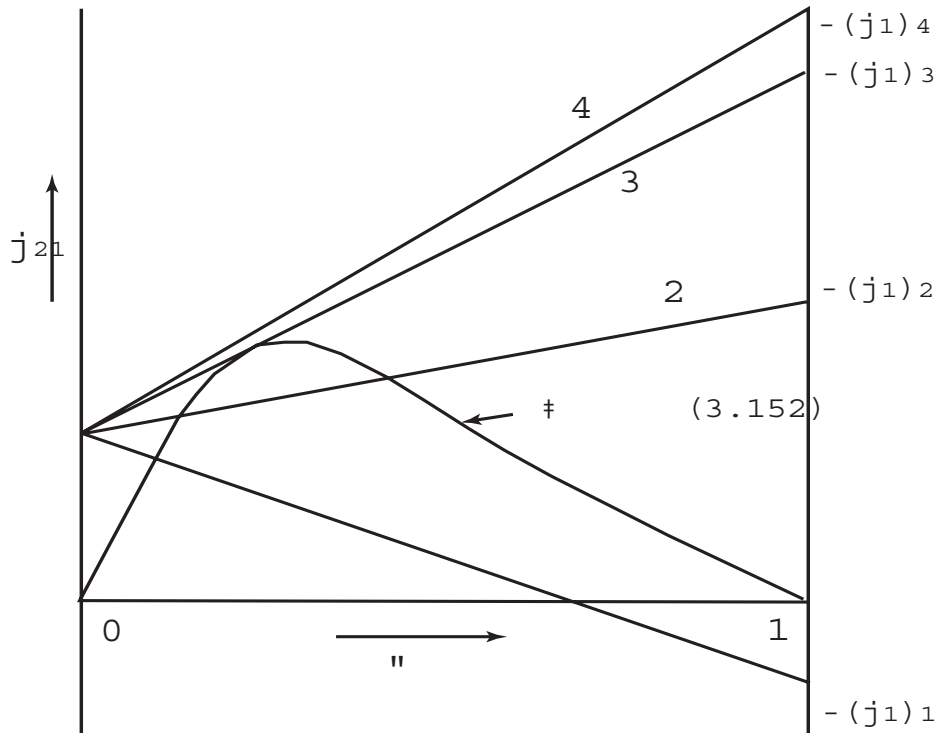


Рис. 3.1. Графічне розв'язання системи рівнянь (3.134), (3.140)
1 – однонаправлений рух компонентів; 2. – протитечія;

3. – захлинання потоку; 4. – відсутність розв'язку.

Із загальної теорії двофазних потоків (розд. 2) випливає, що у випадку відсутності впливу стінки сила взаємного опору F_{12} , що припадає на одиницю об'єму потоку, є функцією властивостей компонентів, структури потоку, об'ємного вмісту пари (газу) і відносної швидкості. Отже, для системи, рух якої описується рівняннями (3.138), сила F_{12} є функцією лише α і j_{21} . Таким чином, ураховуючи співвідношення (3.139), легко побачити, що j_{21} залежить тільки від α і властивостей системи, а отже можемо записати

$$j_{21} = j_{21}(\alpha, \vec{\omega}), \quad (3.140)$$

де $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ - вектор параметрів, що характеризують систему.

Природно, що $j_{21} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ і $\alpha \rightarrow 1$. Застосовуючи рівняння (3.140) до даної системи, можна на основі експериментальних даних побудувати залежність j_{21} від α (крива 1 на рис.3.1). Якщо така залежність відома, то можна дуже просто знайти об'ємний вміст пари (газу) в гетерогенному потоці, знаючи лише об'ємні витрати фаз Q_1 і Q_2 , які досить легко виміряти. Дійсно, за відомими значеннями об'ємних витрат, використовуючи формули (3.13), знайдемо зведені швидкості фаз j_1 і j_2 , що дозволить, на основі (3.134), отримати лінійну залежність між j_{21} і α . На рис.3.1 рівнянню (3.134) відповідають прямі лінії, які з'єднують точки $\alpha = 0, j_{21} = j_2$ і $\alpha = 1, j_{21} = -j_1$. Точки перетину прямих з кривою, що відповідає рівнянню (3.140), визначають значення α , що можуть реалізовуватися у потоці.

Такий графічний метод розв'язання рівнянь (3.134) і (3.140) є дуже зручним для оцінки впливу витрат Q_1 і Q_2 , оскільки поведінка фаз у потоках з однаковим і різним напрямком руху фаз визначається за рахунок простого переміщення прямої лінії.

Рисунок 3.1 відповідає частинному випадку одновимірного двофазного потоку, який складається з малих бульбашок, що

знаходяться в рідині, яка рухається у вертикальній трубі. Для такого потоку, за умови руху фаз в одному напрямку, розв'язок існує завжди. Для умов протитечії у випадку, коли газ рухається донизу, розв'язок не існує. Для протитечії у випадку, коли газ рухається вгору, залежно від значень витрат, можливі або два розв'язки, або один, або жодного.

Граничний стан двофазного потоку, що рухається в режимі протитечії з рухом газу вертикально вгору називається **захлинанням потоку**. При фіксованому значенні зведеної швидкості газоподібної фази j_2 захлинанню відповідає значення зведеної швидкості рідкої фази j_1 , при якому пряма, що визначається рівнянням (3.134), дотикається до кривої, що відповідає рівнянню (3.140). Якщо за таких умов збільшити витрату рідкої фази, то система рівнянь (3.134) і (3.140) не матиме розв'язку. Це означає, що при перевищенні тих значень витрат, якими визначається захлинання, відбувається зміна структури двофазного потоку, тобто змінюються властивості системи (режим потоку, напрямки руху фаз), які входять до рівняння (3.140).

Відмітимо, що для більшості дисперсних потоків залежність $j_{21}(\alpha)$ (3.152) можна апроксимувати функцією вигляду:

$$\frac{j_{21}}{v_{\infty}} = \alpha(1 - \alpha)^n, \quad (3.141)$$

де v_{∞} - гранична швидкість підйому поодинокі бульбашки в нескінченному об'ємі рідини.

3.4.3 Урахування неодновимірності течії

Спрощена теорія одновимірної течії не враховує змін концентрації і швидкості по перерізу труби. Величини α , v_1 і v_2 , j_1 і j_2 є середніми за перерізом. Рівняння руху і нерозривності, записані через ці середні значення, у загальному випадку не ідентичні строгому запису цих рівнянь через відповідні інтеграли, взяті за перерізом потоку (наприклад, добуток середніх значень не дорівнює в загальному випадку середньому значенню добутку). Так,

кінетична енергія нестисливої рідини в перерізі труби дорівнює $\frac{1}{2}\rho\int_A v^2 dA = \frac{1}{2}A\rho\langle v^2 \rangle$, однак цей вираз не еквівалентний виразу

$$\frac{1}{2}A\rho\left(\frac{\int_A v dA}{A}\right)^2 = \frac{1}{2}A\rho\langle v \rangle^2. \quad \text{Дужки } \langle \rangle \text{ позначають операцію}$$

осереднення деякої величини X за перерізом труби, що визначається формулою:

$$\langle X \rangle = \frac{\int X dA}{A}. \quad (3.142)$$

Для введення поправок до одновимірної теорії використовують так звані кореляційні коефіцієнти, які являють собою відношення відповідних інтегралів:

$$C = \frac{\langle X_1 \cdot X_2 \rangle}{\langle X_1 \rangle \cdot \langle X_2 \rangle}.$$

Кореляційні коефіцієнти дорівнюють одиниці для абсолютно одновимірної течії і не сильно відрізняються від одиниці в загальному випадку. Серед них найчастіше використовується так званий параметр Зубера-Фіндлея:

$$C_0 = \frac{\langle \alpha \cdot j \rangle}{\langle \alpha \rangle \cdot \langle j \rangle}. \quad (3.143)$$

Параметр C_0 є відношенням середнього значення добутку зведеної швидкості суміші на об'ємний вміст пари (газу) до добутку середніх значень цих величин.

За допомогою параметра Зубера-Фіндлея можна дати зручні визначення для середніх швидкостей фаз. Для другої фази за формулою (3.14) будемо мати

$$\bar{v}_2 = \frac{\langle j_2 \rangle}{\langle \alpha \rangle}. \quad (3.144)$$

Осереднене за перерізом труби значення зведеної швидкості другої фази $\langle j_2 \rangle$ знайдемо, виконуючи осереднення другого рівняння (3.135):

$$\langle j_2 \rangle = \langle \alpha \cdot j \rangle + \langle j_{21} \rangle. \quad (3.145)$$

Підставляючи (3.145) в (3.144), отримаємо вираз для середньої швидкості другої фази:

$$\bar{v}_2 = C_0 \langle j \rangle + \frac{\langle j_{21} \rangle}{\langle \alpha \rangle}. \quad (3.146)$$

Величина $\bar{v}_2$, яка визначається рівнянням (3.146), у загальному випадку не дорівнює $\langle v_2 \rangle$, оскільки осереднена швидкість $\langle v_2 \rangle$ пов'язана з розподілом зведеної швидкості і об'ємної концентрації таким рівнянням:

$$\langle v_2 \rangle = \left\langle \frac{j_2}{\alpha} \right\rangle. \quad (3.147)$$

Для осереднених значень зведених швидкостей справедливі нижченаведені рівняння, записані через об'ємні витрати Q_1 і Q_2 :

$$\langle j \rangle = \frac{Q_1 + Q_2}{A}, \quad (3.148)$$

$$\langle j_2 \rangle = \frac{Q_2}{A}, \quad (3.149)$$

$$\langle j_1 \rangle = \frac{Q_1}{A}. \quad (3.150)$$

Звідси можна зробити висновок, що виміряти величини $\langle j \rangle$, $\langle j_2 \rangle$, $\langle j_1 \rangle$ дуже легко. Також, досить легко вимірюється і величина $\langle \alpha \rangle$. Для її вимірювання миттєво відключають деяку ділянку труби і визначають частину загального об'єму, що зайнята другою фазою. Таким чином, використання введених осереднених величин дозволяє достатньо просто виконувати перевірку теоретичних результатів шляхом зіставлення їх з даними експерименту.

Співвідношення (3.144)–(3.150) можуть використовуватися для визначення осередненої зведеної швидкості потоку дрейфа $\langle j_{21} \rangle$ через виміряне в експерименті значення $\langle \alpha \rangle$. Дійсно, з урахуванням (3.144), (3.145) і (3.148), рівняння (3.146) можна записати у вигляді:

$$\frac{Q_2}{\langle \alpha \rangle A} = C_0 \frac{Q_1 + Q_2}{A} + \frac{\langle j_{21} \rangle}{\langle \alpha \rangle}. \quad (3.151)$$

Звідси отримаємо зв'язок між $\langle \alpha \rangle$ і $\langle j_{21} \rangle$ у вигляді:

$$j_{21} = j_{21}(\alpha, \vec{\omega}) \quad (3.152)$$

4 РІВНЯННЯ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ КОДУ RELAP 5.

У розд. 2 і 3 було розглянуто, відповідно, загальні тривимірні й одновимірні рівняння, що описують рух двофазного теплоносія. У розд. 2 увагу було сконцентровано на тих ефектах, які відрізняють двофазну течію від однофазної, і на способах їх урахування в загальній системі рівнянь. Це обумовило запис рівнянь теплогідрравліки для миттєвих локальних значень параметрів. Метою розд. 3 було дати уявлення про основні методи, якими проводиться теоретичне дослідження властивостей двофазного потоку в межах одновимірної теорії. Звичайно, точність цих методів не є високою, враховуючи суттєві спрощуючі припущення, закладені в основу моделей одновимірного потоку. Крім того, на точність модельного опису суттєвий вплив здійснює і засіб осереднення параметрів потоку.

У даному розділі розглядатимуться рівняння теплогідрравліки, що використовуються найбільш відомим та застосовуваним на Україні кодом поліпшеної оцінки RELAP 5, призначеним для аналізу теплогідрравлічних процесів у системах ЯЕУ. Базова модель коду RELAP 5 використовує одновимірне наближення, проте, набагато точніше за розглянуте вище в розд. 3. Починаючи з версії RELAP 5 3D у коді передбачена можливість використання і тривимірних рівнянь, записаних у прямокутній декартовій та циліндричній системах координат.

У даному розділі увагу зосереджено на одновимірних рівняннях теплогідрравліки, тому він є природним продовженням розд. 3. Тривимірні рівняння теплогідрравліки розглянуті у розд. 7. У той же час, розгляд загальних засобів осереднення теплогідрравлічних параметрів і рівнянь проводиться для тривимірного випадку. Результати застосування вказаних методів осереднення обговорюються вже для одновимірного наближення базової моделі коду RELAP 5. Такий розподіл матеріалу відповідає прийнятому в описі теплогідрравлічної моделі коду RELAP 5 [10].

4.1 Осереднення в просторі й часі

Розглянуті в розд. 2 рівняння теплогідравліки двофазного теплоносія (2.21) записано для локальних миттєвих значень теплогідравлічних параметрів. Тому побудова системи замикальних співвідношень для системи (2.21) являє собою дуже складне завдання, оскільки в (2.21) входить багато величин, що мають статистичну природу, таких як: форма й розташування включень, параметри міжфазної взаємодії тощо. Для того, щоб отримати вирази, які дозволяють більш конкретно представити структуру і способи теоретичного та експериментального опису таких невідомих величин, рівняння теплогідравліки осереднюють у просторі та часі.

Розглянемо методи введення осереднених значень теплогідравлічних параметрів на прикладі нестационарної течії двофазного теплоносія у трубі змінного перерізу. Осереднене за часом значення $\bar{f}$ деякої теплогідравлічної величини f визначається за допомогою такого виразу [2]:

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0} f dt, \quad (4.1)$$

де τ_0 – інтервал часу, досить великий порівняно з характерним часом флуктуацій параметрів потоку, але досить малий порівняно з характерним часом зміни осереднених параметрів нестационарного потоку.

За допомогою (4.1) введемо осереднену за часом частку $\bar{A}_k$ загальної площі поперечного перерізу A труби, зайняту фазою k :

$$\bar{A}_k = \bar{\alpha}_k A \quad (4.2)$$

де $\bar{\alpha}_k$ – осереднений за часом істинний об'ємний вміст фази k .

Осереднення параметрів фази k за перерізом труби проводиться за співвідношенням:

$$\langle f_k \rangle = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} f_k dA = \frac{1}{A \bar{\alpha}_k} \int f_k \alpha_k dA. \quad (4.3)$$

Цілком аналогічно можна ввести й операцію осереднення теплогідрравлічних величин за виділеним об'ємом труби $\Delta V = A\Delta x$, де x - аксіальна координата.

Також вводиться об'єднана операція осереднення у просторі й часі. При просторовому осередненні за об'ємом значення осередненої в просторі й часі теплогідрравлічної величини, що відноситься до фази k , визначається як

$$\overline{\langle f_k \rangle_{\Delta V_k}} = \langle \bar{f}_k \rangle_{\Delta V_k} = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0} \left\{ \frac{1}{\Delta V_k} \int_{\Delta V_k} f_k dV \right\} dt = \frac{1}{\Delta V_k} \int_{\Delta V_k} \left\{ \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0} f_k dt \right\} dV.$$

(4.4)

При осередненні за перерізом труби

$$\overline{\langle f_k \rangle_{A_k}} = \langle \bar{f}_k \rangle_{A_k} = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0} \left\{ \frac{1}{A_k} \int_{A_k} f_k dA \right\} dt = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} \left\{ \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0} f_k dt \right\} dA. \quad (4.5)$$

Відносно об'ємів та перерізів, за якими проводиться осереднення, припускається, що вони значно більші за характерні розміри включень: $V \gg a^3$, де a може бути, наприклад, діаметром бульбашки, але значно менші від характерних макрооб'ємів: $V \ll L^3$, де L – характерний лінійний розмір течії (наприклад, діаметр труби). З (4.4)-(4.5) випливає, що операції осереднення по часу та простору є комутативними. Більше того, виявляється [5], що за деяких умов відносно операторів осереднення, які виконуються на практиці, осереднення за об'ємом та перерізом дає однакові числові значення:

$$\langle f_k \rangle_{V_k} = \langle f_k \rangle_{A_k} \quad (4.6)$$

Співвідношення (4.6), певною мірою, є критерієм правильності розрахунку осереднених величин, оскільки з (4.6) випливає, що у випадку, коли в деякій точці значення теплогідрравлічної величини, осереднене за об'ємом, не збігається зі значенням тієї ж величини, осередненим за перерізом, величину об'єму або перерізу, за яким проводилося осереднення, обрано невірно.

4.2 Осереднення рівнянь теплогідравліки.

Розглянемо коротко методику виводу осереднених рівнянь, які є наслідками застосування законів збереження та зупинимося на їх вигляді у коді RELAP5.

Розглянемо елементарний об'єм dV , фіксований у просторі, зайнятий двофазною рідиною, що рухається, та обмежений поверхнею dA (рис.4.1).

$$dV = dV_1 + dV_2 + dV_\Sigma; dA = dA_1 + dA_2 + dA_\Sigma. \quad (4.7)$$

де dV_1 – об'єм, зайнятий першою фазою, dV_2 – об'єм, зайнятий другою фазою, а dV_Σ – поверхнева міжфазна зона, товщиною порядку радіуса міжмолекулярної взаємодії $\delta \sim 10^{-9}$ м.

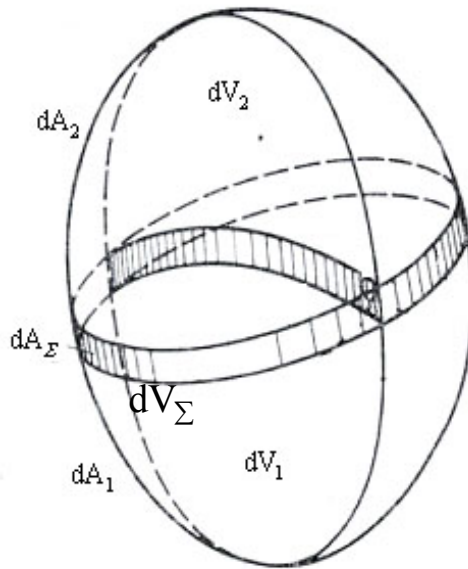


Рис. 4.1. Елементарний об'єм двофазної суміші

У міжфазній зоні молекули взаємодіють не лише з молекулами своєї фази, але і з прилеглим шаром іншої фази. Унаслідок сусідства молекул обох фаз інтенсивність сил взаємодії може значно

перевищувати у dV_{Σ} інтенсивність сил взаємодії всередині фаз [5], через що, незважаючи на малість товщини міжфазного шару, внесок сил взаємодії у dV_{Σ} можна порівняти із внеском внутрішніх сил взаємодії у dV_1 та dV_2 . Тому припускають, що середовище всередині dV_{Σ} знаходиться в стані умовної третьої фази, яка має назву Σ - фази. Масою, кількістю руху та енергією Σ - фази можна знехтувати. Вплив Σ - фази виявляється в додаткових джерелах маси, кількості руху та енергії, що виникають унаслідок міжфазної взаємодії.

Виведення осереднених рівнянь теплогідроліки проводиться згідно з такими кроками.

1. На основі системи (2.21) записуються рівняння збереження маси, кількості руху та енергії для миттєвих локальних значень теплогідролічних параметрів для 1-ої, 2-ої фази та Σ - фази.
2. Миттєві локальні величини замінюються сумою осереднених і пульсаційних величин:

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \varphi', \quad (4.8)$$

де $\tilde{\varphi}$ – миттєва локальна величина, φ – осереднена величина, φ' – пульсація. Виходячи з комутативності операторів осереднення у просторі та часі, засіб початкового осереднення не має значення.

3. Отримані після підстановки (4.8) рівняння осереднюються в просторі й часі, використовуючи (4.4) або (4.5).

За рахунок перерахованих операцій можна отримати систему рівнянь, що виражають умови збереження маси, кількості руху та енергії, записані для осереднених теплогідролічних параметрів. Умови збереження для першої та другої фази подаються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Умови збереження для Σ -фази, виходячи з принципу ненакопичування маси, кількості руху та енергії в Σ -фазі, виражаються алгебраїчними рівняннями, які слід розглядати як умови спряження розв'язків рівнянь збереження для першої та другої фази, записані на міжфазній поверхні [5].

Ураховуючи надзвичайно високу складність рівнянь теплогідроліки, при їх дослідженні, як правило, використовуються

додаткові спрощуючі гіпотези. Основними гіпотезами, які вводяться при побудові системи рівнянь теплогідравліки для течії теплоносія в системах ЯЕУ є такі [2,10]:

1. Коефіцієнти кореляції можуть бути прийнятими рівними одиниці, отже осереднений добуток величин вважатиметься рівним добутку осереднених величин.
2. Переносом маси, енергії та кількості руху за рахунок пульсацій можна знехтувати, отже, у рівняннях можна опустити члени, аналогічні напруженням Рейнольдса в рівняннях турбулентного руху і, таким чином, значно спростити проблему замикання.

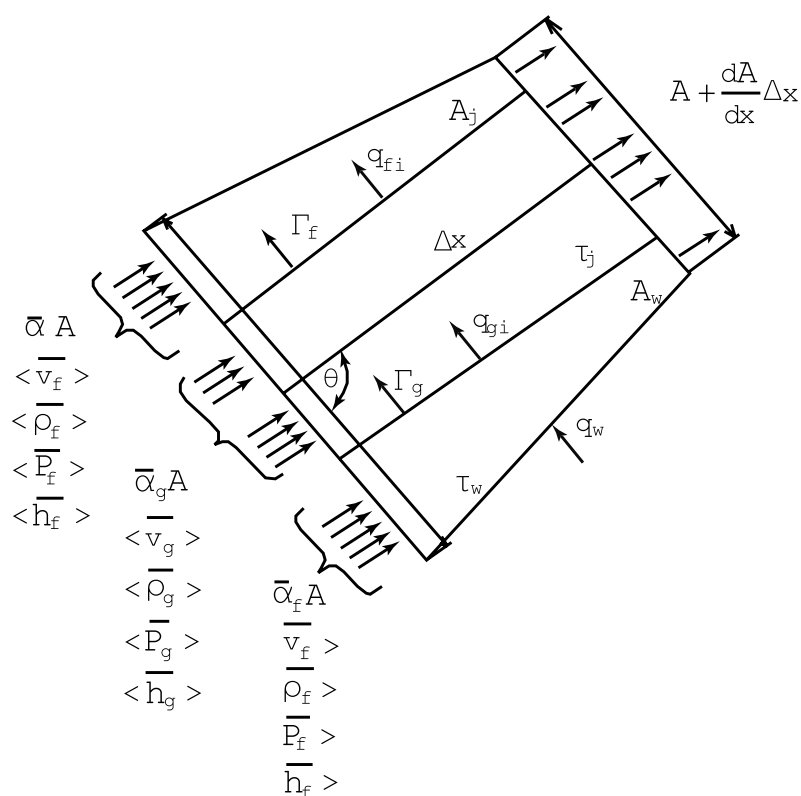
4.3 Система рівнянь теплогідравліки двофазного теплоносія коду RELAP 5.

Базовою моделлю, що використовується кодом RELAP 5 для опису теплогідравлічних процесів у системах ЯЕУ є модель одновимірної нестационарної течії двофазного багатокомпонентного теплоносія у трубі змінного перерізу. Дана модель є, таким чином, частинним випадком загальної тривимірної моделі, розглянутої в розд. 2, локальні миттєві рівняння якої мали вигляд (2.21). Базова система рівнянь теплогідравліки коду RELAP 5 складається із семи осереднених в просторі й часі диференціальних рівнянь збереження: двох рівнянь збереження маси (для рідкої і газоподібної фази), двох рівнянь збереження кількості руху, двох рівнянь збереження енергії і рівняння збереження маси газів, що не конденсуються. Урахування можливої присутності газів, що не конденсуються, у складі газоподібної фази обумовлює багатокомпонентність моделі. До диференціальних рівнянь збереження додаються умови спряження, записані на міжфазній поверхні (у Σ -фазі).

Отримати систему рівнянь теплогідравліки коду RELAP 5 можна користуючись набагато простішим, порівняно з викладеним у підрозд.4.2., підходом, що базується на гіпотезах 1, 2, підрозд.4.2 і використовувався раніше при побудові спрощених рівнянь теплогідравліки одновимірного потоку, розглянутих у розд. 3.

Розглянемо одновимірний двофазний потік теплоносія в трубі, до стінок якої підводиться тепловий потік $\bar{q}_w$ (рис.4.2). Вісь труби

Рис.4.2. Контрольний об'єм в одновимірному двофазному потоці.



На основі гіпотез 1, 2 підрозд.4.2 можемо записати умови збереження як умови балансу теплогідрравлічних ефектів, що відповідають за зміну маси, кількості руху та енергії і виражаються лише через осереднені теплогідрравлічні величини [3]. Інакше кажучи, рівняння збереження можна отримати з умов збереження в контрольному об'ємі ΔV осереднених у просторі й часі маси, кількості руху та енергії кожної з фаз, ураховуючи теплові потоки через тверді стінки, теплові та динамічні потоки через рідкі границі об'єму та міжфазні взаємодії на поверхні розділу фаз A_i (рис.4.2).

4.3.1 Рівняння збереження маси

Зміна маси фази k в об'ємі ΔV за проміжок часу Δt , $d(\alpha_k \rho_k) A \Delta x$ (знаки осереднення опущені), дорівнює сумі конвективного потоку маси фази через рідкі границі об'єму, $-d(\alpha_k \rho_k v_k A) \Delta t = (\alpha_k \rho_k v_k A)|_x \Delta t - (\alpha_k \rho_k v_k A)|_{x+\Delta x} \Delta t$ та зміни маси за рахунок фазового переходу $\Gamma_k A \Delta x \Delta t$:

$$d(\alpha_k \rho_k) A \Delta x = (\alpha_k \rho_k v_k A)|_x \Delta t - (\alpha_k \rho_k v_k A)|_{x+\Delta x} \Delta t + \Gamma_k A \Delta x \Delta t, \quad (4.9)$$

звідки, виконуючи почленне ділення на $\Delta x \Delta t$ і переходячи до границі матимемо

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) \Delta x = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_k \rho_k v_k A) + \Gamma_k, \quad k = g, f \quad (4.10)$$

Індекс “g” в рівнянні (4.10) відповідає газоподібній фазі, індекс “f” – рідкій фазі.. Величина Γ_g характеризує інтенсивність притоку маси до газоподібної фази внаслідок переходу *рідина-газ*, а Γ_f - до рідкої фази внаслідок переходу *газ-рідина*. У рівняннях (4.9)-(4.10) ρ_k - істинні густини фаз. Умова збереження маси для Σ -фази (умова збереження маси при фазових переходах) має вигляд

$$\Gamma_g = -\Gamma_f. \quad (4.11)$$

4.3.2 Рівняння збереження кількості руху (рівняння руху)

Зміна кількості руху фази k в об'ємі ΔV обумовлена конвективним переносом кількості руху через рідкі границі об'єму,

дією зовнішніх поверхневих та масових сил, а також - обміном кількістю руху між фазами у процесі фазових переходів. Виходячи з балансового співвідношення, аналогічного (4.9), отримаємо наступне рівняння збереження кількості руху фази k :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k v_k A) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k v_k^2 A) = -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} A + \alpha_k \rho_k B_x A - \tau_{kw} \Pi_{kw} + R_k A + \Gamma_k A(v_{kl} - v_k); \quad k = g, f \quad (4.12)$$

де $\alpha_k \rho_k v_k A$ - питома кількість руху фази k ; $\alpha_k \rho_k v_k^2 A$ - питомий потік кількості руху фази k ; $-\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} A$ - питома дія поверхневих сил тиску; $\alpha_k \rho_k B_x A$ - питома дія масових сил, пов'язаних з неоднорідністю поля густини; $\tau_{kw} \Pi_{kw}$ - питома дія сил тертя на стінці, Π_{kw} - периметр перерізу труби, що змочений фазою k ; $R_k A$ - питома міжфазна сила; $\Gamma_k A(v_{kl} - v_k)$ - питомий приплив кількості руху до фази k внаслідок фазових переходів, v_{kl} - швидкість елемента маси фази k , що зазнав фазового переходу і знаходиться в Σ -фазі.

Рівняння (4.12) є загальним рівнянням збереження кількості руху фази k , справедливим для одновимірного нестационарного двофазного потоку у трубі змінного перерізу за умов малості сил внутрішнього тертя у фазах, як в'язкого так і турбулентного. Математична модель теплогідравліки коду RELAP 5 використовує спрощене рівняння (4.12). У RELAP 5 прийнято модель рівних тисків, тобто вважається, що $P_g = P_f = P_\Sigma = P$. Крім того, при міжфазній взаємодії, що описується силою R_k , ураховується лише дія сил тиску і внутрішнього тертя, а також – сила, пов'язана з ефектом приєднаних мас.

Приймаючи вказані припущення і віднімаючи від рівняння (4.12) рівняння (4.10), почленно помножене на v_k , будемо мати рівняння збереження кількості руху для фаз

$$\begin{aligned}
& \alpha_g \rho_g A \frac{\partial v_g}{\partial t} + \frac{1}{2} \alpha_g \rho_g A \frac{\partial v_g^2}{\partial x} = -\alpha_g A \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha_g \rho_g B_x A - \\
& -(\alpha_g \rho_g A) FWG(v_g) + \Gamma_g A(v_{gl} - v_g) - (\alpha_g \rho_g A) FIG(v_g - v_f) \\
& - C \alpha_g \alpha_f \rho_m A \left[\frac{\partial(v_g - v_f)}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_g}{\partial x} - v_g \frac{\partial v_f}{\partial x} \right], \\
& \alpha_f \rho_f A \frac{\partial v_f}{\partial t} + \frac{1}{2} \alpha_f \rho_f A \frac{\partial v_f^2}{\partial x} = -\alpha_f A \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha_f \rho_f B_x A - \\
& -(\alpha_f \rho_f A) FWF(v_f) - \Gamma_g A(v_{fl} - v_f) - (\alpha_f \rho_f A) FIF(v_f - v_g) \\
& - C \alpha_g \alpha_f \rho_m A \left[\frac{\partial(v_f - v_g)}{\partial t} + v_g \frac{\partial v_f}{\partial x} - v_f \frac{\partial v_g}{\partial x} \right],
\end{aligned} \tag{4.13}$$

де FWG , FWF – коефіцієнти тертя на стінці, $[1/c]$; FIG , FIF – коефіцієнти міжфазного (інтерфейсного) тертя на границі рідина-газ, $[1/c]$; ρ_m – густина суміші. Таким чином, треті члени у правих частинах (4.13) відповідають за міжфазне тертя, п'яті – за тертя на стінці, а останні – за ефект приєднаних мас.

Умова збереження кількості руху для Σ -фази, виходячи з принципу ненакопичування маси та енергії, зводиться до рівності нулю суми членів рівнянь (4.13), які характеризують міжфазний обмін кількістю руху і включають члени, що відповідають за міжфазну силову взаємодію та перенос кількості руху унаслідок фазових переходів:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_g A v_{gl} - (\alpha_g \rho_g A) FIG(v_g - v_f) - C \alpha_g \alpha_f \rho_m A \left[\frac{\partial(v_g - v_f)}{\partial t} \right] - \\
& - \Gamma_g A v_{fl} - (\alpha_f \rho_f A) FIF(v_f - v_g) - C \alpha_g \alpha_f \rho_m A \left[\frac{\partial(v_f - v_g)}{\partial t} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Скорочуючи третій та шостий доданки та припускаючи, що сумарні обміни кількістю руху внаслідок міжфазного тертя і фазових переходів незалежно дорівнюють нулеві, будемо мати:

$$\alpha_g \rho_g FIG = \alpha_f \rho_f FIF = \alpha_g \alpha_f \rho_g \rho_f FI, \quad (4.15)$$

$$v_{gl} = v_{fl} = v_l.$$

4.3.3 Рівняння збереження енергії.

Зміна повної енергії фази k в об'ємі ΔV визначається конвективним переносом енергії через рідкі границі об'єму, обміном енергією між фазами, припливом тепла через границі об'єму внаслідок теплопровідності, роботою зовнішніх поверхневих і масових сил. Математична модель теплогідроліки коду RELAP 5 використовує рівняння зміни внутрішньої енергії фаз, які, як було зазначено в розд. 2, еквівалентні рівнянням збереження повної енергії. Виходячи з балансових співвідношень, аналогічних (4.9), можна отримати рівняння зміни внутрішньої енергії для фаз

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g U_g) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U_g v_g A) = & -P \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} - \frac{P}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g v_g A) + \\ & + Q_{wg} + Q_{ig} + \Gamma_{ig} h_g^* + \Gamma_w h'_g + DISS_g, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f U_f) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f \rho_f U_f v_f A) = & -P \frac{\partial \alpha_f}{\partial t} - \frac{P}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f v_f A) + \\ & + Q_{wf} + Q_{if} - \Gamma_{ig} h_f^* - \Gamma_w h'_f + DISS_f. \end{aligned}$$

де $h_k = U_k + \frac{P}{\rho_k}$ - питома ентальпія фази k , $DISS_g, DISS_f$ - дисипативні функції, що утримують всі члени (2.21), пов'язані з потужністю сил в'язкого і міжфазного тертя та нерівноважністю обміну імпульсом; Q_{wk} - потік тепла від стінки до фази k , Q_{ik} - тепловий потік до фази k через міжфазну поверхню (Σ -фазу), Γ_{ig} - питома швидкість утворення газоподібної фази в ядрі потоку; Γ_w - питома швидкість утворення газоподібної фази в області поблизу стінки.

Величини h_k^* є ентальпіями фаз в ядрі потоку, отже члени $\Gamma_{ig} h_g^*, -\Gamma_{ig} h_f^*$ визначають передачу внутрішньої енергії у процесі фазових переходів у ядрі потоку; h_k' -ентальпії фаз в області поблизу стінки, таким чином члени $\Gamma_w h_g', -\Gamma_w h_f'$ визначають передачу внутрішньої енергії фаз у процесі фазових переходів в області поблизу стінки, тобто під час кипіння або конденсації на стінці. Визначення ентальпій фаз в ядрі потоку і в області поблизу стінки описано в наступному підрозділі.

4.3.4 Модель міжфазного масообміну коду RELAP5

Модель міжфазного масообміну базується на умовах збереження енергії для Σ -фази і визначає інтенсивності масообміну Γ_{ig}, Γ_w в процесі фазових переходів під час кипіння рідкої та конденсації газоподібної фази.

Ефекти, які мають найбільш вагоме значення у процесах міжфазного тепломасообміну, принципово відрізняються для процесів в області поблизу стінки і для процесів у ядрі потоку. Цей факт обумовив введення в теорію тепломасообміну понять теплового та дифузійного примежових шарів і поділу області течії на ядро потоку і примежовий шар (область поблизу стінки). Указана ідея лежить і в основі моделі міжфазного масообміну коду RELAP 5. Загальна швидкість утворення пари в одиниці об'єму Γ_g поділяється на дві складові: швидкість утворення пари в ядрі потоку Γ_{ig} і швидкість утворення пари в області поблизу стінки Γ_w , отже:

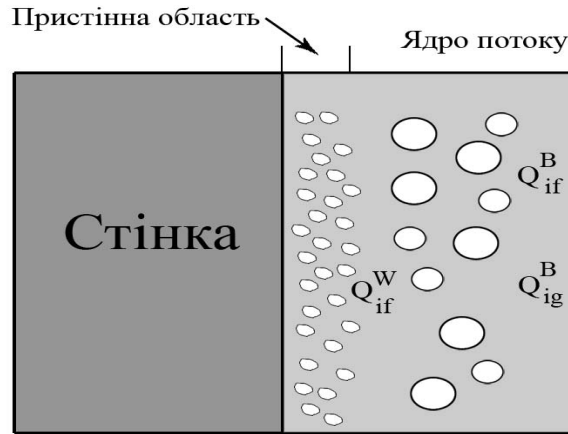


Рис.4.3 Поділ області течії на ядро потоку і область поблизу стінки

$$\Gamma_g = \Gamma_{ig} + \Gamma_w. \quad (4.17)$$

В основі визначення питомих інтенсивностей масообміну лежить умова збереження енергії для Σ -фази, яка, виходячи з принципу ненакопичування енергії у Σ -фазі, зводиться до рівності нулю суми членів рівнянь енергії (4.16), що відповідають за обмін енергією між фазами:

$$Q_{ig} + Q_{if} + \Gamma_{ig} (h_g^* - h_f^*) + \Gamma_w (h_g' - h_f') = 0. \quad (4.18)$$

Аналогічно (4.17), тепловий потік через міжфазну поверхню $Q_{ik}, k = g, f$ також розбивається на дві частини:

$$Q_{ik} = Q_{ik}^B + Q_{ik}^w; k = g, f. \quad (4.19)$$

де Q_{ik}^B - тепловий потік до фази k через міжфазну поверхню у ядрі потоку; Q_{ik}^w - в області поблизу стінки.

Міжфазний теплообмін у ядрі потоку відбувається через Σ -фазу, яка, згідно з моделлю коду RELAP 5, у випадку відсутності газів, що не конденсуються, має температуру, що дорівнює температурі насичення T^s при повному тиску P . Отже:

$$Q_{ik}^B = H_{ik} (T^s - T_k); k = g, f. \quad (4.20)$$

де T_k – температура рідкої ($k = f$) або газоподібної ($k = g$) фази;
 H_{ik} – відповідний коефіцієнт міжфазного теплообміну в ядрі потоку.

У моделі міжфазного масообміну коду RELAP 5 припускається, хоча це й не впливає з основних принципів збереження, що сумарні міжфазні енергообміни в ядрі потоку та області поблизу стінки незалежно дорівнюють нулеві:

$$\begin{cases} H_{ig}(T^s - T_g) + H_{if}(T^s - T_f) + \Gamma_{ig}(h_g^* - h_f^*) = 0, \\ Q_{ig}^w + Q_{if}^w + \Gamma_w(h_g' - h_f') = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Крім того, припущення про утворення пари при температурі насичення призводить до виконання рівності $Q_{ig}^w = 0$ при кипінні в області поблизу стінки (температури газоподібної фази та Σ -фази однакові, отже тепло до газоподібної фази не передається) та $Q_{if}^w = 0$ при конденсації у пристінній області, звідки:

$$\begin{aligned} \Gamma_w &= -\frac{Q_{if}^w}{h_g' - h_f'} \text{ (кипіння)}, \\ \Gamma_w &= -\frac{Q_{ig}^w}{h_g' - h_f'} \text{ (конденсація)}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

Рівняння (4.22), розв'язані відносно Q_{if}^w та Q_{ig}^w , після підстановки у (4.19) з врахуванням (4.20) дають вирази для Q_{ig} та Q_{if} – сумарних міжфазних теплових потоків. З (4.21) можна знайти вираз для інтенсивності міжфазного масообміну в ядрі:

$$\Gamma_{ig} = -\frac{H_{ig}(T^s - T_g) + H_{if}(T^s - T_f)}{h_g^* - h_f^*}. \quad (4.23)$$

Остаточний вираз для інтенсивності міжфазного масообміну Γ_g , таким чином, має вигляд

$$\Gamma_g = -\frac{H_{ig}(T^s - T_g) + H_{if}(T^s - T_f)}{h_g^* - h_f^*} + \Gamma_w. \quad (4.24)$$

Припущення про утворення фази у стані насичення дозволяє побудувати такі вирази для ентальпій $h_k^*, h_k', k = g, f$:

$$h_g^* = \frac{1}{2}[(h_g^s + h_g) + \eta(h_g^s - h_g)],$$

$$h_f^* = \frac{1}{2}[(h_f^s + h_f) - \eta(h_f^s - h_f)], \quad (4.25)$$

$$\eta = \begin{cases} 1, \Gamma_{ig} \geq 0, \\ -1, \Gamma_{ig} < 0. \end{cases}$$

$$h_g' = \frac{1}{2}[(h_g^s + h_g) + \varepsilon(h_g^s - h_g)],$$

$$h_f' = \frac{1}{2}[(h_f^s + h_f) - \varepsilon(h_f^s - h_f)], \quad (4.26)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, \Gamma_w \geq 0, \\ -1, \Gamma_w < 0. \end{cases}$$

Індексом s помічено параметри насичення.

4.3.5 Потужності дисипації кінетичної енергії

Дисипативні члени $DISS_g$ та $DISS_f$ представляють питому потужність дисипації кінетичної енергії. Ці члени включають лише потужність дисипації за рахунок тертя на стінці, дисипативними ефектами внаслідок міжфазного масообміну, міжфазного тертя та ефекту приєднаних мас в моделі коду RELAP 5 нехтують. Вирази для дисипативних членів мають вигляд

$$DISS_g = \alpha_g \rho_g FWGv_g^2, \quad DISS_f = \alpha_f \rho_f FWFv_f^2. \quad (4.27)$$

4.3.6 Гази, що не конденсуються у газоподібній фазі.

Основна модель двофазного однокомпонентного потоку, розглянута раніше, може бути розширена з метою включення до

складу газоподібної фази компонента, що не конденсується. До складу компонента, що не конденсується, можуть входити декілька газів. Його включення відбувається на основі гомогенної моделі для газоподібної фази, отже припускається, що компонент, який не конденсується, рухається з тією ж швидкістю і має ту ж температуру, що і пара, тобто

$$v_n = v_g, T_n = T_g, \quad (4.28)$$

де індекс n позначає компонент, що не конденсується.

Відносно рідини суміш пара – газів, що не конденсуються, як і раніше задовольняє негомогенним та нерівноважним умовам. Отже, рівняння для газоподібної фази, наведені вище, справедливі для суміші пари та газів, що не конденсуються.

Розглянемо рівняння для визначення масового вмісту компонентів, що утворюють газоподібну фазу. За означенням масовий вміст газів, що не конденсуються, дається виразом

$$X_n = \frac{\alpha_{n1}\rho_{n1} + \alpha_{n2}\rho_{n2} + \dots + \alpha_{nN}\rho_{nN}}{\alpha_{n1}\rho_{n1} + \alpha_{n2}\rho_{n2} + \dots + \alpha_{nN}\rho_{nN} + \alpha_s\rho_s} \quad (4.29)$$

де параметри α_{ni}, ρ_{ni} відносяться до i -ого газу, що не конденсується (i -ої складової суміші), α_s, ρ_s - параметри парової складової, N – кількість газів, що не конденсуються.

Рівняння збереження маси газів, що не конденсуються, можна отримати аналогічно рівнянню збереження маси газоподібної фази (4.10). Воно має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g X_n) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g X_n v_g A) = 0. \quad (4.30)$$

Концентрацію кожної окремої складової компонента, що не конденсується, характеризує масовий вміст X_{ni} , який за означенням вводиться як

$$X_{ni} = \frac{\alpha_{ni}\rho_{ni}}{\alpha_{n1}\rho_{n1} + \alpha_{n2}\rho_{n2} + \dots + \alpha_{nN}\rho_{nN}}. \quad (4.31)$$

Рівняння збереження маси i -ї складової має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g X_n X_{ni}) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g X_n X_{ni} v_g A) = 0. \quad (4.32)$$

Наявність газів, що не конденсуються, потребує відповідної зміни рівнянь енергії (4.16), до яких треба включити тепловий потік від компонента, що не конденсується до рідкої фази Q_{gf} , що передається без участі Σ -фази. Рівняння енергії набудуть вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g U_g) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U_g v_g A) = \\ & -P \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} - \frac{P}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g v_g A) + \\ & + Q_{wg} + Q_{ig} + \Gamma_{ig} h_g^* + \Gamma_w h'_g - Q_{gf} + DISS_g, \\ & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f U_f) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f \rho_f U_f v_f A) = \\ & -P \frac{\partial \alpha_f}{\partial t} - \frac{P}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f v_f A) + \\ & + Q_{wf} + Q_{if} - \Gamma_{ig} h_f^* - \Gamma_w h'_f + Q_{gf} + DISS_f, \end{aligned} \quad (4.33)$$

де $Q_{gf} = \frac{P - P_s}{P} H_{gf} (T_g - T_f) = \frac{P_n}{P} H_{gf} (T_g - T_f)$, P_s - парціальний тиск

пари, P_n - парціальний тиск газів, що не конденсуються, $P = P_s + P_n$, H_{gf} - коефіцієнт так званого прямого теплообміну, що відбувається між рідиною та компонентом, що не конденсується (мається на увазі, що теплообмін відбувається не через Σ -фазу, а напряму між рідиною та газом). Множник $\frac{P - P_s}{P}$ забезпечує перетворення Q_{gf}

на нуль в разі відсутності газів, що не конденсуються.

Зміна рівнянь енергії веде до відповідної зміни виразу для інтенсивності міжфазного масообміну, який у випадку присутності газів, що не конденсуються, матиме вигляд:

$$\Gamma_g = - \frac{\frac{P_s}{P} H_{ig} (T^s(P_s) - T_g) + H_{if} (T^s(P_s) - T_f)}{h_g^* - h_f^*} + \Gamma_w. \quad (4.34)$$

де $T^s(P_s)$ - температура насичення, що відповідає парціальному тискові пари P_s .

4.3.7 Стратифікована (розшарована) течія.

При малих швидкостях двофазного теплоносія в горизонтальних трубах, унаслідок дії архімедових сил, спричинених різницею густин фаз, течія може стати розшарованою. Для опису розшарованої течії в моделі теплогідрравліки коду RELAP 5 вносяться зміни в рівняння збереження кількості руху. Це пояснюється тим, що за умов розшарування необхідно розглядати окремо тиск P_f у частині перерізу труби, зайнятій рідкою фазою, тиск P_g у частині, зайнятій газоподібною фазою, а також тиск на границі між фазами P_I . При цьому вирази для градієнтів тиску у рівняннях збереження кількості руху (4.13) змінюються і набувають вигляду:

$$\begin{aligned} -\alpha_g A \frac{\partial P}{\partial x} &\rightarrow -\alpha_g A \frac{\partial P_g}{\partial x} + (P_I - P_g) A \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = \\ &= A \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha_g P_g) + A P_I \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}, \\ -\alpha_f A \frac{\partial P}{\partial x} &\rightarrow -\alpha_f A \frac{\partial P_f}{\partial x} + (P_I - P_f) A \frac{\partial \alpha_f}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Середній за перерізом труби тиск P виражається через тиски в фазах P_g і P_f як

$$P = \alpha_g P_g + \alpha_f P_f. \quad (4.36)$$

Члени $(P_I - P_g) A \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}$ і $(P_I - P_f) A \frac{\partial \alpha_f}{\partial x}$ в рівняннях (4.35) виражають дію додаткових сил тиску, які є наслідком відмінності тисків у фазах від тиску P_I на міжфазній поверхні.

Якщо зробити вказані зміни, сума рівнянь кількості руху (4.13) не зміниться, проте різниця рівнянь (4.13) буде містити у правій частині такий додатковий член

$$\frac{\rho}{\alpha_g \alpha_f \rho_g \rho_g} \left[-\alpha_f \frac{\partial(\alpha_g P_g)}{\partial x} + \alpha_g \frac{\partial(\alpha_f P_f)}{\partial x} + P_I \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \right]. \quad (4.37)$$

Тиски в фазах P_g і P_f можна виразити через тиск на міжфазній поверхні P_I . Для труби діаметром D відповідні вирази матимуть вигляд:

$$P_g = P_I - \rho_g B_y D \left(\frac{\sin^3 \theta}{3\pi \alpha_g} - \frac{\cos \theta}{2} \right),$$

$$P_f = P_I - \rho_f B_y D \left(\frac{\sin^3 \theta}{3\pi \alpha_f} - \frac{\cos \theta}{2} \right). \quad (4.38)$$

де B_y - вертикальна складова масової сила (як правило $B_y = -g$);

Центральний кут θ (рис.4.4) визначається з рівняння

$$\alpha_g \pi = \theta - \sin \theta \cos \theta. \quad (4.39)$$

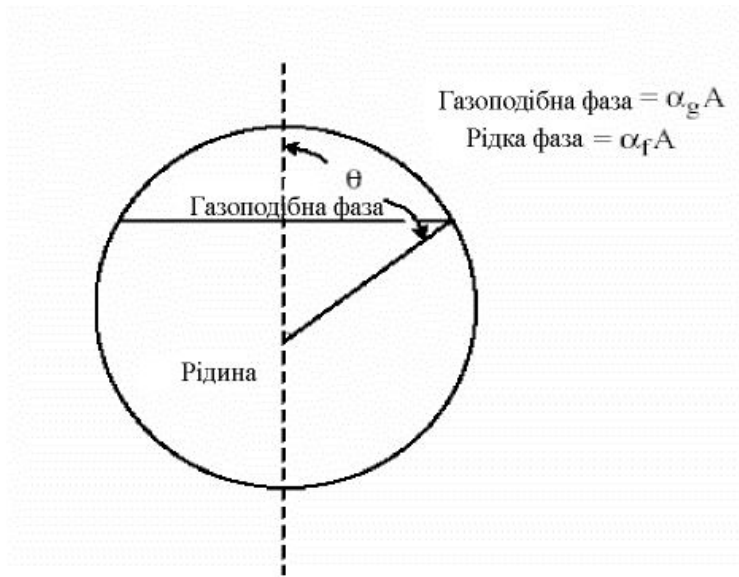


Рис.4.4. Визначення кута θ сектора, зайнятого газоподібною фазою, в моделі горизонтальної розшарованої течії

За допомогою рівнянь (4.38), (4.39) вираз (4.37) приводиться до вигляду:

$$-\left(\frac{\rho_m}{\rho_g \rho_f}\right)(\rho_f - \rho_g) \left(\frac{\pi D B_y}{4 \sin \theta}\right) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}. \quad (4.40)$$

Таким чином, вдається виключити тиск P_l з суми і з різниці рівнянь збереження кількості руху. Вводячи позначення:

$$y = \frac{D}{2}(1 + \cos \theta), \quad (4.41)$$

перепишемо (4.40) у вигляді

$$-\left(\frac{\rho_m}{\rho_g \rho_f}\right)(\rho_f - \rho_g) B_y \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (4.42)$$

Використовуючи (4.38) і (4.42), можна отримати остаточні вирази для членів, які слід додати до правих частин рівнянь збереження кількості руху (4.13) у випадку горизонтально розшарованої течії:

$$\begin{aligned} & + \left[\frac{\alpha_g \alpha_f (\rho_f - \rho_g)}{\alpha_f \rho_f - \alpha_g \rho_g} \right] \rho_m B_y A \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ в рівняння} \\ & \quad \text{для газоподібної фази,} \\ & - \left[\frac{\alpha_g \alpha_f (\rho_f - \rho_g)}{\alpha_f \rho_f - \alpha_g \rho_g} \right] \rho_m B_y A \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ в рівняння} \\ & \quad \text{для рідкої фази.} \end{aligned} \quad (4.43)$$

4.3.8 Початкові та граничні умови математичної моделі теплогідравліки коду RELAP 5.

В підрозд. 4.3.1-4.3.7 було розглянуто диференціальні рівняння збереження маси, кількості руху, енергії фаз, а також умови спряження розв'язків цих диференціальних рівнянь на міжфазній поверхні, що входять до складу базової математичної моделі теплогідравліки коду RELAP 5. Для кожної окремої задачі

дослідження властивостей течії теплоносія ці рівняння слід доповнити початковими і граничними умовами.

Початкові умови полягають у заданні полів тиску P , температур фаз T_g, T_f (або внутрішніх енергій фаз U_g, U_f), швидкостей фаз v_g, v_f , об'ємного вмісту пари α_g та масового вмісту газів, що не конденсуються X_n в області течії у початковий момент часу:

$$\begin{aligned} P &= P(x, 0), \\ T_g &= T_g(x, 0), T_f = T_f(x, 0), \\ v_g &= v_g(x, 0), v_f = v_f(x, 0), \\ \alpha_g &= \alpha_g(x, 0), X_n = X_n(x, 0). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Граничні умови зводяться до задання геометричної форми даної області та умов руху теплоносія та теплообміну на її границях. Розглянемо граничні умови на *твердих границях (стінках)*.

1. Унаслідок того, що базовою моделлю коду RELAP 5 є модель одновимірної течії, граничну умову для швидкості задавати не треба, бо швидкість вважається скрізь однаковою за перерізом.
2. Граничні умови, що визначають процес теплообміну між теплоносієм і стінкою, можуть задаватися як граничні умови першого роду (задана температура стінки), другого роду (заданий тепловий потік на стінці) і третього роду (конвективні граничні умови). У випадку граничних умов третього роду значення коефіцієнту тепловіддачі α визначається моделлю замикальних співвідношень коду RELAP 5.

На *рідких границях (у входному і вихідному перерізах труби)* в кожен момент часу задаються значення тиску P , температур фаз T_g, T_f (або внутрішніх енергій фаз U_g, U_f), об'ємного вмісту пари α_g , масового вмісту газів, що не конденсуються X_n та швидкостей фаз v_g, v_f :

$$\begin{aligned} P &= P(x_0, t), T_g = T_g(x_0, t), T_f = T_f(x_0, t), \\ \alpha_g &= \alpha_g(x_0, t), X_n = X_n(x_0, t), v_g = v_g(x_0, t), v_f = v_f(x_0, t), \end{aligned} \quad (4.45)$$

де x_0 - координата вхідного або вихідного перерізу труби.

Таким чином, математичний опис процесів теплогідравліки, прийнятий в базовій моделі коду RELAP 5, складається із семи диференціальних рівнянь у частинних похідних, що виражають умови збереження: маси (4.10); кількості руху (4.13); енергії (4.16), записані для кожної фази; а також, з умов збереження маси і кількості руху на міжфазній границі, ((4.11) і (4.15), відповідно), умов, що визначають питому швидкість міжфазного масообміну в процесі фазових переходів ((4.22) і (4.34)) та початкових і граничних умов.

Замикання математичного опису процесів теплогідравліки вимагає визначення співвідношень для коефіцієнтів: тертя на стінці FWG , FWF ; міжфазного тертя FIG , FIF ; приєднаних мас C ; тепловіддачі α в граничних умовах третього роду; міжфазного теплообміну в ядрі потоку H_{ig}, H_{if} , міжфазних теплових потоків в області поблизу стінки Q_{ig}^w, Q_{if}^w .

Замкнений математичний опис дозволяє визначити поля таких залежних величин: тиску P , температур фаз T_g, T_f (або внутрішніх енергій фаз U_g, U_f), об'ємного вмісту пари α_g , масового вмісту газів, що не конденсуються X_n та швидкостей фаз v_g, v_f .

Зазначимо, що розширення базового математичного опису моделі RELAP 5 включають тривимірні рівняння руху, рівняння розповсюдження бора і рівняння збереження маси для окремих газів, що не конденсуються.

5 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ТЕПЛОГІДРАВЛІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

5.1 Умови подібності

Теорія подібності – це наука про подібні явища, яка використовується як теоретична основа для дослідження фізичних процесів за двома напрямками: у напрямку узагальнення результатів експерименту і в напрямку моделювання роботи різноманітних пристроїв.

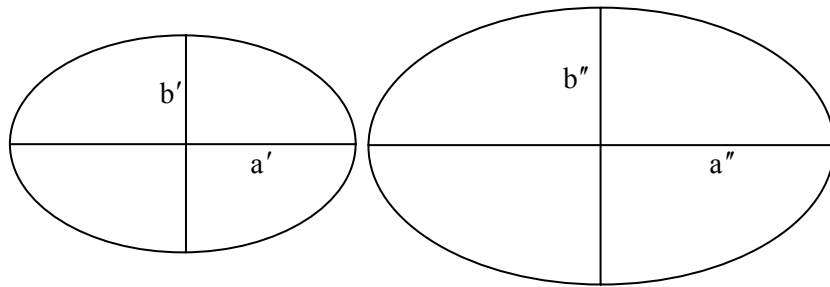


Рис.5.1. Подібні еліпси

Теорія подібності фізичних явищ являє собою розширення геометричної теорії подібності. До геометрично подібних відносяться фігури однакової форми, відповідні кути яких рівні, а відповідні лінійні розміри – пропорційні. Подібність двох фігур, наприклад, еліпсів (рис.5.1), можна виразити двома способами: рівністю відношень відповідних відрізків фігур і рівністю відносних, безрозмірних відповідних відрізків фігур. Для подібних еліпсів з рис.5.1. перший спосіб приводить до рівностей вигляду:

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = c, \quad (5.1)$$

де c - константа подібності. За допомогою константи подібності можна порівнювати між собою лише дві подібні фігури. Другий спосіб вимагає рівності відповідних безрозмірних відрізків, які

отримуються з розмірних шляхом ділення їх на масштаб – довжину деякого відрізка фігури. Обираючи більшу піввісь еліпса як масштаб, запишемо умову подібності еліпсів у вигляді:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''} = \bar{b} = idem, \quad (5.2)$$

Відносні безрозмірні елементи фігур називаються **інваріантами** або **критеріями подібності**. Використовуючи поняття критеріїв подібності, можна порівнювати нескінченну кількість подібних фігур. Рівняння у відносних, безрозмірних величинах, що описують подібні фігури, виявляються також однаковими. Дійсно, рівняння двох еліпсів можемо записати у вигляді

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1; \quad \frac{x''^2}{a''^2} + \frac{y''^2}{b''^2} = 1.$$

Обираючи більшу піввісь як масштаб і переходячи до безрозмірних змінних, будемо мати:

$$\bar{x}'^2 + \frac{\bar{y}'^2}{\bar{b}'^2} = 1; \quad \bar{x}''^2 + \frac{\bar{y}''^2}{\bar{b}''^2} = 1, \quad (5.3)$$

де $\bar{x}' = \frac{x'}{a'}, \bar{x}'' = \frac{x''}{a''}, \bar{y}' = \frac{y'}{a'}, \bar{y}'' = \frac{y''}{a''}$ – безрозмірні змінні,
 $\bar{b}' = \frac{b'}{a'}, \bar{b}'' = \frac{b''}{a''}$ – безрозмірні значення довжин менших півосей еліпсів.

Якщо врахувати, що для подібних еліпсів має місце рівність відповідних безрозмірних відрізків (5.2), то отримаємо, що подібні еліпси описуються однаковим рівнянням у відносних величинах:

$$\bar{x}^2 + \frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2} = 1. \quad (5.4)$$

Аналогічно подібності геометричних фігур подібність фізичних явищ вимагає, щоб математичний опис цих явищ в безрозмірних відносних величинах був однаковим. Таким чином, умови подібності фізичних явищ можна сформулювати в такий спосіб:

1. Явища мають бути одного класу, тобто однакової фізичної природи, й описуватися одною системою диференціальних рівнянь.
 2. Початкові й граничні умови в математичних описах явищ мають бути якісно однаковими, тобто містити одні й ті ж самі фізичні величини.
 3. Відповідні критерії подібності мають бути чисельно рівними.
- Під критеріями подібності в наведених умовах слід розуміти безрозмірні комплекси, складені з величин, що характеризують явище і входять у початкові та граничні умови математичного опису.

5.2 Зведення рівнянь теплогідравліки до безрозмірного вигляду

Розглянемо рівняння конвективного теплообміну для нестационарної течії нестисливої однофазної рідини з постійними фізичними властивостями (λ, c_p, ρ, μ – постійні). Нехай на твердих стінках задано граничні умови третього роду. Тоді математичний опис задачі про визначення теплогідравлічних параметрів рідини матиме вигляд

$$\begin{aligned} \alpha(T_c - T_p) &= -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_c, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} T &= a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c_p \rho} + \frac{\mu}{c_p \rho} \Phi, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v}, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

де $\vec{F}$ - щільність розподілу масових сил.

Зведемо математичний опис (5.5) до безрозмірного вигляду. Для цього виконаємо такі прості операції:

1. Оберемо масштаби для величин, що входять у (5.5). За масштаби візьмемо характерні величини процесу: довжину l_0 (наприклад,

діаметр труби); температуру T_0 (у даному випадку зручно обрати $T_0 = \Delta T = T_c - T_p$); швидкість v_0 , перепад тиску ΔP .

2. Уведемо безрозмірні величини як відношення розмірних величин до відповідних масштабів

$$\Theta = \frac{T}{\Delta T}, \vec{V} = \frac{\vec{v}}{v_0}, X = \frac{x}{l_0}, Y = \frac{y}{l_0},$$

$$Z = \frac{z}{l_0}; \bar{\Phi} = \left(\frac{v_0^2}{l_0^2} \right)^{-1} \Phi, \bar{n} = \frac{n}{l_0}. \quad (5.6)$$

3. Підставимо введені в (5.6) безрозмірні величини в математичний опис (5.5). Виносячи постійні величини за знаки похідних, отримаємо

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{n}} \right|_c,$$

$$\Delta T \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{v_0 \Delta T}{l_0} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \Theta = \frac{a \Delta T}{l_0^2} \nabla^2 \Theta + \frac{q_v}{c_p \rho} + \frac{\mu v_0^2}{c_p \rho l_0^2} \bar{\Phi}, \quad (5.7)$$

$$v_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{v_0^2}{l_0} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho l_0} \vec{\nabla} P + \nu \frac{v_0}{l_0^2} \nabla^2 \vec{V},$$

$$\text{div} \vec{V} = 0.$$

Поділимо друге і третє рівняння (5.7), відповідно, на $\frac{a \Delta T}{l_0^2}$ і $\frac{v_0^2}{l_0}$.

Будемо мати

$$\frac{\partial \Theta}{\partial (at/l_0^2)} + \frac{v_0 l_0}{a} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \Theta = \nabla^2 \Theta + \frac{q_v l_0}{\lambda \Delta T} + \frac{v_0^2}{c_p \Delta T} \frac{\mu}{\rho a} \bar{\Phi}, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial (v_0 t/l_0)} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \frac{\vec{F} l_0}{v_0^2} - \vec{\nabla} \left(\frac{\Delta P}{\rho v_0^2} \right) + \frac{\nu}{v_0 l_0} \nabla^2 \vec{V}. \quad (5.9)$$

Заміна P на ΔP в рівнянні (5.9) допустима, оскільки P входить в рівняння руху під знаком похідної, тобто визначається з точністю до довільної сталої.

Безрозмірні комплекси, що входять у співвідношення (5.7)-(5.9) позначимо таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha l_0}{\lambda} = Nu, \frac{at}{l_0^2} = Fo, \frac{v_0 l_0}{a} = Pe, \frac{q_v l_0^2}{\lambda \Delta T} = Os, \frac{v_0^2}{c_p \Delta T} = E, \\ \frac{\mu}{\rho a} = \frac{v}{a} = Pr, \frac{v_0 t}{l_0} = Ho, \frac{\Delta P}{\rho v_0^2} = Eu, \frac{v_0 l_0}{v} = Re. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Тепер можемо остаточно записати в безрозмірному вигляді систему рівнянь конвективного теплообміну для течії однофазної рідини з постійними фізичними властивостями.

Рівняння тепловіддачі

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{n}} \right|_c. \quad (5.11)$$

Рівняння енергії (після почленного ділення (5.8) на Pe)

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \Theta = \frac{1}{Pe} \nabla^2 \Theta + \frac{Os}{Pe} + \frac{E}{Re} \Phi. \quad (5.12)$$

Рівняння руху

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Ho} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \frac{\vec{F} l_0}{v_0^2} - \vec{\nabla} Eu + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}. \quad (5.13)$$

Рівняння нерозривності

$$\text{div} \vec{V} = 0. \quad (5.14)$$

Член $\frac{\vec{F} l_0}{v_0^2}$ в рівнянні (5.13) описує вплив масових сил, природа

яких може бути різною. Розглянемо два випадки, що найчастіше зустрічаються на практиці.

1. Рух під дією сил тяжіння. В цьому випадку $\vec{F} = \vec{g} = g\vec{e}$, де $\vec{e}$ - одиничний напрямний вектор сили тяжіння. Тоді:

$$\frac{\vec{F}l_0}{v_0^2} = \frac{\vec{g}l_0}{v_0^2} = \vec{e} \frac{gl_0}{v_0^2} = \frac{\vec{e}}{Fr}, \text{ де } Fr = \frac{v_0^2}{gl_0}.$$

2. Рух під дією підйімальної сили, пов'язаної з неоднорідністю поля густини теплоносія. В цьому випадку $\vec{F} = \vec{g}\beta T = \vec{g}\beta\Delta T\Theta$. Тоді

$$\frac{\vec{F}l_0}{v_0^2} = \vec{e} \frac{Gr}{Re^2} \Theta, \quad Gr = \frac{g\beta\Delta Tl_0^3}{\nu^2}.$$

5.3 Фізичний зміст критеріїв подібності

Отримані вище безрозмірні комплекси називаються **критеріями подібності**. Критерії Ho, Fr, Eu, Re мають назву **критеріїв гідродинамічної подібності**, а критерії $Nu, Pe, Fo, Gr, Os, E, Pr$ – **критеріїв теплової подібності**. Розглянемо фізичний зміст уведених критеріїв, а також деяких інших.

1. $\frac{v_0 t}{l_0} = Ho$ – **число гомохронності**, або число Струхала являє собою відношення часу протікання процесу до часу переміщення елемента рідини зі швидкістю v_0 на відстань l_0 . Виражає міру відношення переносного (конвективного) прискорення до прискорення в даній точці. Критерій Ho є визначальним при дослідженні нестационарних та періодичних гідродинамічних процесів.
2. $\frac{v_0^2}{gl_0} = Fr$ – **число Фруда**. Виражає співвідношення між силою інерції і силою тяжіння. Якщо переписати цей комплекс у вигляді $Fr = \frac{\rho v_0^2}{\rho g l}$, то, як легко бачити, число Фруда являє собою відношення кінетичної енергії потоку до роботи сили тяжіння.

Критерій Fr є визначальним при дослідженні гідродинамічних процесів, що відбуваються під дією гравітаційних сил.

3. $\frac{\Delta P}{\rho v_0^2} = Eu$ – **число Ейлера**, що виражає співвідношення між

силою тиску та інерційною силою в потоці. При дослідженні гідродинамічних процесів у трубах та каналах критерій Ейлера відноситься до тих, які треба визначити.

4. $\frac{v_0 l_0}{\nu} = Re$ – **число Рейнольдса**, що виражає співвідношення між

силою інерції і силою внутрішнього тертя в потоці. В цьому можна пересвідчитись, якщо помножити чисельник і знаменник

виразу для Re на v_0 , тоді $Re = \frac{\rho v_0^2}{\mu(v_0/l_0)}$. Величина Re визначає

яким буде режим течії теплоносія – ламінарним, турбулентним, або перехідним. Критерій Re є одним з найбільш важливих визначальних критеріїв конвективного теплообміну.

5. $\frac{\alpha l_0}{\lambda} = Nu$ – **число Нуссельта**, яке є безрозмірним коефіцієнтом

тепловіддачі й характеризує інтенсивність теплообміну на границі *рідина-стінка*. Помножимо і розділимо вираз для Nu на

температурний напір $\Delta T : Nu = \frac{\alpha \Delta T}{\Delta T \lambda / l_0} = \frac{q_c}{q_{c\lambda}}$. З цього виразу

впливає, що число Нуссельта виражає співвідношення між конвективним потоком тепла від рідини до поверхні стінки q_c і потоком тепла через шар рідини товщиною l_0 , переданим теплопровідністю. В задачах конвективного теплообміну критерій Нуссельта належить до тих, які треба визначити.

6. $\frac{v_0 l_0}{a} = Pe$ – **число Пекле**, що є критерієм теплової подібності.

Як впливає з перетворення $Pe = \frac{v_0 c_p \rho \Delta T}{\lambda \Delta T / l_0}$, число Пекле

характеризує відношення інтенсивності конвективного переносу

тепла до інтенсивності переносу тепла за рахунок теплопровідності. Цей критерій є одним з основних визначальних критеріїв в задачах конвективного теплообміну.

7. $\frac{at}{l_0^2} = Fo$ – **число Фур'є**, фізичний зміст якого можна зрозуміти

після перетворення: $Fo = \frac{at}{l_0^2} = \frac{(\frac{\lambda}{l_0} \Delta T) l_0^2 t}{c_p (\rho l_0^3) \Delta T}$, звідки число Фур'є

представляє відношення кількості тепла, що переноситься теплопровідністю за час t , до кількості тепла, що пішло на зміну температури тіла, тобто, є мірою швидкості зміни температури тіла при неусталеному тепловому стані. Критерій Фур'є належить до визначальних в задачах нестационарного теплообміну.

8. $\frac{\nu}{a} = \frac{Pe}{Re} = Pr$ – **число Прандтля**, є критерієм подібності

температурних та швидкісних полів. При $Pr = 1$ та $grad P = 0$ поля температури та швидкості подібні (відрізняються лише множителем). Число Прандтля містить лише фізичні параметри середовища, і тому є безрозмірним фізичним параметром. Для газів Pr практично не залежить від температури і тиску, його величина визначається атомарністю газу і близька до одиниці. Для крапельних рідин величина числа Прандтля більша від одиниці й сильно залежить від температури (як правило, Pr зменшується при збільшенні температури).

9. $\frac{g l_0^3 \beta \Delta T}{\nu^2} = Gr$ – **число Грасгофа**, що є критерієм подібності

полів вільно-конвективних течій, тобто течій, що виникають унаслідок неоднорідності поля густини. Характеризує відношення підйімальної сили, пов'язаної з неоднорідністю густини неізотермічного потоку, до сили молекулярного тертя.

10. $\frac{r}{c_p \Delta T} = K$ – **число Кутателадзе**, що є тепловим критерієм

фазового перетворення; де теплота реакції r є мірою відношення теплового потоку, що йде на фазове перетворення речовини, до теплоти перегріву однієї з фаз відносно температури насичення. Разом із числами Nu і Pr , число K утворює такий безрозмірний комплекс: $ql_0/r\rho v \equiv \frac{Nu}{K Pr}$, що являє собою міру відношення інерційних сил, які виникають унаслідок фазового переходу, до сил молекулярного тертя.

11. $\frac{\sigma}{g(\rho_f - \rho_g)l_0^2} = We$ – **число Вебера**, що є критерієм

поверхневого натягу та мірою впливу тиску, що створюється поверхневим шаром молекул. Число Вебера характеризує стійкість дискретних елементів фаз (крапель, бульбашок) для двофазної течії.

12. $\frac{q_v l_0^2}{\lambda \Delta T} = Os$ – **число Остроградського**. Зводячи критерій Os до

вигляду: $Os = \frac{q_v l_0^2}{\lambda \Delta T} = \frac{q_v l_0^3}{(\lambda \Delta T / l_0) l_0^2}$, легко побачити, що критерій

Остроградського являє собою відношення кількості тепла $q_v l_0^3$, що виділилося в середовищі за рахунок дії внутрішніх джерел, до кількості тепла, що пройшло, через середовище внаслідок теплопровідності $(\lambda \Delta T / l_0) l_0^2$.

13. $\frac{v_0^2}{c_p \Delta T} = E$ – **число Еккерта**. Помножимо чисельник і знаменник

виразу для E на ρ : $E = \frac{v_0^2}{c_p \Delta T} = \frac{\rho v_0^2}{\rho c_p \Delta T}$. Отже, критерій Еккерта

являє собою відношення кінетичної енергії потоку до кількості

теплоти, що пішла на зміну температури (нагрів) рідини. Критерій E є кількісною характеристикою процесу дисипації, оскільки встановлює зв'язок між механічною енергією потоку і тепловою енергією, у яку переходить механічна енергія у процесі дисипації.

14. $\frac{v}{a} = M$ – **число Маха**, де a – швидкість звуку. Цей критерій відповідає за швидкісну подібність і характеризує стисливість рідини у потоці.

5.4 Рівняння подібності

У результаті розв'язання задачі конвективного теплообміну визначаються коефіцієнти тепловіддачі й тертя як функції визначальних критеріїв подібності.

Рівнянням подібності зветься функціональна залежність критерія, що підлягає визначенню, від інших критеріїв, які характеризують явище – *визначальних критеріїв*. Критеріями, що підлягають визначенню в задачах теплогідравліки є числа Нуссельта (Nu) і Ейлера (Eu). Оскільки аналітичне розв'язання системи рівнянь конвективного теплообміну є можливим лише в окремих випадках, то побудова критеріальних рівнянь для чисел Nu і Eu виконується експериментально або чисельно. При цьому у випадку нестационарного конвективного теплообміну побудова рівнянь подібності зводиться до відшукування функціональних залежностей вигляду

$$Nu = Nu(Fo, Ho, Re, Gr, Pr, X, Y, Z),$$

$$\zeta = -2 \frac{dEu}{dx} = \zeta(Fo, Ho, Re, Gr, Pr, X, Y, Z). \quad (5.15)$$

Для стаціонарних процесів критерії Ho і Fo не входять до складу визначальних критеріїв, отже рівняння подібності спрощуються:

$$Nu = Nu(Re, Gr, Pr, X, Y, Z),$$

$$\zeta = \zeta(Re, Gr, Pr, X, Y, Z), \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \text{або, враховуючи } Pe = Re Pr, \\ Nu = Nu(Re, Gr, Pe, X, Y, Z), \\ \zeta = \zeta(Re, Gr, Pe, X, Y, Z). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Для вимушеної течії рідини і при розвиненому турбулентному режимі течії внесок вільної конвекції в загальний перенос тепла є малим порівняно із внеском вимушеної конвекції, тобто впливом числа Грасгофа можна знехтувати, і рівняння подібності набувають вигляду

$$\begin{aligned} Nu = Nu(Re, Pr, X, Y, Z), \\ \zeta = \zeta(Re, Pr, X, Y, Z). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Для вільноконвективного руху внесок вимушеної конвекції відсутній, отже зі складу визначальних критеріїв виходить число Re . Таким чином, рівняння подібності записується як

$$\begin{aligned} Nu = Nu(Gr, Pr, X, Y, Z), \\ \zeta = \zeta(Gr, Pr, X, Y, Z). \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.5 Метод аналізу розмірностей

Побудова рівнянь подібності спрощується за рахунок застосування методу аналізу розмірностей, оскільки з його допомогою вдається встановити конкретний вигляд функцій із залежностей (5.15)-(5.19). Сутність методу аналізу розмірностей полягає у визначенні кількості й структури безрозмірних комплексів, складених з величин, що характеризують процес у тому випадку, коли система диференціальних рівнянь неповна або взагалі не побудована внаслідок відсутності інформації.

Розрізняють два типи фізичних величин: **первинні (основні) і вторинні (похідні)**. Первинні величини визначають певний фізичний процес без зв'язку з іншими параметрами. Вторинні величини є функціями первинних величин.

У системі Si як первинні величини, що характеризують процес теплообміну, обрано довжину L , масу M , час t і температуру T .

Розмірністю називається вираз вторинної величини через первинні. Формула розмірності в загальному випадку має вигляд

$$[\varphi] = L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3} \Theta^{n_4}. \quad (5.20)$$

де $[\varphi]$ - довільна вторинна величина, n_i - дійсні числа.

Метод аналізу розмірностей базується на важливому математичному результаті, який має назву π – **теореми Бекінгема**: фізичне рівняння, що містить $n \geq 2$ розмірних величин, з яких $k \geq 1$ мають незалежну розмірність, після зведення до безрозмірного вигляду буде містити $n-k$ безрозмірних незалежних величин.

Застосуємо метод аналізу розмірностей при дослідженні закону тепловіддачі при обтіканні нагрітої поверхні рідиною з постійними фізичними властивостями. Розмірне рівняння подібності, яке містить усі суттєві для даного випадку фізичні величини, має вигляд

$$F(x, v, \rho, \mu, c_p, \lambda, \alpha) = 0. \quad (5.21)$$

Оскільки треба визначити коефіцієнт тепловіддачі α , то перепишемо рівняння (5.21) у вигляді:

$$\alpha = A x^l v^r \rho^m \mu^k \lambda^p c_p^n. \quad (5.22)$$

Згідно з π – теоремою, із семи розмірних величин, що входять у (5.22), можна скласти три незалежні безрозмірні комплекси, оскільки всі розмірні величини містять чотири первинних величини (м, кг, с, К). Прирівнюємо розмірності лівої і правої частин в (5.22):

$$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = \text{м}^l \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^r \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)^m \left(\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right)^k \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right)^p \left(\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right)^n.$$

Прирівнюючи показники степенів при відповідних одиницях виміру приходимо до системи:

$$1 = p + n,$$

$$0 = m + k - n,$$

$$2 = l + r - 3m - k - p,$$

$$0 = -r - k + n.$$

Звідки:

$$p = 1 - n, k = n - m, r = m, l = m - 1.$$

Підставляємо знайдені значення показників в (5.22) і отримаємо

$$\alpha = A \frac{\lambda}{x} \left(\frac{\rho v x}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n,$$

або

$$\text{Nu} = A \text{Re}^m \text{Pr}^n. \quad (5.23)$$

Співвідношення (5.23), отримане методом аналізу розмірностей, лежить в основі багатьох відомих кореляцій для визначення коефіцієнту тепловіддачі, зокрема тих, що входять до системи замикальних співвідношень коду RELAP 5.

6 ЗАМИКАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДВОФАЗНОГО ПОТОКУ КОДУ RELAP 5.

6.1 Загальні особливості системи замикальних співвідношень коду RELAP5

Як відзначалося у розд. 4, для побудови замкненого математичного опису теплогідравлічних процесів у двофазних потоках, необхідно доповнити систему диференціальних рівнянь і умов однозначності системою співвідношень, що визначають взаємодію фаз між собою та зі стінками каналу. Така система називається **системою замикальних співвідношень**.

Складність і різноманітність фізичних умов, в яких функціонує реальне обладнання, призводить до того, що система замикальних співвідношень будь-якого коду, призначеного для аналізу процесів у двофазних потоках, має складну і розвинену структуру. Система може містити у своєму складі понад сто окремих співвідношень. При цьому алгоритми, за якими обирається співвідношення, що має використовуватися за певних умов, мають нетривіальну структуру і вимагають окремого вивчення.

Коди поліпшеного аналізу теплогідравлічних процесів в системах ЯЕУ орієнтовані на дослідження нестационарних ламінарних і турбулентних двофазних потоків в каналах складної геометрії, в яких часто суттєву роль відіграють просторові ефекти. Проведені теоретичні і навіть експериментальні дослідження властивостей таких потоків на даний момент є далеко не повними. Це пояснює відсутність, в деяких випадках, надійних замикальних співвідношень.

Особливо слід відзначити, що закономірності тепломасообміну в двофазних потоках є майже недослідженими для нестационарних умов. Таким чином, при побудові системи замикальних співвідношень за основу береться квазістационарний підхід.

Основними принципами побудови замикальних співвідношень є використання даних, отриманих в умовах максимально близьких до реальних, а також включення в ці співвідношення констант, підбір значень яких дозволяє зменшити похибки опису процесу, що виникають внаслідок недостатнього знання його закономірностей.

Вказані особливості системи замикальних співвідношень роблять необхідними дослідження, спрямовані на удосконалення цієї системи. Напрямки цих досліджень визначаються за результатами застосування коду шляхом їх зіставлення з результатами, отриманими за допомогою інших кодів, а також – з результатами експериментів.

6.2 Карти режимів двофазних потоків

Закономірності фізичних процесів у двофазних потоках суттєво залежать від внутрішньої структури потоку. Структурні характеристики потоку необхідно визначати в широкому діапазоні зміни його параметрів, в різноманітних умовах роботи обладнання. Тому задача визначення структури потоку, що реалізується за тих або інших умов, є надзвичайно складною і може бути вирішена лише наближено. Параметрів, що визначають реалізацію потоку тієї або іншої структури (або, інакше кажучи, реалізацію того або іншого режиму потоку) дуже багато. До них відносяться: швидкості, густини, в'язкості, об'ємні концентрації фаз, тиск, щільність теплового потоку на стінці, напрямок течії фаз, геометрія, вертикальна орієнтація каналу та ін.. Зміна режимів потоку визначається за допомогою спеціальної діаграми, яка називається *картою режимів потоку*. З наведених вище причин побудувати універсальну карту режимів потоку, як правило, не вдається. На практиці застосовується сукупність карт режимів, кожна з яких описує певний клас двофазного потоку.

В коді RELAP 5 використовуються чотири основні класи двофазного потоку: потоки у горизонтальних об'ємах, потоки у вертикальних об'ємах, потоки у насосах, що характеризуються високою мірою перемішування, а також потоки у горизонтальних об'ємах в умовах конденсації пари. Для кожного класу зміна режимів потоку визначається за допомогою окремої карти. На картах режимів потоку, як правило, по осі абсцис відкладається істинний об'ємний вміст пари (газу), а по осі ординат – масова витрата ρv . Розглянемо особливості карт режимів двофазного потоку, що застосовуються в коді RELAP 5 [10].

6.2.1 Карта режимів потоку для вертикальних об'ємів

Карта режимів потоку у вертикальних об'ємах застосовується для об'ємів, кут ϕ нахилу яких задовольняє умові $60^0 \leq \phi \leq 90^0$. Дана карта охоплює 9 режимів потоку: 4 режими, що реалізуються до кризи теплообміну (явище кризи теплообміну детально розглянуте у підрозд. 6.9), 4 режими, що реалізуються після кризи та 1 режим – вертикальна стратифікація. Нижче описані особливості цих режимів, а також наведені співвідношення, що визначають області їх реалізації.

6.2.1.1 Передкризові режими.

В математичній моделі двофазного потоку коду RELAP 5 розрізняють такі режими, що можуть реалізовуватися до кризи теплообміну.

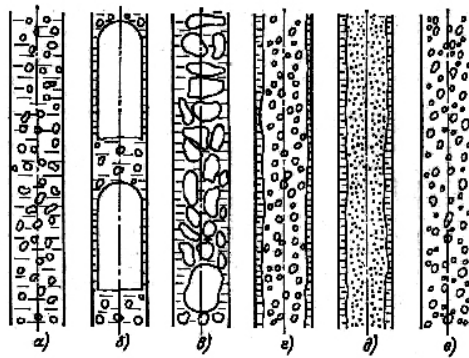


Рис.6.1. Режими двофазного потоку у вертикальних об'ємах:

а) бульбашковий; б) снарядний; в) емульсійний; г) дисперсно-кільцевий; д) кільцевий; е) дисперсний.

- 1) Бульбашковий режим (рис.6.1 а)) характерний тим, що газоподібна фаза розподілена у рідкій у вигляді бульбашок,

розміри яких малі у порівнянні з характерним лінійним розміром течії.

- 2) *Снарядний режим* (рис.6.1 б)). При снарядному режимі газова фаза рухається у вигляді великих бульбашок (снарядів), передня частина яких закруглена. Поперечні розміри снарядів сумірні з характерним лінійним розміром течії. Від стінки снаряди відділені тонким шаром рідини, а один від одного – рідкими пробками, що містять зважені дрібні бульбашки.
- 3) *Дисперсно-кільцевий режим течії* (рис.6.1 г)) визначається тим, що газоподібна фаза утворює ядро потоку, а рідка фаза рухається у вигляді плівки біля поверхні труби та у вигляді дрібних крапель, розподілених у газоподібному ядрі потоку.
- 4) *Дисперсний передкризовий режим* (рис.6.1 е)) вводиться для забезпечення гладкості функцій, що входять до замикальних співвідношень, при переході через точку кризи теплообміну (цим пояснюється назва «передкризовий»). За структурою даний режим збігається з *дисперсним*, який характерний тим, що вся рідина рухається у вигляді дрібних крапель, розподілених у потоці газу. Стінка омивається газом.

Окрім розглянутих 4-х режимів іноді окремо виділяють деякі їх різновиди: *емульсійний режим* (рис.6.1 в)), який вводиться для забезпечення плавності переходу від бульбашкового до снарядного режиму, а також *кільцевий режим* (рис.6.1 д)) – різновид дисперсно-кільцевого режиму, що характеризується відсутністю рідких крапель у ядрі потоку.

6.2.1.2 Післякризові режими

Схематичне зображення післякризових режимів наведене на рис.6.2. Режим, що виникає після кризи теплообміну (після переходу через лінію CHF), визначається режимом, що існував до кризи теплообміну. До післякризових відносяться такі режими двофазного потоку:

- 1) *Обернений дисперсно-кільцевий режим* (рис.6.2 а)) характерний тим, що рідка фаза утворює ядро потоку, а газоподібна рухається у вигляді плівки біля стінок труби та у вигляді дрібних

бульбашок у ядрі потоку. Обернений дисперсно-кільцевий режим потоку настає у випадках, коли до кризи теплообміну реалізовувався бульбашковий режим.

- 2) *Обернений снарядний режим* (рис.6.2 б)) характеризується наявністю насичених бульбашками рідких снарядів, що пливуть у ядрі потоку та оточені газом, який містить краплі рідини. Обернений снарядний режим потоку настає у випадках, коли до кризи теплообміну реалізовувався снарядний режим.
- 3) *Дисперсний режим* (рис.6.2 в)) характерний тим, що вся рідина рухається у вигляді дрібних крапель, розподілених у потоці газу, а стінка омивається газом.
- 4) *Післякризовий дисперсний режим* (рис.6.2 в)) – режим, що вводиться для симетрії з передкризовим дисперсним, за структурою збігається з дисперсним режимом. Цей режим вводиться для забезпечення гладкості всіх функцій, що входять до замикальних співвідношень, при переході через точку кризи теплообміну.

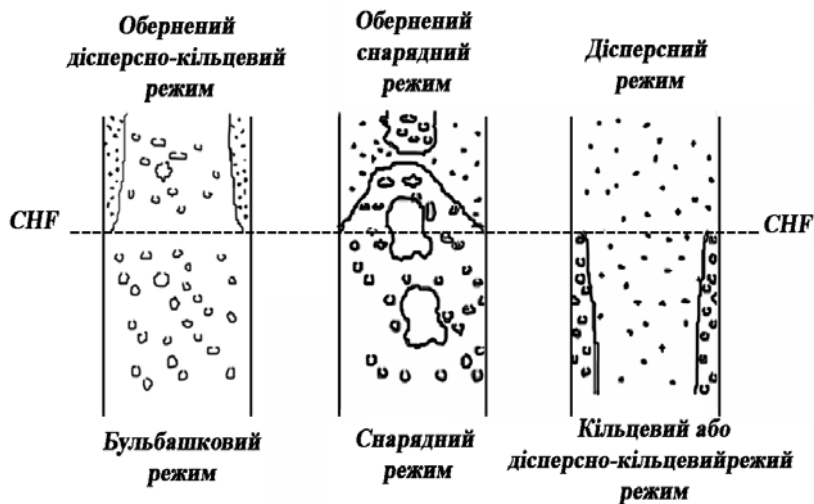


Рис.6.2 Післякризові режими двофазного потоку

6.2.1.3 Вертикально розширований режим.

Вертикально розширований режим виникає при дуже малих швидкостях двофазного потоку. Цей режим характеризується наявністю розподілених по довжині вертикальної труби областей, в яких поперечний переріз труби повністю зайнятий якоюсь однією фазою.

6.2.1.4 Области реалізації режимів потоку

Для побудови карти режимів двофазного потоку необхідно визначити області, в яких може існувати той або інший режим і встановити умови переходу від одного режиму до іншого. Карта режимів двофазного потоку для вертикальних об'ємів показана на рис.6.3.

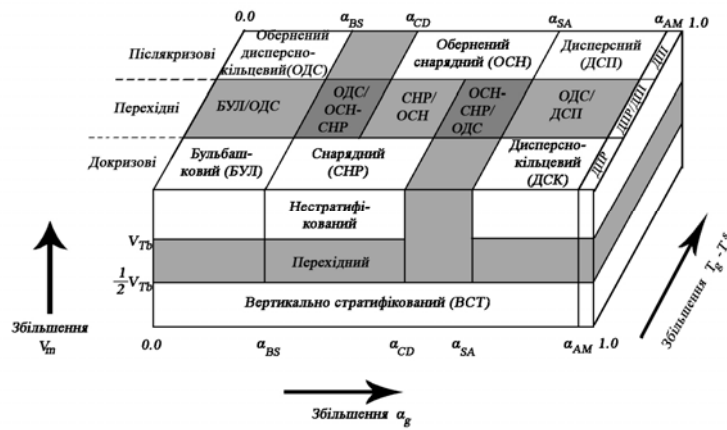


Рис.6.3. Карта режимів для вертикальних об'ємів.

Область реалізації бульбашкового режиму. Як свідчать експериментальні дані, огляд яких наведено в [9,10], бульбашковий режим течії реалізується в області невеликих значень об'ємного

вмісту пари (газу). Перехід від бульбашкового режиму до снарядного відбувається внаслідок злиття (агломерації) малих бульбашок в бульбашки великих розмірів, внаслідок чого бульбашковий режим змінюється снарядним. Аналіз умов агломерації у моделі коду RELAP5 проводиться шляхом порівняння швидкостей підйому малих бульбашок і великих довгих бульбашок, що мають назву бульбашок Тейлора. Під швидкістю підйому треба розуміти швидкість руху відносно спостерігача, що рухається з середньою швидкістю суміші. У випадку, коли швидкість підйому малих бульбашок перевищує швидкість підйому бульбашок Тейлора (назва дана на честь дослідника, який одним з перших дослідив підіймальний рух поодинокі довгої бульбашки у круглій трубі, заповненій нерухомою ідеальною рідиною), вважається що малі бульбашки, потрапляючи у кільватер великих, зливаються з ними.

Швидкість підйому малих бульбашок визначається кореляцією Зубера [9]:

$$v_{sb} = 1.53 \left[\frac{g(\rho_f - \rho_g)\sigma}{\rho_f^2} \right]^{1/4} = 1.53 \left[\frac{D^* \sigma}{D\rho_f} \right]^{1/2}, \quad (6.1)$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу, що являє собою роботу, необхідну для утворення (знищення) одиниці міжфазної поверхні "рідина-газ".

Швидкість підйому бульбашок Тейлора обчислюється як:

$$v_{Tb} = 0.35 \left[\frac{gD(\rho_f - \rho_g)}{\rho_f} \right]^{1/2} = 0.35 D^* \left[\frac{\sigma}{D\rho_f} \right]^{1/2}. \quad (6.2)$$

де $D^* = D \left[\frac{g(\rho_f - \rho_g)}{\sigma} \right]^{1/2}$ – безрозмірний діаметр труби;

Зменшення швидкості підйому бульбашок Тейлора разом зі зменшенням діаметру труби призводить до неможливості існування бульбашкового режиму для труб, діаметр яких менший певного критичного значення, що визначається шляхом прирівнювання швидкостей підйому бульбашок Тейлора і малих бульбашок.

Умова існування бульбашкового режиму у моделі коду RELAP 5 записується таким чином:

$$D^* = D \left[\frac{g(\rho_f - \rho_g)}{\sigma} \right]^{1/2} \geq 22.22, \quad (6.3)$$

В моделі коду RELAP 5 вважається, що перехід від бульбашкового до снарядного режиму для труб, діаметр яких задовольняє умові (6.3), відбувається при $\alpha_g = 0.25$ для масових

$$\text{витрат } G_m = \alpha_g \rho_g |v_g| + \alpha_f \rho_f |v_f| \leq 2000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}.$$

З урахуванням (6.3) і з метою забезпечення гладкості всіх функцій моделі по параметру D^* , використовується така оцінка граничного значення об'ємного вмісту газоподібної фази α_L , до якого можливе існування бульбашкового режиму:

$$\alpha_L = 0.25 \min \left[1.0, \left(\frac{D^*}{22.22} \right)^8 \right] \quad (6.4)$$

Значення α_L визначає перехід при невеликих значеннях масової витрати $G_m \leq 2000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$.

При обтіканні пучків стержнів, що відбувається під час руху теплоносія в активній зоні, встановлено, що значення α_{BS} не може бути меншим 0.25: $\alpha_{BS} \geq 0.25$.

При високих масових витратах $G_m \geq 3000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$ бульбашковий режим може продовжуватися до $\alpha_M = 0.5$. В проміжній зоні, при $2000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с} \leq G_m \leq 3000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$, в коді RELAP 5 виконується лінійне інтерполювання між мінімальним та максимальним значеннями. Таким чином, остаточна формула для визначення α_{BS} має вигляд:

$$\alpha_{BS} = \begin{cases} \alpha_L, & G_m \leq 2000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с} \\ \alpha_L + 0.001(0.5 - \alpha_L)(G_m - 2000) & 2000 < G_m < 3000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с} \\ 0.5, & G_m \geq 3000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с} \end{cases} \quad (6.5)$$

Вважається, що бульбашковий режим існує при $\alpha < \alpha_{BS}$, при $\alpha \geq \alpha_{BS}$ реалізується снарядний режим.

Область реалізації снарядного режиму. Спливання снаряду у рідині відбувається під впливом підйімальної сили. Швидкість спливання визначається співвідношенням між підйімальною силою і іншими силами, що діють на снаряд: силами опору, в'язкого тертя та поверхневого натягу. Верхня границя існування снарядного режиму визначається умовами стійкості снарядів під дією дотичних напружень з боку рідкої фази у поєднанні з дією сили лобового опору. Порушення стійкості веде до переходу від снарядного до дисперсно-кільцевого режиму. Відмітимо, що властивості снарядного режиму принципово відрізняються для підйомних та опускних течій. В першому випадку, як правило [2], рідина стікає вниз вздовж стінки, отже фази рухаються в протилежних напрямках. В таких випадках снарядний режим порушується внаслідок “захливання” або “перевернення” потоку (див. підрозд. 3.4), коли велика швидкість газової фази спричинює зміну напрямку руху рідини вздовж стінки. В другому випадку фази мають однаковий напрям руху і снарядний режим є більш стійким. Як свідчать проведені експериментальні й теоретичні дослідження [10], перехід від снарядного режиму до дисперсно-кільцевого внаслідок захливання відбувається у трубах малого діаметру. У трубах

великого діаметру стійкість снарядів порушується внаслідок проникнення рідких крапель до середини снарядів. Для підйомних течій перехід від снарядного режиму до дисперсно-кільцевого визначається двома такими критеріями:

$$j_g^* = \frac{\alpha_g V_g}{\left[gD \frac{(\rho_f - \rho_g)}{\rho_g} \right]^{1/2}} \geq j_{g,crit}^* \quad (6.6)$$

$$Ku_g = \frac{\alpha_g V_g}{\left[g\sigma \frac{(\rho_f - \rho_g)}{\rho_g^2} \right]^{1/4}} \geq Ku_{g,crit} \quad (6.7)$$

Критерій (6.6) відповідає переходу від снарядного режиму до дисперсно-кільцевого у трубах малого діаметру і являє собою умову захлинання потоку. Критерій (6.7) відповідає переходу у трубах великого діаметру, де стійкість снаряду переважно визначається співвідношенням між підйнятною силою і силою поверхневого натягу, і являє собою умову початку проникнення рідких крапель у середину снаряду. В моделі коду RELAP 5 прийнято такі значення критичних параметрів:

$$Ku_{g,crit} = 3.2, \quad j_{g,crit} = 1.0 \quad (6.8)$$

При визначенні об'ємного вмісту газу, що відповідає переходу від снарядного до дисперсно-кільцевого режиму α_{SA} , вважають, що перехід відбувається при виконанні будь-якої з умов (6.6), (6.7). Тобто для α_{SA} прийнято:

$$\alpha_{SA} = \min(\alpha_{crit}^f, \alpha_{crit}^e) \quad (6.9)$$

де

$$\alpha_{\text{crit}}^f = \begin{cases} \frac{1}{v_g} \left[\left[\frac{gD(\rho_f - \rho_g)}{\rho_g} \right]^{1/2} \right] & \text{— для підйомних течій} \\ 0.75 & \text{— для опускних і зустрічних течій,} \end{cases}$$

$$\alpha_{\text{crit}}^e = \frac{3.2}{v_g} \left[\frac{g\sigma(\rho_f - \rho_g)}{\rho_g^2} \right]^{1/4}.$$

(6.10)

Об'ємний вміст пари (газу), що відповідає захлинанню потоку, α_{crit}^f , знаходиться комбінуванням (6.6) і (6.8), а вміст, що визначає початок виносу крапель, α_{crit}^e , отримується комбінуванням (6.7) та (6.8).

З метою забезпечення гладкості функцій, що входять до замикальних співвідношень моделі, вводиться режим, перехідний між снарядним та дисперсно-кільцевим. Його початок визначається значенням об'ємного вмісту пари (газу) α_{DE} :

$$\alpha_{\text{DE}} = \max(\alpha_{\text{BS}}, \alpha_{\text{SA}} - 0.05), \quad (6.11)$$

а закінчення – значенням α_{SA} . Взагалі, для α_{SA} справедливо: $0.5 \leq \alpha_{\text{SA}} \leq 0.9$, а для пучків стержнів вважається, що $\alpha_{\text{SA}} < 0.8$.

Область реалізації дисперсно-кільцевого режиму. Верхнім граничним значенням об'ємного вмісту газу α_{AM} , що визначає область існування дисперсно-кільцевого режиму є:

$$\alpha_{\text{AM}} = 0.9999. \quad (6.12)$$

Області реалізації післякризових режимів. В RELAP 5 вважається, що для існування післякризових режимів необхідним є виконання таких умов: існує тепловий потік від стінки до

газоподібної фази і при цьому газ перегрітий відносно температури насичення більш ніж на $1^0 K$. Для визначення областей реалізації післякризових режимів використовуються співвідношення, розглянуті вище. Зокрема, умови (6.5) визначають перехід від оберненого дисперсно-кільцевого режиму до оберненого снарядного, умова (6.11) визначає перехід від оберненого снарядного до дисперсного, а умова (6.12) визначає перехід від дисперсного до дисперсного післякризового режиму. Режим, перехідний між оберненим снарядним та оберненим дисперсно-кільцевим, розташовується між значеннями α_{BS} та $\alpha_{BS} + 0.2$.

Область реалізації режиму вертикально розширеної течії. Для існування режиму вертикально розширеної течії необхідно, щоб швидкість вертикального потоку була настільки малою, щоб з'являлася чітка границя між газом та рідиною. Для існування вертикального розширення згідно з моделлю коду RELAP 5 необхідне виконання двох умов:

1). Швидкість суміші V_m повинна бути меншою від швидкості підйома бульбашок Тейлора:

$$V_m < V_{Tb} \text{ або } \frac{\alpha_g \rho_g |v_g| + \alpha_f \rho_f |v_f|}{\rho_m} < 0.35 \left[g \frac{D(\rho_f - \rho_g)}{\rho_f} \right]^{1/2} \quad (6.13).$$

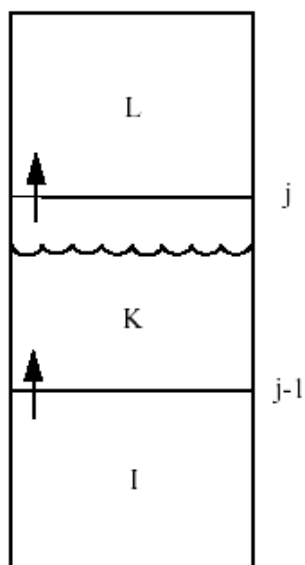


Рис.6.4. Вертикально розшарований режим

2) Повинен існувати достатньо великий градієнт об'ємного вмісту пари (газу) в трьох послідовних вертикальних об'ємах. Для існування режиму вертикально розшарованої течії в об'ємі К (рис. 6.4) повинні виконуватися такі умови:

$$\alpha_{g,L} > 0.7, \alpha_{g,L} - \alpha_{g,K} > 0.2, \alpha_{g,K} - \alpha_{g,I} > 0.2, (6.14)$$

де $\alpha_{g,I}, \alpha_{g,K}, \alpha_{g,L}$ - значення об'ємного вмісту пари (газу), відповідно, в об'ємах I, K та L.

6.2.2 Карта режимів потоку для горизонтальних об'ємів

Дана карта режимів використовується для об'ємів з кутом нахилу $|\varphi| \leq 30^\circ$. Для об'ємів, кут нахилу яких задовольняє нерівності $30^\circ \leq |\varphi| \leq 60^\circ$, застосовується інтерполяція між картами для

вертикальних та для горизонтальних об'ємів. Карта режимів для горизонтальних об'ємів подібна до карти для вертикальних об'ємів. Відмінності полягають у відсутності післякризових режимів і заміні режиму вертикально розшарованої течії на *режим горизонтально розшарованої течії*. Останній режим характерний тим, що під дією гравітаційних сил рідка фаза, як більш важка, займає нижню частину труби, а газоподібна – верхню. Таким чином, карта для горизонтальних об'ємів містить горизонтально розшарований режим, бульбашковий, снарядний, дисперсно-кільцевий та дисперсний передкризовий режими потоку. Схематичне зображення карти для горизонтальних об'ємів приведене на рис 6.5.

Перехід від бульбашкового до снарядного режиму визначається умовами, аналогічними до умов (6.5), що представляють лінійну залежність α_{BS} від G_m . Дані умови мають вигляд:

$$\alpha_{BS} = \begin{cases} 0,25, & G_m \leq 2000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}, \\ 0,25 + 0,00025(G_m - 2000), & 2000 < G_m < 3000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}, \\ 0,5, & G_m \geq 3000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}. \end{cases} \quad (6.15)$$

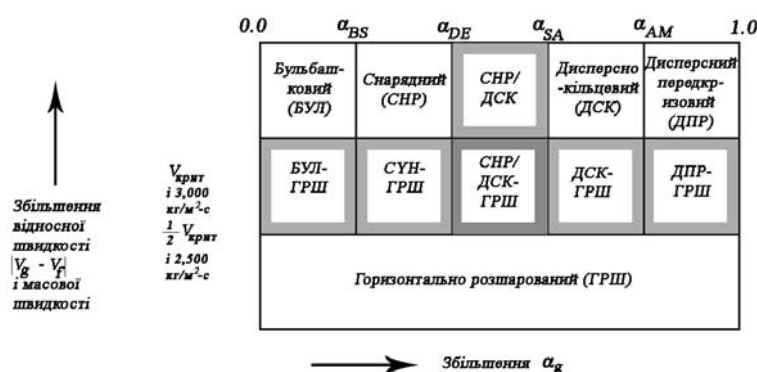


Рис.6.5. Карта режимів потоку для горизонтальних об'ємів.

Мінімальне значення об'ємного вмісту пари (газу), при якому відбувається перехід від снарядного до дисперсно-кільцевого режиму дорівнює:

$$\alpha_{SA} = 0.8. (6.16)$$

Режиму, перехідному між снарядним та дисперсно-кільцевим, відповідають значення α_g , що знаходяться між α_{DE} та α_{SA} , де:

$$\alpha_{DE} = 0.75. (6.17)$$

Перехід від дисперсно-кільцевого режиму до передкризового дисперсного відбувається при

$$\alpha_{AM} = 0.9999. (6.18)$$

Існування горизонтально розшарованого режиму можливе за умов незначної швидкості руху. Умови існування виражаються критерієм Тейтла-Даклера, згідно з яким в потоці існує горизонтальне розшарування якщо

$$|V_g| < V_{crit}, (6.19)$$

де критична швидкість є значенням швидкості газоподібної фази V_g , що відповідає порушенню стійкості хвиль на горизонтальній міжфазній поверхні. При порушенні умови (6.19) хвилі стають нестійкими та починають зростати, що призводить до руйнування міжфазної поверхні. Вираз для критичної швидкості має вигляд:

$$V_{crit} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\rho_f - \rho_g) g \alpha_g A}{\rho_g D \sin \theta} \right]^{1/2} (1 - \cos \theta). (6.20)$$

Кут θ (див. рис.4.4) знаходиться з рівняння:

$$\alpha_g \pi = \theta - \sin \theta \cos \theta. (6.21)$$

В кодї RELAP 5 використовується модифікований критерій Тейтла-Даклера, згідно з яким в потоці присутнє горизонтальне розшарування, якщо одночасно виконуються умови:

$$|v_g - v_f| < v_{\text{crit}} \text{ і } G_m < 3000 \text{ кг/м}^2 \text{ с. (6.22)}$$

При порушенні умов (6.22), вважається, що відбувається перехід до бульбашкового, снарядного, дисперсно-кільцевого або передкризового дисперсного режиму, в залежності від значення об'ємного вмісту пари (газу). Мінімальне значення модуля відносної швидкості, при перевищенні якого відбувається перехід складає

$$|v_g - v_f| = \frac{1}{2} v_{\text{crit}}, \text{ а для масової швидкості суміші мінімальне}$$

значення становить $G_m = 2500 \text{ кг/м}^2 \text{ с}$ (рис. 6.5).

6.2.3 Карта режимів для потоків у насосах, що характеризуються високою мірою перемішування

Дана карта режимів необхідна для розрахунку руху теплоносія у насосах, де потік характеризується високою мірою перемішування, що обумовлює нестійкість великих об'ємів (структур), зайнятих одною фазою. Карта включає бульбашковий режим при $\alpha_g \leq 0.5$, дисперсний режим при $\alpha_g \geq 0.95$ і перехідний режим при $0.5 \leq \alpha_g \leq 0.95$. На перехідному режимі потік теплоносія являє собою суміш бульбашок, розчинених у рідині, та крапель, зважених у газі. Схематичне зображення даної карти наведене на рис. 6.6.

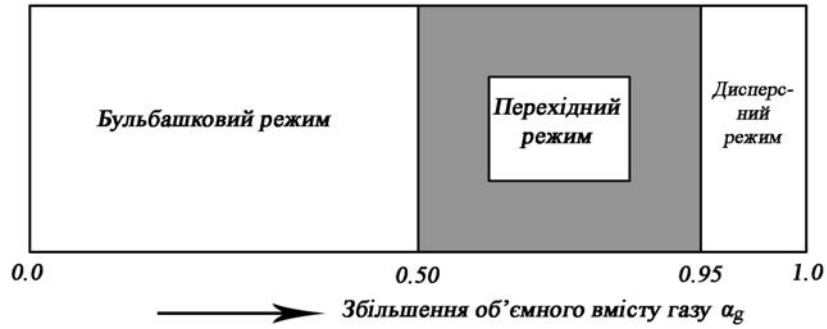


Рис.6.6. Карта режимів для потоків у насосах, що характеризуються високою мірою перемішування

6.2.4 Карта режимів для потоків у горизонтальних об'ємах в умовах конденсації пари

Дана карта режимів з'явилась лише в останніх версіях коду RELAP 5 і призначена для опису процесу конденсації пари у горизонтальних трубах поблизу виходу патрубків САОЗ. Карта

режимів будується в безрозмірних координатах $\frac{1 - \alpha_g}{\alpha_g}$ по осі

абсцис та V_g^* по осі ординат, де

$$V_g^* = \frac{X_{\text{flow}} G}{[g D \rho_g (\rho_f - \rho_g)]^{1/2}}; \quad (6.23)$$

$$X_{\text{flow}} = \frac{\alpha_g \rho_g V_g}{\alpha_g \rho_g V_g + \alpha_f \rho_f V_f}; \quad G = \alpha_g \rho_g V_g + \alpha_f \rho_f V_f.$$

де X_{flow} - витратний вміст пари (газу).

Карта режимів (рис.6.7) виконана у логарифмічному масштабі і складається з бульбашкового, пробкового, снарядного, хвильового, дисперсно-кільцевого та дисперсного режимів потоку.

Пробковий – режим перехідний між бульбашковим та снарядним, характеризується злиттям бульбашок у конгломерати менших, у порівнянні зі снарядами, розмірів.

Хвильовий- дисперсно кільцевий режим з хвилями на плівці рідини.

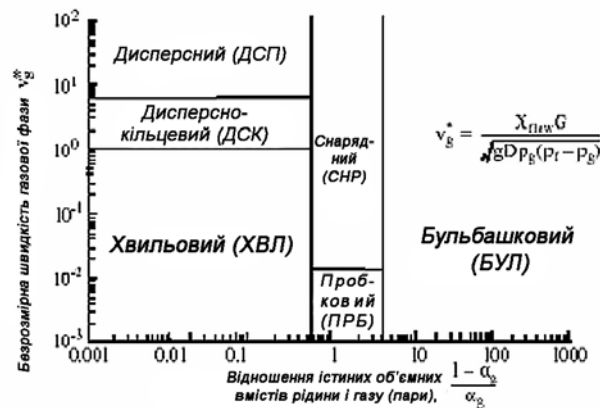


Рис. 6.7. Карта режимів для потоків у горизонтальних об'ємах в умовах конденсації пари.

Вказані 6 режимів є базовими. З міркувань забезпечення гладкості всіх функцій, що входять до замикальних співвідношень, вводяться режими, перехідні між основними. На перехідних режимах (не показаних на рис.6.7) замикальні співвідношення будуються за рахунок інтерполювання. Точні значення параметрів, що визначають області реалізації кожного режиму потоку, приведені в [10].

6.2.5 Карта режимів потоку для з'єднань

Дана карта режимів двофазного потоку використовується при розрахунках силової взаємодії між фазами, яка зводиться до міжфазного тертя та силового впливу внаслідок ефекту приєднаних мас. Відмітимо, що поняття “з'єднання” введено при побудові алгоритмів чисельного розв'язання задач теплогідраліки за допомогою скінченно-різницевої схем і обговорюється в розд. 7. Карти режимів двофазних потоків для з'єднань є аналогічними до карт режимів для об'ємів. Визначальними параметрами при побудові карти режимів для з'єднань є фазові швидкості у з'єднаннях та донорні фазові густини. Донорними називаються значення параметрів потоку, що відносяться до об'єму, звідки рідина надходить до з'єднання. Вміст пари (газу) у з'єднанні $\alpha_{g,j}^*$ розраховується по вмістах пари у сусідніх об'ємах $\alpha_{g,K}$ та $\alpha_{g,L}$, пов'язаних з даним з'єднанням, базуючись на значенні зведеної швидкості суміші j_m :

$$\alpha_{g,j}^* = w_j \alpha_{g,K} + (1 - w_j) \alpha_{g,L}, \quad (6.24)$$

$$w_j = \begin{cases} 1.0, & j_m > 0.465 \text{ м/с}, \\ x_1^2 (3 - 2x_1), & -0.465 \text{ м/с} \leq j_m \leq 0.465 \text{ м/с} \\ 0, & j_m \leq -0.465 \text{ м/с}, \end{cases} \quad (6.25)$$

$$x_1 = \frac{j_m + 0.465}{0.93}, \quad j_m = \dot{\alpha}_{g,j} v_{g,j} + \dot{\alpha}_{f,j} v_{f,j},$$

де крапкою зверху позначені донорні параметри.

Масова витрата через з'єднання визначається таким чином:

$$G_j = \dot{\alpha}_{g,j} \dot{\rho}_{g,j} |v_{g,j}| + \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} |v_{f,j}|. \quad (6.26)$$

Для з'єднань також використовуються чотири розглянуті раніше карти режимів двофазного потоку: карта для вертикальних об'ємів, карта для горизонтальних об'ємів, карта режимів для потоків у

насосах, що характеризуються високою мірою перемішування, карта режимів для потоків у горизонтальних об'ємах в умовах конденсації пари. Вони повністю аналогічні до розглянутих вище карт. Кут нахилу з'єднання φ_j визначається по кутах нахилів сусідніх об'ємів φ_K і φ_L . При цьому використовується формула аналогічна до (6.24) для $\alpha_{g,j}$, однак вона будується для синуса кута:

$$\sin \varphi_j = w_j \sin \varphi_K + (1 - w_j) \sin \varphi_L. (6.27)$$

Карта режимів для вертикальних об'ємів застосовується при $60^\circ \leq |\varphi_j| \leq 90^\circ$, а для горизонтальних об'ємів - при $|\varphi_j| \leq 30^\circ$, при $30^\circ \leq |\varphi_j| \leq 60^\circ$ застосовується інтерполяція між цими двома картами.

6.3 Міжфазне тертя

Модель, що визначає силу міжфазного тертя, необхідна для замикання рівнянь збереження кількості руху. Сила міжфазного тертя в одиниці об'єму, що входить до рівнянь збереження кількості руху, виражається через коефіцієнти міжфазного тертя:

$$F_{ig} = \alpha_g \rho_g \text{FIG} (v_g - v_f); F_{if} = \alpha_f \rho_f \text{FIF} (v_g - v_f). (6.28)$$

де F_{ig}, F_{if} – величини сил міжфазного тертя в одиниці об'єму, прикладених, відповідно, до газоподібної фази та рідкої фази. Виходячи з третього закону Ньютона, можна припустити, що ці сили рівні між собою за абсолютною величиною. Таке припущення приводить до співвідношень:

$$\alpha_g \rho_g \text{FIG} = \alpha_f \rho_f \text{FIF} = \alpha_g \rho_g \alpha_f \rho_f \text{FI}. (6.29)$$

У рівнянні різниці збереження кількості руху (див. розд. 7) член, що відповідає за міжфазне тертя, має вигляд:

$$\frac{F_{ig}}{\alpha_g \rho_g} + \frac{F_{if}}{\alpha_f \rho_f} = (FIG + FIF)(v_g - v_f). \quad (6.30)$$

З урахуванням (6.29) цей член записується як:

$$\frac{F_{ig}}{\alpha_g \rho_g} + \frac{F_{if}}{\alpha_f \rho_f} = \rho_m FI(v_g - v_f), \quad (6.31)$$

де $\rho_m = \alpha_g \rho_g + \alpha_f \rho_f$ – середня густина суміші. Коефіцієнти FIG

та FIF вимірюються в $\frac{1}{c}$. Введений в (6.29) коефіцієнт FI являє

собою загальний коефіцієнт тертя. Він відомий, як тільки відомі питомі сили міжфазного тертя F_{ig} , F_{if} :

$$FI = \frac{\frac{F_{ig}}{\alpha_g \rho_g} + \frac{F_{if}}{\alpha_f \rho_f}}{\rho_m (v_g - v_f)}. \quad (6.32)$$

Для обчислення сил міжфазного тертя в коді RELAP 5 використовуються два різних підходи, розглянуті нижче. Відмітимо, що обидва методи – метод потоку дрейфа і метод коефіцієнтів опору базуються на припущенні щодо пропорційності сили міжфазного тертя квадрату відносної швидкості v_R .

$$F_i = C_i |v_R| v_R, \quad (6.33)$$

Різниця полягає лише в способах визначення коефіцієнта пропорційності C_i .

6.3.1 Метод потоку дрейфа

Метод потоку дрейфа і пов'язані з ним параметри було розглянуто у підрозд. 3.1 і 3.4. Відмітимо, що до останнього часу єдиним методом визначення міжфазного тертя в коді RELAP був описаний у підрозд. 6.3.2 метод коефіцієнтів опору, процедура

застосування якого є досить громіздкою, а результати – не завжди достатньо точними. Застосування методу потоку дрейфа дозволяє, в деяких випадках, спростити обчислення, зробити їх більш прозорими і підвищити точність результатів. Як відзначалося у підрозділі 3.4, метод потоку дрейфа призначений для аналізу відносного руху фаз у випадках, коли параметри такого руху визначаються, в першу чергу, структурою потоку і практично не залежать від витрат фаз. Така ситуація має місце для бульбашкового та снарядного режимів у вертикальних потоках. Цими режимами обмежене застосування методу потоку дрейфа для розрахунку міжфазного тертя в коді RELAP 5.

Реалізація методу включає два етапи. На *першому етапі* розглядається ефект впливу сили тертя на стінці для кожної фази на відносну швидкість між фазами і будується допоміжний вираз для сили міжфазного тертя. На *другому етапі* сила міжфазного тертя в одиниці об'єму обчислюється, використовуючи формулу (6.33) і застосовуючи параметри потоку дрейфа для представлення відносної швидкості. Прирівнювання виразів для сили міжфазного тертя, отриманих на першому і другому етапах, дозволяє визначити невідомий коефіцієнт пропорційності C_i та визначити сили міжфазного тертя за допомогою (6.33).

I етап. Враховуючи той факт, що метод потоку дрейфа застосовується у випадках, коли інерційні сили не здійснюють впливу на відносний рух фаз, запишемо *квазістаціонарні* рівняння збереження кількості руху, нехтуючи ефектами приєднаних мас та конвективними членами:

$$0 = -\alpha_g \frac{dP}{dx} - F_{ig} - F_{wg} - \alpha_g \rho_g g, \quad (6.34)$$

$$0 = -\alpha_f \frac{dP}{dx} + F_{if} - F_{wf} - \alpha_f \rho_f g, \quad (6.35)$$

де F_{wg}, F_{wf} - сили тертя на стінці в одиниці об'єму, прикладені, відповідно, до газоподібної і рідкої фази.

Виключаючи з цих рівнянь градієнт тиску, шляхом віднімання від рівняння (6.34), помноженого почленно на α_g , рівняння (6.35) помноженого почленно на α_f , отримаємо:

$$\alpha_f F_{ig} + \alpha_g F_{if} = \alpha_f \alpha_g (\rho_f - \rho_g) g - \alpha_f F_{wg} + \alpha_g F_{wf}, (6.36)$$

звідки, враховуючи, що сили міжфазного тертя, що діють на кожну фазу в одиниці об'єму, рівні, $F_{ig} = F_{if} = F_i$, будемо мати:

$$F_i = \alpha_f \alpha_g (\rho_f - \rho_g) g - \alpha_f F_{wg} + \alpha_g F_{wf}. (6.37)$$

З (6.37) випливає, що сила міжфазного тертя в одиниці об'єму врівноважується підіймальною силою та силою тертя на стінці. Вираз (6.37) може використовуватися безпосередньо для обчислення загального коефіцієнту міжфазного тертя FI, однак з (6.37) можна одержати від'ємні значення F_i при переважному впливові сили тертя на стінці $\alpha_f F_{wg}$. Від'ємні значення F_i , звичайно, нефізичні, оскільки сила тертя повинна зменшувати, а не збільшувати відносну швидкість між фазами. Другою проблемою є вигляд функціональної залежності (6.37), що визначає F_i як функцію фазових швидкостей V_g , V_f (через тертя на стінці), а не як функцію відносної швидкості, в той час як очевидно, що міжфазне тертя пов'язане саме з відносним рухом фаз. Крім того, слід врахувати, що під час руху двофазного теплоносія у великому об'ємі вплив тертя на стінці є незначним. Наведені недоліки виразу (6.37) усуваються шляхом виключення сил тертя на стінці. Для цього покладемо

$$F_{wg} = \alpha_g F_{wt}, F_{wf} = \alpha_f F_{wt}, (6.38)$$

де F_{wt} – загальна сила тертя на стінці в одиниці об'єму двофазної суміші та підставимо (6.38) до (6.37). В результаті отримаємо:

$$F_i = \alpha_f \alpha_g (\rho_f - \rho_g) g. (6.39)$$

Згідно з (6.39) сила міжфазного тертя врівноважується підіймальною силою.

Враховуючи, що згідно з рівняннями (4.13) загальна сила тертя на стінці визначається співвідношенням:

$$F_{wt} = \alpha_f \rho_f FWF v_f + \alpha_g \rho_g FWG v_g, (6.40)$$

одержимо значення сил тертя на стінці в одиниці об'єму, прикладених до окремих фаз:

$$\begin{aligned} F_{wf} &= \alpha_f (\alpha_f \rho_f FWF v_f + \alpha_g \rho_g FWG v_g), \\ F_{wg} &= \alpha_g (\alpha_f \rho_f FWF v_f + \alpha_g \rho_g FWG v_g). \end{aligned} (6.41)$$

Порівняння сил тертя на стінці (6.41) з членами рівнянь збереження кількості руху (4.13), які відповідають силам тертя на стінці, прикладеним до фаз $(\alpha_g \rho_g FWG v_g, \alpha_f \rho_f FWF v_f)$, показує, що з метою врахування зміни способу розподілу загальної сили тертя на стінці на сили, прикладені до окремих фаз, у праву частину рівнянь збереження кількості руху необхідно додати такі члени:

$$\begin{aligned} f_{wf} v_f - f_{wg} v_g, & \text{ у рівняння для рідкої фази,} \\ f_{wg} v_g - f_{wf} v_f, & \text{ у рівняння для газоподібної фази,} \end{aligned} (6.42)$$

де

$$f_{wg} = \alpha_f \alpha_g \rho_g FWG, \quad f_{wf} = \alpha_g \alpha_f \rho_g FWF. (6.43)$$

В коді RELAP 5 існує простий механізм врахування додаткових членів (6.42), коли вони домножаються на спеціальні коефіцієнти f_x , що дорівнюють одиниці при використанні моделі потоку дрейфа і дорівнюють нулеві при використанні іншої моделі.

II етап. Рівняння (6.39) знову не слід розглядати як визначальне для обчислення загальної сили міжфазного тертя F_i , оскільки воно не містить зв'язку сили F_i з відносною швидкістю. Виходячи з даних експерименту можна стверджувати [10], що зв'язок між силою міжфазного тертя і відносною швидкістю має вигляд:

$$F_i = C_i |v_R| v_R, (6.44)$$

де C_i – невідомий коефіцієнт пропорційності, V_R - відносна швидкість руху фаз.

Концепція методу потоку дрейфа припускає, що відносна швидкість повинна визначатися з урахуванням ефектів неоднорідності при проведенні осереднення параметрів потоку (див. підрозд. 3.4.3). Осереднена відносна швидкість визначається через осереднену швидкість потоку дрейфа $\langle j_{gf} \rangle$ як:

$$\bar{v}_R = \frac{\langle j_{gf} \rangle}{\langle \alpha_g (1 - \alpha_g) \rangle}. \quad (6.45)$$

На основі (6.45), враховуючи формули (3.156) і (3.158) (індекс “1” відповідає рідкій фазі, а індекс “2” – газоподібній), отримаємо, що осереднена відносна швидкість буде представлятися зваженою різницею осереднених швидкостей фаз:

$$v_R = C_1 v_g - C_0 v_f, \quad (6.46)$$

де $C_1 = \frac{1 - \alpha_g C_0}{1 - \alpha_g}$, C_0 - параметр Зубера-Фіндлера, знаки

осереднення для простоти опущені.

З (6.44) і (6.46) дістанемо:

$$F_i = C_i \left[C_1 v_g - C_0 v_f \right] \left(C_1 v_g - C_0 v_f \right). \quad (6.47)$$

З означення швидкостей дрейфа (3.21)-(3.22) випливає, що швидкість потоку дрейфа виражається через швидкість дрейфа газоподібної фази $v_{gj} = (1 - \alpha_g)(v_g - v_f)$ (див. (3.21)):

$$j_{gf} = \alpha_g v_{gj}. \quad (6.48)$$

Використовуючи (6.45) і (6.48) і опускаючи знаки осереднення, можемо записати наступний вираз для відносної швидкості:

$$v_R = \frac{v_{gj}}{\alpha_g}, \quad (6.49)$$

Підставляючи цей вираз у (6.44) і прирівнюючи результат підстановки до (6.39), одержимо наступну формулу, що визначає коефіцієнт C_i :

$$C_i = \frac{\alpha_g \alpha_f^3 (\rho_f - \rho_g) g}{v_{gj}^2}. \quad (6.50)$$

Тепер можна побудувати остаточне співвідношення для визначення загального коефіцієнту міжфазного тертя FI . Для цього модифікуємо рівняння (6.32), використовуючи в знаменнику правої частини замість відносної швидкості $v_g - v_f$ відносну швидкість, що дається (6.46). Отримаємо:

$$FI = \frac{F_{ig}/\alpha_g \rho_g + F_{if}/\alpha_f \rho_f}{\rho_m (C_1 v_g - C_0 v_f)}. \quad (6.51)$$

Для обчислення коефіцієнту FI за (6.51) необхідно визначити силу міжфазного тертя F_i з (6.47), (6.50) та врахувати, що $F_{ig} = F_{if} = F_i$.

Зауважимо, що при використанні методу потоку дрейфа для обчислення міжфазного тертя, відносна швидкість v_R (6.46) використовується і в рівнянні різниці кількості руху замість відносної швидкості $v_{gf} = v_g - v_f$. Слід зазначити, що для обчислення параметрів потоку дрейфа C_1, C_0, v_{gj} використовуються різні кореляції відповідно до геометрії і режиму потоку [11].

6.3.2 Метод коефіцієнтів опору

Метод коефіцієнтів опору використовується для розрахунку міжфазного тертя для всіх режимів, за виключенням бульбашкового та снарядного у вертикальних потоках. В основі методу лежать кореляції для коефіцієнтів опору та для щільності площі міжфазної поверхні, побудовані для різних режимів потоку. Метод коефіцієнтів опору застосовувався попередніми версіями коду RELAP для обчислення міжфазного тертя для всіх режимів.

Базовим співвідношенням методу є вираз для сили опору F , яка діє на поодинокі включення (бульбашка, снаряд, крапля), що рухається по відношенню до несучої рідини:

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A, \quad (6.52)$$

де ρ – густина несучої рідини, v – швидкість включення по відношенню до несучої рідини, C_D – коефіцієнт опору, A – площа лобового опору.

Сутність методу коефіцієнтів опору полягає у розповсюдженні співвідношення (6.52), що визначає силу опору для поодинокого включення, на випадок руху групи включень. При цьому ключовим параметром, пов'язаним із концентрацією включень, виступає площа міжфазної поверхні в одиниці об'єму a_{gf} . За допомогою цього параметру силу опору, що діє на групу включень з боку несучої рідини можна представити таким чином:

$$F_i = \frac{1}{8} \rho_c |v_g - v_f| (v_g - v_f) C_D S_F a_{gf} = C_i |v_g - v_f| (v_g - v_f). \quad (6.53)$$

де F_i – сила опору, що діє на включення в одиниці об'єму,

$$C_i = \frac{1}{8} \rho_c C_D S_F a_{gf}, \quad \rho_c \text{ - густина несучої фази, } a_{gf} \text{ - площа}$$

міжфазної поверхні в одиниці об'єму, S_F – коефіцієнт форми. Додатковий множник $1/4$ виникає внаслідок множення площі лобового опору сферичної частинки $A = \pi r^2$ на кількість частинок

в одиниці об'єму $\frac{a_{gf}}{4\pi r^2}$, а коефіцієнт S_F враховує

несферичність частинок. Оскільки сила (6.53) викликана різницею швидкостей руху фаз, вона має розглядатися як сила міжфазного тертя в одиниці об'єму.

Подальше використання моделі коефіцієнтів опору зводиться до задання співвідношень для густини несучої фази, коефіцієнту опору, щільності площі міжфазної поверхні та коефіцієнту форми для різних режимів течії. Якщо вказані співвідношення задані, сила міжфазного тертя в одиниці об'єму F_1 визначається з (6.53), після чого, враховуючи $F_{ig} = F_{if} = F_1$, з формули (6.32) знаходиться загальний коефіцієнт міжфазного тертя FI .

6.3.2.1 Дисперсні режими потоку.

Течії зважених у потоці несучої фази мікрровключень називаються *дисперсними*. Дисперсні режими потоку включають бульбашковий, дисперсний, дисперсні передкризовий та післякризовий режими. Для бульбашкового режиму у вертикальних потоках використовується описана раніше модель потоку дрейфа. Для бульбашкового режиму у невертикальних потоках та всіх крапельних режимів (дисперсний, дисперсний до- та післякризовий режими) використовується модель коефіцієнтів опору.

Бульбашки або краплі за припущенням є сферичними частинками, з розподілом ймовірності величини діаметра частинки у формі Нікуями–Танасави [11]:

$$p^* = 4d^{*2} e^{-2d^*}, (6.54)$$

де $d^* = \frac{d}{d'}$, d' – найбільш ймовірний діаметр частинки, p^* –

ймовірність появи у потоці частинки з безрозмірним діаметром d^* . При цьому було показано, що середній діаметр частинки $d_0 = 1.5d'$, а площа міжфазної поверхні в одиниці об'єму дається виразом:

$$a_{gf} = \frac{6\bar{a}}{d'} - \frac{\int d^{*2} p^* dd^*}{\int d^{*3} p^* dd^*} = \frac{2.4\bar{a}}{d'}, (6.55)$$

де $\bar{\alpha} = \alpha_g$ для бульбашок та $\bar{\alpha} = \alpha_f$ для крапель. Виражаючи a_{gf} через середній діаметр d_0 , будемо мати:

$$a_{gf} = \frac{3.6 \bar{\alpha}}{d_0}. \quad (6.56)$$

Середній діаметр d_0 припускається рівним половині максимально можливого діаметра частинки d_{max} : $d_0 = 1/2 d_{max}$. Максимально можливий діаметр частинки визначається з умов стійкості частинок, зважених у потоці. Стійкість частинок порушується за умов досягнення критичного значення числа Вебера [8]. Максимально можливий діаметр стійкого існування частинки пов'язується з критичним числом Вебера співвідношенням:

$$We_{cr} = \frac{d_{max} \rho_c (v_g - v_f)^2}{\sigma} \quad (6.57)$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу.

При $d > d_{max}$ включення будуть нестійкими та будуть дробитися під дією гідродинамічних сил, обумовлених відносним рухом фаз. Критичні значення числа Вебера відрізняються для різних режимів потоку: $We_{cr} = 10.0$ для бульбашкового режиму, $We_{cr} = 3.0$ для дисперсного передкризового та $We_{cr} = 12.0$ для дисперсного і дисперсного післякризового режимів. Ці значення визначаються експериментально.

Коефіцієнт опору задається співвідношенням:

$$C_D = \frac{24(1.0 + 0.1 Re_p^{0.75})}{Re_p}, \quad (6.58)$$

де число Рейнольдса частинки Re_p визначається як:

$$\text{Re}_p = \frac{|v_g - v_f| d_0 \rho_c}{\mu_m} \quad (6.59)$$

де ρ_c - густина несучої фази, тобто $\rho_c = \rho_f$ для бульбашкового режиму і $\rho_c = \rho_g$ для крапельних режимів, μ_m - в'язкість суміші:

$$\mu_m = \frac{\mu_f}{\alpha_f} \quad \text{для бульбашкового режиму,} \quad \mu_m = \frac{\mu_g}{(\alpha_g)^{2.5}} \quad \text{для}$$

дисперсного передкризового і $\mu_m = \mu_g$ для дисперсного та дисперсного післякризового режимів. Як випливає з (6.59), у визначенні Re_p беруть участь сили інерції, пов'язані з відносним рухом фаз.

6.3.2.2 *Снарядний режим.*

Для неvertикальної геометрії, коли застосовується модель коефіцієнтів опору, снарядна течія моделюється як сукупність бульбашок Тейлора, розділених рідкими плівками, що містять малі бульбашки (рис.6.8).

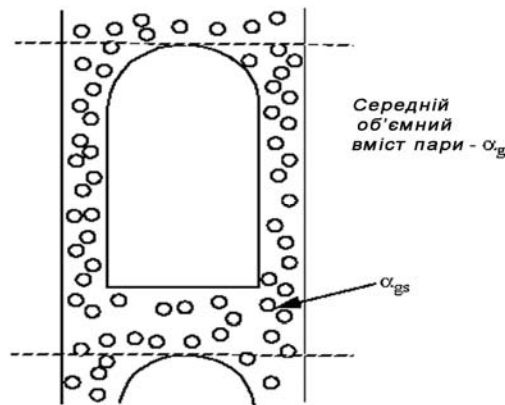


Рис.6.8. Снарядний режим течії.

Діаметр бульбашки Тейлора має порядок діаметра труби, а довжина бульбашки може складати від 1 до 100 діаметрів труби. Позначимо α_{gs} середній об'ємний вміст пари (газу) у рідкій плівці поблизу стінки та у рідких пробках між снарядами (тобто α_{gs} це об'єм пари (газу) в одиниці об'єму плівки і пробки). Тоді об'ємна концентрація поодиноких бульбашок Тейлора, α_b , виражається як:

$$\alpha_b = \frac{\alpha_g - \alpha_{gs}}{1 - \alpha_{gs}}. (6.60)$$

Площа фронтальної поверхні бульбашки Тейлора, віднесена до одиниці об'єму, дорівнює $\frac{\alpha_b}{L}$, де L - довжина контрольного об'єму. Міжфазна поверхня в одиниці об'єму a_{gf} в даному випадку приймається рівною поверхні лобового опору і буде дорівнювати сумі міжфазної поверхні для бульбашок Тейлора та для дрібних бульбашок:

$$a_{gf} = \frac{\alpha_b}{L} + \left(\frac{3.6\alpha_{gs}}{d_0} \right) (1 - \alpha_b), (6.61)$$

де d_0 – середній діаметр малих бульбашок.

Для забезпечення гладкості кореляцій для міжфазного тертя при переході до та від снарядного режиму до інших режимів, величина α_{gs} розглядається як параметр, що залежить від α_g та змінюється від α_{BS} для переходу від бульбашкового режиму до снарядного до величини, близької до нуля при переході від снарядного до дисперсно-кільцевого режиму:

$$\alpha_{gs} = \alpha_{BS} \exp \left[-8 \left(\frac{\alpha_g - \alpha_{BS}}{\alpha_{SA} - \alpha_{BS}} \right) \right] \quad (6.62)$$

Коефіцієнт опору для бульбашок Тейлора у випадку невертикальних потоків дається формулою:

$$C_D = 10.9 \left(\frac{D'}{D} \right) (1 - \alpha_b)^3 \quad (6.63)$$

де D' - діаметр бульбашки Тейлора, а α_b знаходиться з (6.60), беручи до уваги (6.62).

Коефіцієнт опору для малих бульбашок у невертикальних потоках визначається співвідношенням (6.58).

6.3.2.3 Дисперсно-кільцевий режим.

Дисперсно-кільцевий режим двофазного потоку характеризується наявністю рідкої плівки вздовж стінок труби та газоподібного ядра із зваженими рідкими краплями, що займає центр труби. Позначимо через α_{ff} середній об'ємний вміст рідкої плівки (частка рідкої плівки в одиниці об'єму суміші). Тоді з простих геометричних викладок, беручи до уваги формулу (6.56), отримаємо вираз для площі міжфазної поверхні в одиниці об'єму:

$$a_{gf} = \left(\frac{4C_{ann}}{D} \right) (1 - \alpha_{ff})^{1/2} + \left(\frac{3.6\alpha_{fd}}{d_0} \right) (1 - \alpha_{ff}), \quad (6.64)$$

де C_{ann} - параметр, необхідний для врахування хвиль на поверхні рідкої плівки, α_{fd} - об'ємний вміст рідких крапель у газоподібному ядрі:

$$\alpha_{fd} = \frac{\alpha_f - \alpha_{ff}}{1 - \alpha_{ff}}, \quad (6.65)$$

d_0 – середній діаметр краплі. Згідно з (6.65) площа міжфазної поверхні для дисперсно-кільцевого режиму подається у вигляді суми поверхонь рідкої плівки (перший доданок) та зважених у ядрі потоку крапель (другий доданок).

Для кільцевого режиму краплі у ядрі відсутні, отже $\alpha_{ff} = \alpha_f$, $\alpha_{fd} = 0$.

Для розрахунку величини α_{ff} використовують такі кореляції.

Для вертикальних потоків:

$$\alpha_{ff} = \alpha_f C_f \exp \left[-7.5 \times 10^{-5} \left(\frac{\alpha_g v_g}{u_c} \right)^6 \right] \quad (6.66)$$

де u_c - критична зведена швидкість, що розраховується за допомогою (6.7), (6.8) та визначає перехід від снарядного режиму до дисперсно-кільцевого внаслідок виносу крапель.

Для горизонтальних потоків аналогічне співвідношення має вигляд:

$$\alpha_{ff} = \alpha_f C_f \exp \left[-4.0 \times 10^{-5} \left(\frac{|v_g - v_f|}{v_{gL}} \right)^6 \right], \quad (6.67)$$

де v_{gL} - критична швидкість, що визначає границю існування горизонтально розширеної течії та дається формулою (6.20). Коефіцієнт C_f , що входить до формул (6.66) і (6.67) має вигляд:

$$C_f = 1.0 - 10^{-4} \left(\alpha_f \rho_f |v_f| \frac{D}{\mu_f} \right)^{0.25}. \quad (6.68)$$

Для дисперсно-кільцевого режиму неможливо представити процес обтікання газом рідкої плівки як процес обтікання деякого включення, як це вимагається в методі коефіцієнтів опору. Тому

коефіцієнт опору C_D для рідкої плівки, який необхідно задати для розрахунку за формулою (6.53), приймається рівним коефіцієнту міжфазного тертя f_i , що визначається кореляціями, окремими для ламінарного та турбулентного режимів течії, через газове число Рейнольдса

$$Re_g = \frac{\rho_g |v_g - v_f| D_g}{\mu_g}, \quad \text{де} \quad D_g = \alpha_g^{1/2} D$$

– еквівалентний змочений діаметр, μ_g – в'язкість газоподібної фази.

Вказані кореляції мають вигляд:

$$f_i = \begin{cases} \frac{64}{Re_g}, & Re_g \leq 500 \\ \frac{1500 - Re_g}{1000} \frac{64}{Re_g} + \frac{Re_g - 500}{1000} 0.02 \left\{ 1 + 150 \left[1 - (1 - \alpha_{ff})^{1/2} \right] \right\}, & 500 < Re_g < 1500, \\ 0.02 \left\{ 1 + 150 \left[1 - (1 - \alpha_{ff})^{1/2} \right] \right\}, & Re_g \geq 1500. \end{cases}$$

(6.69)

Коефіцієнт опору для крапель визначається за допомогою (6.58).

6.3.2.4 Вертикально розшарований режим.

В моделі теплогідравліки двофазного потоку коду RELAP 5 міжфазне тертя у з'єднанні j , що знаходиться вище об'єму з вертикально розшарованим режимом потоку (об'єм К, рис. 6.9), обчислюється виходячи з об'ємного вмісту пари (газу) у об'ємі L , що знаходиться над цим з'єднанням. Об'ємний вміст пари (газу) $\alpha_{g,j}^*$, необхідний для розрахунку сили міжфазного тертя у з'єднанні j , визначається формулою:

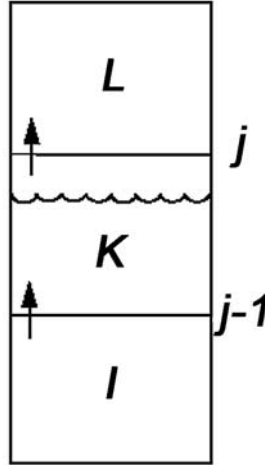


Рис.6.9. До розрахунку міжфазного тертя для вертикально розширеного режиму потоку

$$\alpha_{g,j}^* = w_j \cdot \alpha_{g,K}^* + (1 - w_j) \cdot \alpha_{g,L}^* \quad (6.70)$$

Вираз (6.70) подібний до (6.24)-(6.25), за виключенням представлення об'ємного вмісту пари (газу) у об'ємі К. На відміну від (6.24)-(6.25) у формулі (6.70) замість $\alpha_{g,K}$ використовується значення $\alpha_{g,K}^*$, що визначається формулою:

$$\alpha_{g,K}^* = \text{strat} \cdot \alpha_{g,L}^* + (1 - \text{strat}) \cdot \alpha_{g,K} \quad (6.71)$$

де множник strat приймає значення між 0 та 1.

Для об'єму з вертикально розширеним режимом потоку $\text{strat}=1$ і $\alpha_{g,K}^* = \alpha_{g,L}^*$, а отже, згідно з (6.25) $\alpha_{g,j}^* = \alpha_{g,L}^*$. Для об'ємів з відсутністю вертикального розширення $\text{strat}=0$, $\alpha_{g,K}^* = \alpha_{g,K}$, а $\alpha_{g,j}^*$ визначається співвідношенням (6.24). Для забезпечення

гладкості переходу між цими граничними випадками вводиться окреме співвідношення для множника strat:

$$\text{strat} = \text{strat1} \times \text{strat2}, (6.72)$$

$$\text{strat1} = 1 - e^{-0,5\alpha_{f,L}}, \quad \text{strat2} = 2\left(1 - \frac{V_m}{V_{Tb}}\right), (6.73)$$

де V_{Tb} – швидкість підйому бульбашок Тейлора, визначається формулою (6.2); v_m – середня швидкість суміші, яка обчислюється за такими формулами:

$$v_m = \frac{G_m}{\rho_m}, \quad G_m = \alpha_g \rho_g |v_g| + \alpha_f \rho_f |v_f|, (6.74)$$

$$\rho_m = \alpha_g \rho_g + \alpha_f \rho_f.$$

Значення обох множників strat1 і strat2 знаходяться між 0 і 1. Множник strat1 призначений для забезпечення плавності переходу до ситуації, в якій об'єм L не містить рідини і вертикально розшарований режим потоку не реалізується. Множник strat2 нівелює ефект вертикального розшарування у випадку, коли перестають виконуватися умови реалізації вертикально розшарованого режиму потоку (6.13).

Для з'єднання j-1, що знаходиться під об'ємом з вертикально розшарованим режимом потоку, використовується дещо інший підхід. Хоча формули (6.72) та (6.73) зберігають силу, проте множник strat1 обчислюється виходячи з положення рівню розшарування у об'ємі K:

$$\text{strat1} = 20(\alpha_{\text{level}} - 0,05), (6.75)$$

$$\text{де } \alpha_{\text{level}} = \frac{\alpha_{g,L} - \alpha_{g,K}}{\alpha_{g,L} - \alpha_{g,I}}. (6.76)$$

У (6.76) величина α_{level} являє собою безрозмірне значення положення рівня розшарування всередині об'єму K.

6.3.2.5 Горизонтально розшарований режим.

У випадку горизонтально розширеного режиму двофазного потоку вираз для площі міжфазної поверхні в одиниці об'єму знаходиться з простих геометричних міркувань (див рис.4.4). Він має вигляд:

$$a_{gf} = 4C_{st} \frac{\sin \theta}{\pi D}, (6.77)$$

де C_{st} – коефіцієнт, необхідний для врахування хвиль на міжфазній поверхні. Як правило, C_{st} покладається рівним одиниці. Аналогічно дисперсно-кільцевому режиму, у рівнянні (6.53) замість коефіцієнту опору C_D використовують коефіцієнт міжфазного тертя f_i :

$$f_i = \max \left(\frac{64}{Re_i}, \frac{0.3164}{Re_i^{0.25}} \right), (6.78)$$

$$Re_i = \frac{\rho_g |v_g - v_f| D_i}{\mu_g},$$

де D_i – еквівалентний змочений діаметр, що визначається для горизонтально розширеного режиму таким співвідношенням:

$$D_i = \frac{\alpha_g \pi D}{\theta + \sin \theta} (6.79)$$

6.3.2.6 *Обернений дисперсно-кільцевий режим.*

Співвідношення для розрахунку міжфазного тертя для післякризових обернених режимів отримуються аналогічно докризовим, відміна полягає у тому, що *рідина та газ міняються місцями*.

У випадку оберненого дисперсно-кільцевого режиму ядро потоку складається з рідини зі зваженими у ній бульбашками, а вздовж стінок розташовується газоподібна плівка. Таким чином, загальна сила міжфазного тертя являє собою суму сил міжфазного тертя між

бульбашками і рідиною в ядрі потоку та між плівкою пари і рідким ядром.

Коефіцієнт опору для бульбашок визначається формулою (6.58), за умови $We_{cr} = 10,0$. Міжфазна поверхня між бульбашками та рідиною в одиниці об'єму, $a_{gf\ bub}$ знаходиться з формули:

$$a_{gf\ bub} = \frac{3,6\alpha_{gb}}{d_0}(1 - \alpha_B), (6.80)$$

де α_{gb} – об'ємний вміст пари (газу) у рідкому ядрі; d_0 – середній діаметр бульбашки; α_B – частка загального об'єму, зайнята паровою плівкою (кільцем).

Для α_{gb} справедливо:

$$\alpha_{gb} = \frac{V_{\text{газ в ядрі}}}{V_{\text{ядро}}} = \frac{V_{\text{газ в суміші}} - V_{\text{газове кільце}}}{V_{\text{суміші}} - V_{\text{газове кільце}}} = \frac{\alpha_g - \alpha_B}{1 - \alpha_B}.$$

Для другої складової загального міжфазного тертя, тертя між газоподібним кільцем та рідким ядром, коефіцієнт опору визначається співвідношенням:

$$C_D = 4 \left[0,005 + A(\delta^*)^B \right], (6.81)$$

де

$$\lg A = -0,56 + 9,07/D^*; \quad B = 1,63 + 4,74/D^*; \quad \delta^* = \delta \left[\frac{(\rho_f - \rho_g)g}{\sigma} \right]^{1/2} \quad (6.82).$$

В виразах (6.82): δ – товщина газоподібної плівки, D^* – безрозмірний діаметр труби, що визначається формулою (6.1).

Вираз для площі міжфазної поверхні між газоподібною плівкою та рідким ядром в одиниці об'єму, $a_{gf\ ann}$, має вигляд:

$$a_{gf\ ann} = \frac{4}{D}(1 - \alpha_B)^{1/2}. \quad (6.83)$$

6.3.2.7 *Обернений снарядний режим.*

Обернений снарядний режим двофазного потоку характеризується наявністю крапель значних розмірів з розчиненими у них бульбашками пари (рідких снарядів), що відокремлені від стінок і один від одного газоподібною плівкою зі зваженими малими краплями рідини. Для цього режиму в коді RELAP 5 модель міжфазного тертя враховує тертя між рідкими снарядами та газоподібною плівкою поблизу стінки та тертя між газом та краплями рідини всередині плівки. Отже внеском тертя між малими бульбашками всередині рідких снарядів та рідиною, що їх оточує, нехтують. Припускається, що снаряди видовжені настільки сильно, що внеском тертя на їх кінцях можна знехтувати. Співвідношення для розрахунку міжфазного тертя аналогічні розглянутим вище для снарядного режиму. Зокрема, об'ємний вміст рідких снарядів, вміст крапель у паровому ядрі та площа міжфазної поверхні отримуються простою переміною місць рідкої та газоподібної фаз у співвідношеннях для снарядного режиму. Під час розрахунку середнього діаметра малих крапель приймається $We_{cr} = 12$.

6.4 Ефект приєднаних мас

Ефект приєднаних мас пов'язаний з дією сил опору, які виникають внаслідок прискореного руху включень відносно несучої фази. Виникнення даних сил опору пояснюється тим, що частина роботи сили, внаслідок якої відбувається рух, витрачається на формування тривимірного поля швидкості рідини навколо частинки. У випадку прямолінійного прискореного руху сферичної частинки в великому об'ємі ідеальної рідини вдається отримати аналітичний вираз для величини сили опору R , що діє з боку рідини на частинку [4]:

$$R = -\frac{2}{3}\pi d^3 \rho_f \frac{dv}{dt}, \quad (6.84)$$

де d - діаметр, v - швидкість частинки, ρ_f - густина рідини.

Таким чином, рівняння руху частинки матиме вигляд:

$$\frac{4}{3}\pi d^3 (\rho_s + \rho_f / 2) \frac{dv}{dt} = F, (6.85)$$

де ρ_s - густина частинки, F - величина сили, під дією якої відбувається рух частинки.

З рівняння (6.85) випливає, що сферична частинка рухається в ідеальній рідині під дією деякої сили F так само, як вона рухалася б в пустоті, якби її маса збільшилася на величину $\frac{2}{3}\pi d^3 \rho_f$, яка зветься *приєднаною масою* і дорівнює половині маси рідини, що витіснена частинкою.

Нагадаємо, що у випадку рівномірного прямолінійного руху сферичної частинки в ідеальній рідині, сила опору дорівнює нулеві (парадокс Даламбера)

Сила опору, пов'язана з ефектом приєднаних мас, називається *динамічним опором*. Сила динамічного опору в одиниці об'єму в коді RELAP 5 визначається таким співвідношенням [10]:

$$FA_{gf} = -C\alpha_g (1 - \alpha_g) \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (v_g - v_f) \right], (6.86)$$

де $\rho = \alpha_g \rho_g + (1 - \alpha_g) \rho_f$.

Коефіцієнт C вводиться з метою урахування несферичності частинок, впливу їх концентрації та урахування інших факторів, що відрізняють реальні випадки від ідеального. Множник $\alpha_g (1 - \alpha_g)$ служить для забезпечення гладкості переходу від випадку відсутності газу ($\alpha_g = 0$) до випадку відсутності рідини ($\alpha_g = 1.0$). Для обчислення коефіцієнту C в коді RELAP 5 використовуються такі співвідношення [10]:

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(1 + 2\alpha_g)}{(1 - \alpha_g)}, & 0 \leq \alpha_g \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3 - 2\alpha_g}{\alpha_g} \right), & \frac{1}{2} \leq \alpha_g \leq 1. \end{cases} \quad (6.87)$$

Як бачимо, просторовими похідними, присутніми у відповідних членах рівнянь (4.13), у виразі для сили динамічного опору (6.86) нехтують. У першу чергу, це пов'язано з погіршенням властивостей скінченно-різницевої схеми, що використовується при чисельному розв'язанні, при їх урахуванні (конвективні похідні нелінійні). Хоча логічно було б покласти $C=0$ для розшарованих режимів течії, співвідношення (6.87) використовуються для всіх режимів. Зауважимо, що коефіцієнт приєднаних мас визначається по карті режимів для з'єднань.

6.5 Тертя на стінці

В рис.6.10. По осі ординат поставити L_g замість l_g

При визначенні сили тертя на стінці в моделі коду RELAP 5 у відповідні вирази включаються лише члени, пов'язані з дотичними напруженнями на стінках. Зменшення кількості руху теплоносія внаслідок різкої зміни площі поперечного перерізу каналу обчислюється за допомогою окремої моделі, теж саме стосується і втрат у колінах та інших ділянках складної геометрії, для яких вводяться спеціальні коефіцієнти втрат.

До рівнянь збереження кількості руху (4.13) входять члени $FWF(\alpha_f \rho_f v_f A)$ та $FWG(\alpha_g \rho_g v_g A)$, які характеризують сили тертя на стінках, прикладені, відповідно, до рідкої та газоподібної фази. Згідно з підходом, прийнятим при побудові моделі тертя на стінці коду RELAP 5 [10], припускається, що ці сили можна визначити з квазістаціонарних рівнянь збереження кількості руху (6.34),(6.35). Для визначення сил тертя на стінці, що діють на окремі фази, спочатку, за допомогою методу Локкарта-Мартініеллі, обчислюється загальна сила тертя на стінці, що діє на двофазний потік. Потім, використовуючи метод Чисхолма, ця сила розділяється на сили, прикладені до окремих фаз. Зауважимо, що метод Чисхолма застосовується лише разом з методом коефіцієнтів опору для обчислення міжфазного тертя, оскільки у випадку застосування методу потоку дрейфа, загальна сила тертя на стінці розподіляється між фазами пропорційно об'ємному вмісту фаз.

6.5.1 Метод Локкарта-Мартініеллі

Метод Локкарта-Мартініеллі детально описано у розд. 3, тому зараз ми обмежимося лише розглядом особливостей застосування цього методу у моделі тертя на стінці коду RELAP 5.

Як відзначалося у розд. 3, рівняння суми збереження кількості руху (сума рівнянь (4.13)) може бути представленим у вигляді:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{2\phi} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_A + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_G + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{WF}, \quad (6.88)$$

де $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{2\phi}$ - повний градієнт тиску в двофазному потоці; через

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_A, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_G, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{WF} \text{ позначено всі члени суми рівнянь (4.13),}$$

пов'язані, відповідно, з дією інерційних сил, дією гравітаційних сил та дією сил тертя на стінці. Таким чином, повна втрата (спадання) тиску в двофазному потоці визначається сумою втрат тиску внаслідок дії трьох вищезгаданих сил.

В методі Локкарта-Мартініеллі припускається, що потік є стаціонарним і втратами тиску внаслідок дії інерційних і гравітаційних сил можна знехтувати у порівнянні з втратами тиску внаслідок дії сил тертя на стінці та сил міжфазного тертя. Останнє припущення фактично означає, що замість повних рівнянь збереження кількості руху (4.13) за основу беруться квазістаціонарні рівняння (6.34), (6.35). Повний градієнт тиску, обумовлений дією сил тертя на стінці, записується у вигляді:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{2\phi} = -(\alpha_g \rho_g v_g FWG + \alpha_f \rho_f v_f FWF). \quad (6.89)$$

У відповідності до підходу Локкарта-Мартініеллі, градієнт тиску внаслідок тертя на стінці у двофазному потоці обчислюється через градієнт тиску $\left(\frac{dP}{dx}\right)_f$ в однофазному потоці рідини в тому ж каналі

і при тій самій масовій витраті рідини, що і у двофазному потоці:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{2\phi} = \phi_f^2 \left(\frac{dP}{dx}\right)_f, \quad (6.90)$$

або через градієнт тиску $\left(\frac{dP}{dx}\right)_g$ в однофазному потоці газу за аналогічних умов:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{2\phi} = \phi_g^2 \left(\frac{dP}{dx}\right)_g. \quad (6.91)$$

Множники ϕ_f та ϕ_g представляють собою введені у розд. 3 параметри двофазності. Якщо параметри двофазності визначені, градієнт тиску у двофазному потоці розраховується по відомих градієнтах тиску у відповідних однофазних потоках за допомогою (6.90) або (6.91).

В однофазних потоках рідини та газу градієнти тиску обчислюються за формулами [10]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dx}\right)_f &= \frac{\lambda'_f (Re'_f) M_f^2}{2D\rho_f A^2}, \\ \left(\frac{dP}{dx}\right)_g &= \frac{\lambda'_g (Re'_g) M_g^2}{2D\rho_g A^2}, \end{aligned} \quad (6.92)$$

де через λ'_f, λ'_g позначені коефіцієнти тертя (коефіцієнти Дарсі) для однофазних потоків рідини та газу. Нагадаємо, що за означенням коефіцієнт тертя вводиться як відношення напруження тертя до швидкісного напору. Коефіцієнти Дарсі є функціями чисел Рейнольдса відповідних однофазних потоків. Для чисел Рейнольдса однофазних потоків використовуються такі вирази:

$$Re'_f = \frac{M_f D}{\mu_f A}, \quad Re'_g = \frac{M_g D}{\mu_g A}, \quad (6.93)$$

де M_f та M_g , секундні масові витрати рідкої та газоподібної фази, відповідно, визначаються співвідношеннями:

$$M_f = \alpha_f \rho_f v_f A, \quad M_g = \alpha_g \rho_g v_g A. \quad (6.94)$$

Розрахунок тертя на стінці у двофазному потоці вимагає введення кореляцій для параметрів двофазності. Однак, незалежно від вигляду

кореляції, параметри двофазності повинні бути взаємопов'язані через рівняння (6.90)-(6.94) та параметр Локкарта-Мартінееллі:

$$\chi^2 = \left(\frac{dP}{dx} \right)_f / \left(\frac{dP}{dx} \right)_g = \frac{\phi_g^2}{\phi_f^2}. \quad (6.95)$$

6.5.2 Кореляції для параметрів двофазності

Для визначення параметрів двофазності в коді RELAP 5 використовується кореляція HTFS (Heat Transfer and Fluid Flow Service), яка є удосконаленням відомої кореляції Барокші [8,9]. Дана кореляція обрана виходячи з доброї відповідності розрахунків з її допомогою результатів експериментальним даним в широких діапазонах об'ємного вмісту пари (газу), масових витрат фаз для багатьох режимів течії.

Кореляція HTFS для параметрів двофазності має вигляд:

$$\phi_f^2 = 1 + \frac{C}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} \quad \text{— для параметру двофазності для рідкої фази,} \quad (6.96)$$

$$\phi_g^2 = \chi^2 + C\chi + 1 \quad \text{— для параметру двофазності для газоподібної фази,} \quad (6.97)$$

де C – коефіцієнт кореляції; χ – параметр Локкарта-Мартінееллі, що визначається рівнянням (6.95). В результаті теоретичного аналізу [9] було показано, що коефіцієнт кореляції C є функцією масової швидкості двофазного потоку G . В кореляції HTFS представлення коефіцієнту кореляції має вигляд:

$$C = -2 + f_1(G) T_1(A, G), \quad (6.98)$$

де

$$f_1(G) = 28 - 0.3\sqrt{G}, T_1(A, G) = \exp\left[-\frac{(\lg A + 2.5)^2}{2.4 - G(10^{-4})}\right], (6.99)$$

$$A = \frac{\rho_g}{\rho_f} \left(\frac{\mu_f}{\mu_g} \right)^{0.2} \quad - \text{безрозмірний параметр Барокші.}$$

Представляючи на основі (6.90)-(6.92) тертя у двофазному потоці через тертя в однофазних потоках рідини і газу, та використовуючи для чисел Рейнольдса формули (6.93), з формул (6.95) та (6.97) одержимо вираз для повного градієнту тиску у двофазному потоці внаслідок дії сил тертя на стінці:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dx} \right)_{2\phi} &= \phi_f^2 \left(\frac{dP}{dx} \right)_f = \phi_g^2 \left(\frac{dP}{dx} \right)_g = \\ &= \frac{1}{2D} \left\{ \lambda'_f \rho_f (\alpha_f v_f)^2 + C \left[\lambda'_f \rho_f (\alpha_f v_f)^2 \lambda'_g \rho_g (\alpha_g v_g)^2 \right]^{1/2} + \lambda'_g \rho_g (\alpha_g v_g)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Отже, загальне двофазне тертя може бути визначене викладеним вище методом Локкарта-Мартінеллі. В той же час, до рівнянь збереження кількості руху входять сили тертя на стінці, що діють на кожну з фаз окремо. Таким чином, необхідно виконати розподіл загальної сили тертя на стінці, що діє в двофазному потоці, на сили, прикладені до окремих фаз. З цією метою в моделі коду RELAP 5 використовується метод Чисолма [10]. Даний метод справедливий незалежно від моделі, прийнятої для міжфазного тертя. Проте, з огляду на розглянуті вище особливості моделей міжфазного тертя коду RELAP 5, в моделі цього коду метод Чисолма використовується тільки разом з методом коефіцієнтів опору для обчислення міжфазного тертя. При використанні моделі потоку дрейфа, тертя на стінці розподіляється по фазах, виходячи з об'ємних вмістів фаз α_f і α_g .

6.5.3 Розподіл загальної сили тертя на стінці

Як відзначалося вище, для дослідження сил міжфазного тертя і тертя на стінці, що діють у двофазному потоці, використовуються квазістаціонарні рівняння збереження кількості руху. Вони можуть бути записані у вигляді:

$$\alpha_f A \left(\frac{dP}{dx} \right)_{2\phi} - \tau_f p_f + S_{FI} = 0, \quad \text{для рідкої фази} \quad (6.101)$$

$$\alpha_g A \left(\frac{dP}{dx} \right)_{2\phi} - \tau_g p_g - S_{FI} = 0 \quad \text{для газоподібної фази.}$$

В рівняннях (6.101) τ_g і τ_f - дотичні напруження на стінці, прикладені, відповідно, до рідкої та газоподібної фази; p_f і p_g змочені периметри, відповідно, для рідкої та газоподібної фази. По аналогії з (6.88) доданок S_{FI} може розглядатися як градієнт тиску, пов'язаний з дією міжфазного тертя. Виключаючи з (6.101) загальний градієнт тиску, знайдемо залежність між тертям на стінці та міжфазним тертям:

$$\frac{1 + S_R \left(\frac{\alpha_g}{\alpha_f} \right)}{1 - S_R} = \frac{\left(\frac{\tau_f p_f}{\alpha_f} \right)}{\frac{\tau_g p_g}{\alpha_g}} = Z^2, \quad (6.102)$$

де член, пов'язаний з міжфазним тертям, визначається як:

$$S_R = \frac{S_{FI}}{\alpha_g A \left(\frac{dP}{dx} \right)_{2\phi}}. \quad (6.103)$$

Параметр Z^2 являє собою відношення сил тертя на стінці, прикладених до рідкої і газоподібної фази, і таких, що діють в одиничних об'ємах, зайнятих відповідними фазами. З формули

(6.102) член S_{FI} можна виразити через $\left(\frac{dP}{dx}\right)_{2\phi}$ та Z^2 .

Підставляючи отриманий вираз до рівнянь збереження кількості руху (6.101), одержимо вираз для сил тертя на стінці, прикладених до кожної фази:

$$\begin{aligned}\tau_f p_f &= \alpha_f \left. \frac{dP}{dx} \right|_{2\phi} \left(\frac{Z^2}{\alpha_g + \alpha_f Z^2} \right), \\ \tau_g p_g &= \alpha_g \left. \frac{dP}{dx} \right|_{2\phi} \left(\frac{1}{\alpha_g + \alpha_f Z^2} \right).\end{aligned}\quad (6.104)$$

Співвідношення (6.104) є просто іншою формою запису квазістаціонарних рівнянь збереження кількості руху (6.101), де одна невідома величина – S_{FI} замінена на іншу – Z^2 . У теорії Чисхолма дотичне напруження на стінці, прикладене до рідкої фази, подається таким чином:

$$\tau_f = \frac{\lambda(Re_f) \rho_f v_f^2}{4} \quad (6.105)$$

де $\lambda(Re_f)$ коефіцієнт тертя Дарсі для рідкої фази, Re_f - число

Рейнольдса для рідкої фази, $Re_f = \frac{\rho_f v_f D_f}{\mu_f}$; D_f – гідравлічний

діаметр для рідкої фази, $D_f = \frac{4A_f}{p_f}$; A_f – площа поперечного

перерізу, зайнята рідиною, $A_f = \alpha_f A$; p_f – периметр, змочений

рідкою фазою, $p_f = \alpha_{fw} p$; α_{fw} – вміст рідини на стінці; p – периметр перерізу каналу.

Для напруження τ_g використовується співвідношення, цілком аналогічне (6.105), в якому замість параметрів рідкої фази використовуються відповідні параметри газоподібної фази. Застосовуючи ці співвідношення, отримаємо залежність Z^2 від параметрів фаз:

$$Z^2 = \frac{\lambda_f (Re_f) \rho_f v_f^2 \frac{\alpha_{fw}}{\alpha_f}}{\lambda_g (Re_g) \rho_g v_g^2 \frac{\alpha_{gw}}{\alpha_g}}. \quad (6.106)$$

Підстановка (6.106) у (6.104) дозволяє знайти сили тертя на стінці, прикладені до кожної фази, через загальну силу тертя на стінці у двофазному потоці. При цьому сили тертя виявляються визначеними незалежно від використаної моделі міжфазного тертя.

6.5.4 Коефіцієнти тертя на стінці

Записуючи основні рівняння збереження кількості руху коду RELAP 5 (4.13) у квазістаціонарній формі і порівнюючи їх з рівняннями (6.101), знайдемо:

$$\begin{aligned} FWF(\alpha_f \rho_f v_f) A &= \tau_f p_f = \alpha_f \left(\frac{dP}{dx} \right) \bigg|_{2\phi} \left(\frac{Z^2}{\alpha_g + \alpha_f Z^2} \right) A, \\ FWG(\alpha_g \rho_g v_g) A &= \tau_g p_g = \alpha_g \left(\frac{dP}{dx} \right) \bigg|_{2\phi} \left(\frac{1}{\alpha_g + \alpha_f Z^2} \right) A. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Шляхом додавання рівнянь (6.107) отримаємо:

$$FWF(\alpha_f \rho_f v_f) A + FWG(\alpha_g \rho_g v_g) A = \left(\frac{dP}{dx} \right) \bigg|_{2\phi} A. \quad (6.108)$$

Для остаточного визначення сил тертя на стінках лишається описати способи знаходження коефіцієнтів Дарсі λ_f і λ_g . Розглянуті нижче співвідношення для коефіцієнтів Дарсі приведені для кожного з режимів двофазного потоку і отримані з урахуванням специфічних особливостей кожного режиму.

Перш за все, визначимо об'ємні вмісти рідини та пари (газу) в області поблизу стінки, відповідно, як:

$$\alpha_{fw} = \frac{p_f}{p}, \quad \alpha_{gw} = \frac{p_g}{p}. \quad (6.109)$$

Вирази для α_{gw} і α_{fw} отримуються виходячи з особливостей потоку в області поблизу стінки для кожного з режимів:

$$\text{для бульбашкового режиму: } \alpha_{fw} = \alpha_f \quad \text{і} \quad \alpha_{gw} = \alpha_g, \quad (6.110)$$

$$\text{для снарядного режиму: } \alpha_{fw} = 1 - \alpha_{gs} \quad \text{і} \quad \alpha_{gw} = \alpha_{gs}, \quad (6.111)$$

де α_{gs} - середній об'ємний вміст пари (газу) у рідкій плівці поблизу стінки та у рідких пробках між снарядами (див. (6.60));

$$\begin{array}{ccc} \text{для} & \text{дисперсно-кільцевого} & \text{режиму:} \\ \alpha_{fw} = (\alpha_{ff})^{1/4} & \text{і} & \alpha_{gw} = 1 - (\alpha_{ff})^{1/4} \end{array} \quad (6.112)$$

де α_{ff} - середній об'ємний вміст рідкої плівки (див. (6.64));

для оберненого дисперсно-кільцевого режиму:

$$\alpha_{fw} = 1 - (\alpha_{gg})^{1/4} \quad \text{і} \quad \alpha_{gw} = (\alpha_{gg})^{1/4}, \quad (6.113)$$

де α_{gg} середній об'ємний вміст газової плівки;

$$\text{для оберненого снарядного режиму: } \alpha_{fw} = \alpha_{fs} \quad \text{і} \quad \alpha_{gw} = 1 - \alpha_{fs}, \quad (6.114)$$

де α_{fs} середній об'ємний вміст рідини у газоподібній плівці поблизу стінки та у газоподібних пробках між рідкими снарядами;

$$\text{для дисперсного режиму: } \alpha_{fw} = \alpha_f \quad \text{і} \quad \alpha_{gw} = \alpha_g, \quad (6.115)$$

для вертикально розширеного режиму: $\alpha_{fw} = \alpha_f$ і $\alpha_{gw} = \alpha_g$, (6.116)

для горизонтально розширеного режиму: $\alpha_{fw} = 1 - \frac{\theta}{\pi}$ і $\alpha_{gw} = \frac{\theta}{\pi}$, (6.117)

де θ - половина кута при вершині сектора, зайнятого газоподібною фазою (див. рис. 4.4).

В кодї RELAP 5 коефіцієнти Дарсі обчислюються виходячи з різних кореляцій для ламінарного та турбулентного режимів потоку та інтерполяції на перехідному режимі.

Для ламінарного режиму:

$$\lambda_L = \frac{64}{Re \Phi_S}, \quad 0 \leq Re \leq 2200, \quad (6.118)$$

де Φ_S – коефіцієнт форми, який вводиться користувачем для областей течії з некруговим поперечним перерізом. Наприклад, для кільцевого перерізу коефіцієнт форми має вигляд [11]:

$$\Phi_S = \frac{1 + \left(\frac{D_i}{D_o}\right)^2 + \frac{1 - \left(\frac{D_i}{D_o}\right)}{\ln(D_i/D_o)}}{1 - \left(\frac{D_i}{D_o}\right)^2}, \quad (6.119)$$

де D_i, D_o – внутрішній та зовнішній діаметри перерізу.

Для режиму перехідного від ламінарного до турбулентного використовується така інтерполяційна формула:

$$\lambda_{L,T} = \left(3.75 - \frac{8250}{Re}\right) (\lambda_{T,3000} - \lambda_{L,2200}) + \lambda_{L,2200}, \quad 2200 < Re < 3000, \quad (6.120)$$

де $\lambda_{L,2200}$ і $\lambda_{T,3000}$, відповідно, значення коефіцієнтів Дарсі для ламінарного режиму при $Re = 2200$ і турбулентного режиму при $Re = 3000$.

Для коефіцієнта Дарсі для турбулентного режиму λ_T справедлива формула (кореляція Колебрука-Уайта):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} = -2 \lg \left\{ \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{Re} \left[1.14 - 2 \lg \left(\frac{\varepsilon}{D} + \frac{21.25}{Re^{0.9}} \right) \right] \right\}, \quad 3000 < Re, \quad (6.121)$$

де ε – коефіцієнт негладкості поверхні.

Зауважимо, що описані співвідношення справедливі для ненагрітих поверхонь, однак коефіцієнти тертя можуть бути легко перераховані і на випадок, коли температура стінок відрізняється від температури у ядрі потоку. Для цього використовується така формула:

$$\frac{\lambda}{\lambda_{ISO}} = 1 + \frac{P_H}{P_W} \left[\left(\frac{\mu_{wall}}{\mu_{bulk}} \right)^D - 1 \right], \quad (6.122)$$

де λ – коефіцієнт тертя, у випадку коли температура у ядрі потоку відрізняється від температури стінок, λ_{ISO} – коефіцієнт тертя у випадку коли ці температури співпадають, P_H – нагрітий периметр, P_W – змочений периметр, μ_{wall} , μ_{bulk} – в'язкості, обчислені при температурі стінки і при температурі у ядрі потоку, відповідно. Показник степеня D – константа, яка вводиться користувачем.

Значення D : $0.50 \div 0.58$ – для однофазної ламінарної течії,
 0.25 – для однофазної турбулентної течії,
 $1.0 \div 1.35$ – для двофазної ламінарної течії,
 -0.1 – для двофазної турбулентної течії.

За угодою прийнято значення 0 , що нівелює ефект зміни в'язкості.

6.6 Теплова взаємодія фаз зі стінками каналу

6.6.1 Кипіння у великому об'ємі.

Система замикальних співвідношень, що описують обмін тепловою енергією між двофазним теплоносієм і стінками каналу, включає кореляції, розроблені для випадку руху теплоносія в трубах та каналах різної геометрії. Проте, перш ніж приступити до розгляду цих кореляцій, доцільно якісно описати процес кипіння рідини у великому об'ємі. Розгляд такого ідеалізованого процесу дозволить порівняно просто ввести основні означення і поняття, а також зрозуміти природу процесу кипіння.

Кипінням називається процес утворення пари, який характеризується утворенням вільних поверхонь розділу рідкої та парової фази всередині рідини, нагрітої вище *температури насичення*.

Температура насичення - мінімальна температура, при якій, за даних умов, можливий фазовий перехід. Температура насичення визначається кривою фазової рівноваги. При температурі насичення можуть існувати як газ, так і рідина.

Оскільки утворення пари потребує витрат енергії, для підтримання стаціонарного режиму кипіння необхідне неперервне постачання тепла. Нехай всередині великого об'єму рідини з температурою насичення T^s знаходиться горизонтальна пластина, яка нагрівається. Температура всіх її точок однакова: $T_w > T^s$. Будемо збільшувати температуру пластини T_w та стежити за зміною теплового потоку від пластини до рідини.

На рис.6.10. показана залежність густини теплового потоку на стінці Q_w від температурного напору $\Delta T_w = T_w - T^s$. Приведена на рис.6.10 крива називається *кривою кипіння*. Звернемо увагу на характерні особливості процесу кипіння і розглянемо ділянки цієї кривої. Необхідною, але не достатньою умовою утворення пари є досягнення рідиною температури насичення. Перегріта рідина нестійка, однак для фазового переходу їй необхідне збурення –

зіткнення з паровою фазою. Таким чином, утворення пари починається у так званих центрах пароутворення – щілинах, нерівностях поверхні, в яких накопичився газ.

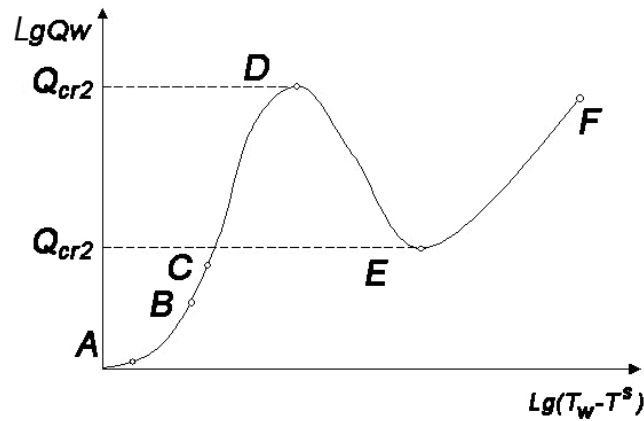


Рис.6.10. Крива кипіння рідини у великому об'ємі.

На ділянці АВ кількість діючих центрів пароутворення незначна, невелика кількість і бульбашок пари, зважених у рідині. Отже, внесок переносу тепла за рахунок відриву бульбашок на цій ділянці незначний. Тому ділянка АВ називається *ділянкою однофазної конвекції*.

На ділянці ВС вплив переносу тепла за рахунок відриву бульбашок стає суттєвим, кількість центрів пароутворення значною, але робота їх залишається нестабільною. Ділянка ВС називається *ділянкою нерозвиненого бульбашкового кипіння*.

На ділянці CD робота центрів пароутворення стає стабільною, їх кількість збільшується. Внаслідок цього тепловіддача від стінки до рідини визначається, в першу чергу, переносом тепла бульбашками,

що відриваються від стінки. Ділянка CD називається *ділянкою розвиненого бульбашкового кипіння*.

Точка D відповідає так званій *кризі теплообміну при кипінні*. В англomовній літературі, зокрема в керівництві з коду RELAP 5 [10,11], ця точка зветься точкою CHF (critical heat flux). При переході через точку D тепловіддача спадає при збільшенні температурного напору на стінці. Зменшення тепловіддачі є наслідком того, що у зв'язку зі збільшенням концентрації центрів пароутворення сусідні центри починають заважати один одному, бульбашки не можуть вільно відриватися від стінки та впливати, а отже, збираються коло стінки, зливаючись у плівку пари. В результаті утворюється нестабільна парова плівка, через яку тепловіддача відбувається за рахунок теплопроводності, інтенсивність переносу тепла бульбашками, що відриваються від стінки, різко зменшується, внаслідок чого загальна тепловіддача від стінки до рідини починає спадати.

Ділянка DE називається *ділянкою перехідного кипіння*. На цій ділянці рідина ще іноді проривається до стінки, де відразу ж закипає, в різні моменти часу при перехідному кипінні може реалізовуватися або бульбашковий, або плівковий режим кипіння, при якому контакт рідини зі стінкою не відбувається.

Точка E є точкою повного припинення контакту рідини зі стінкою. При переході через точку E утворюється стійка плівка пари, через яку тепловіддача здійснюється тільки за рахунок теплопроводності. Ділянка EF називається *ділянкою плівкового кипіння*.

Такими є характерні особливості процесу кипіння рідини у великому об'ємі. Звичайно, процес кипіння теплоносія під час його руху по трубах буде носити дещо інший характер і мати власні характерні особливості, проте основні режими кипіння лишатимуться такими ж.

6.6.2 Режими теплообміну, що розрізняються в коді RELAP 5.

Замикання основної системи диференціальних рівнянь моделі двофазного потоку коду RELAP 5 потребує задання співвідношень, що описують кількісні характеристики процесу обміну теплом між

фазами та стінкою каналу. В кодї RELAP 5 загальний потік тепла від стінки до теплоносія подається у вигляді суми потоку тепла від стінки до газоподібної фази і потоку тепла від стінки до рідкої фази:

$$q'' = h_{wg} (T_W - T_{refg}) + h_{wf} (T_W - T_{reff}), \quad (6.123)$$

де h_{wg} , h_{wf} – коефіцієнти тепловіддачі для газу та рідини, відповідно; T_W – температура стінки, T_{refg} , T_{reff} – деякі «опорні» температури газу та рідини, відповідно. Як опорні можуть бути прийняті середньомасові температури у даному перерізі труби. За означенням, середньомасова температура $\bar{T}$ рідини, що рухається в перерізі труби площею A в напрямку x зі швидкістю v_x , дорівнює [6]:

$$\bar{T} = \frac{\int_A \rho v_x T dA}{\int_A \rho v_x dA}.$$

Також, в якості опорної можуть прийматися температури насичення. Вибір опорної температури виконується в залежності від виду кореляції, яка використовується для коефіцієнту тепловіддачі.

Вибір необхідної кореляції для опису теплообміну теплоносія зі стінкою відбувається на основі кривої кипіння. На рис.6.11 приведено криву кипіння, що використовується для визначення режимів теплообміну у кодї RELAP 5. Як бачимо, вигляд цієї кривої майже не відрізняється від вигляду кривої, що описує розглянутий вище процес кипіння рідини у великому об'ємі. На кривій, приведений на рис.6.11., виділено три основні області (конденсації, конвекції та кипіння), кожній з яких відповідає власна група режимів теплообміну.

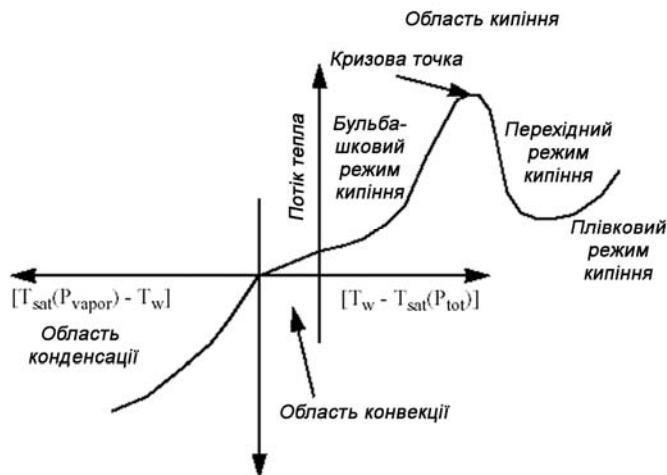


Рис.6.11. Крива кипіння, прийнята у коді RELAP 5

Область конденсації відповідає значенням температури стінки, меншим за температуру насичення при тиску, рівному парціальному тиску пари ($T^s(P_{varog})$). Дане визначення області конденсації пов'язане з можливою присутністю газів, що не конденсуються.

Область конвекції відповідає значенням температури стінки, більшим за температуру насичення при тиску, рівному парціальному тиску пари, але меншим температури насичення при повному тиску ($T^s(P)$).

Область кипіння відповідає значенням температури стінки, більшим за температуру насичення при повному тиску.

Нагадаємо відмінності між парціальним та повним тиском. Тиск у газі виражається формулою:

$$P = nkT,$$

де n – кількість молекул, k – постійна Больцмана. Якщо в об'ємі присутня суміш газів, то

$$P = nkT = kT \sum_{j=1}^{\nu} n_j,$$

де n_j – кількість молекул j -ого газу. Тоді

$$P = \sum_{j=1}^{\nu} P_j,$$

де P_j – *парціальний тиск j -ого газу*, тобто це тиск, який діяв би в об'ємі, якби у ньому знаходилися лише молекули j -ого газу.

Нижче будуть описані кореляції, що використовуються кодом RELAP 5 для коефіцієнтів тепловіддачі. Вони справедливі для різних ділянок кривої кипіння.

Загальний тепловий потік від стінки до фази k ($k=g,f$) записується у вигляді:

$$q_{wk} = q_{wk}^* + q_{wk}^{**}, \quad (6.124)$$

де q_{wk}^* – тепловий потік, зумовлює зміну температури (внутрішньої енергії) фази k , q_{wk}^{**} – тепловий потік, що забезпечує фазовий перехід, а отже, зумовлює зміну масового вмісту фази k . Щоб одержати вираз для q_{wk}^{**} використовується метод Лахея, розглянутий нижче при розгляді міжфазного масообміну.

Теплові потоки q_{wk}^* , q_{wk}^* , q_{wk}^{**} є функціями великої кількості параметрів. Вони визначаються, зокрема, параметрами двофазної суміші, режимом течії, геометрією каналу і т.ін. Визначення цих величин виконується згідно з такими кроками:

- а) за допомогою відповідних кореляцій по даному набору миттєвих локальних значень параметрів одно- або двофазного потоку $P, \rho v, T, \alpha_g$ та температури стінки T_w визначають сумарний тепловий потік між стінкою труби та теплоносієм, що припадає на одиницю об'єму труби:

$$q''_W = q_{Wf} + q_{Wg}; \quad (6.125)$$

- b) на основі аналізу особливостей механізму даного процесу теплообміну та режиму течії теплоносія приймається те чи інше припущення про розподіл загального потоку q''_W між фазами, що дає можливість визначити q_{Wf} і q_{Wg} з (6.125) та співвідношень:

$$q_{Wg} = \Psi q''_W; \quad q_{Wf} = (1 - \Psi) q''_W; \quad (6.126)$$

- де Ψ - коефіцієнт розподілу повного теплового потоку між фазами;
 c) додатковий аналіз специфіки процесу теплообміну при наявності фазових переходів на стінці каналу в умовах нерівноважності фаз призводить до тих чи інших гіпотез про частки q_{Wf} та q_{Wg} , що зумовлюють зміну *питомої внутрішньої енергії фази* та зміну *питомої кількості фази*:

$$q_{Wk}^* = \chi_k q_{Wk}; \quad q_{Wk}^{**} = (1 - \chi_k) q_{Wk}. \quad (6.127)$$

де χ_k - коефіцієнт розподілу повного теплового потоку до фази k.

Таким чином, при даному підході система замикальних співвідношень для опису теплообміну фаз зі стінками каналу повинна будуватись на базі карти режимів двофазного потоку, карти режимів теплообміну та уявлень про механізм процесу теплообміну при даному режимі.

Виділяють такі групи процесів теплообміну: вільна та вимушена конвекція однофазного теплоносія, бульбашкове кипіння, перехідне кипіння, плівкове кипіння, конденсація.

Для різних режимів теплообміну застосовуються різні кореляції та підходи, що дозволяють розділити сумарний тепловий потік по фазах. Розглянуті далі кореляції для коефіцієнтів теплообміну отримані після обробки експериментальних даних, шляхом обчислення відношень теплових потоків до опорних різниць температур.

Логіка вибору необхідної кореляції для коефіцієнту тепловіддачі досить складна, детальна схема приведена у керівництві з коду

RELAP 5 [10]. Тому зараз ми лише означимо ті фактори, які впливають на вибір режиму теплообміну за цією схемою:

- (a) Чи є тиск більшим, ніж критичний тиск (критичні параметри – параметри при перевищенні яких рівновага двофазного середовища неможлива, для критичної температури існує лише один розв'язок рівняння Ван-дер-Ваальса, що дає критичний тиск).
- (b) Чи є температура стінки більшою, ніж температура насичення.
- (c) Чи присутній газ, що не конденсується.
- (d) Який стан теплоносія: рідкий, двофазний, газоподібний.
- (e) Чи перевищує тепловий потік значення критичного теплового потоку.
- (f) Чи є значення теплового потоку при плівковому кипінні більшим, ніж значення при перехідному.

В коді RELAP 5 виділяється 13 різних режимів теплообміну, позначених цифрами від 0 до 12. Номер режиму теплообміну є параметром, який включається в файл результатів, щоб проінформувати користувача про режим теплообміну, обраний кодом. В RELAP 5 розрізняють такі режими теплообміну:

Режим 0 – Конвективний теплообмін між стінкою та потоком рідини, пари, газу, що не конденсується.

Режим 1 – Однофазна конвекція рідини при докритичному та надкритичному тиску.

Режим 2 – Однофазна конвекція рідини при надкритичному тиску.

Режим 3 – Бульбашкове кипіння недогрітої рідини (температура ядра потоку менша від температури насичення).

Режим 4 – Бульбашкове кипіння насиченої рідини.

Режим 5 – Перехідне кипіння недогрітої рідини.

Режим 6 – Перехідне кипіння насиченої рідини.

Режим 7 – Плівкове кипіння недогрітої рідини.

Режим 8 – Плівкове кипіння насиченої рідини.

Режим 9 – Однофазна конвекція газу.

Режим 10 – Конденсація при $\alpha_g < 1$.

Режим 11 - Конденсація при $\alpha_g = 1$.

Режим 12 – Бульбашкове кипіння при недодатних теплових потоках.

Кореляція, що застосовується для коефіцієнту тепловіддачі, окрім режиму теплообміну, визначається типом гідравлічної геометрії, тобто геометрією області, в якій відбувається течія теплоносія, та геометрією поверхонь, що віддають тепло. Кожен тип гідравлічної геометрії в коді RELAP 5 позначений власним номером.

Існує стандартний тип гідравлічної геометрії – геометрія 101. Згідно з [11], геометрією 101 визначається набір кореляцій, призначений для отримання початкових результатів в усіх випадках геометрії області течії. Кореляції геометрії 101 побудовані на основі гіпотези еквівалентної труби (умовної заміни області течії з некруговим поперечним перерізом круглою трубою за рахунок введення еквівалентного гідравлічного діаметру). Даний набір кореляцій використовувався в попередніх версіях коду RELAP незалежно від типу геометрії області течії.

Іншими типами гідравлічної геометрії задаються набори кореляцій, розроблені спеціально для окремих типів геометрії області течії (течія в пучках стержнів, поперечна течія і т.д.). Як правило, відмінності від стандартного набору полягають в застосуванні однієї-двох спеціальних кореляцій. З цієї причини нижче розгляд обмежено набором кореляцій геометрії 101. Детальний опис кореляцій, що входять до всіх наборів наведено в [11].

6.6.3 Кореляції для однофазної конвекції рідини при докритичному та надкритичному тиску (Режими 1, 2), однофазної конвекції газу (Режим 9) та конвекції суміші рідини, пари і газів, що не конденсуються (Режим 0).

Даний набір кореляцій включає кореляції для вимушеної турбулентної конвекції, вимушеної ламінарної конвекції, а також – вільної конвекції. При цьому коефіцієнт тепловіддачі

представляється в безрозмірному вигляді (у вигляді числа Нуссельта). Код використовує значення числа Нуссельта, максимальне серед значень, обчислених за вказаними трьома кореляціями. Такий підхід забезпечує плавність переходу від однієї кореляції до іншої. Таким чином:

$$Nu = \max(Nu_{\text{turb}}, Nu_{\text{lam}}, Nu_{\text{free}}), \quad (6.128)$$

де $Nu = \frac{hD}{\lambda}$, h – коефіцієнт тепловіддачі, λ – коефіцієнт теплопроводності, D – еквівалентний діаметр, що нагрівається,

$$D = 4 \frac{A_{\text{CS}}}{P_{\text{heated}}}, \quad A_{\text{CS}} - \text{площа поперечного перерізу області течії},$$

P_{heated} – нагрітий периметр.

6.6.3.1 Вимушена турбулентна конвекція

Для розрахунку коефіцієнту тепловіддачі прийнята кореляція Диттуса-Боелтера:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}, \quad Re \geq 2000. \quad (6.129)$$

де $Re = \frac{GD}{\mu}$ - число Рейнольдса, $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$ - число Прандтля, G

– скалярний потік маси (масова швидкість), μ - в'язкість, C_p - теплоємність при постійному тиску. Вказані параметри обчислюються при температурі, рівній температурі у ядрі потоку.

У випадках $\alpha_g > 0.999$ використовується Режим 9, отже параметри потоку аналогічні параметрам газоподібної фази. При цьому потік маси, що входить у вираз для числа Рейнольдса, збільшується за рахунок додавання до потоку маси газу потоку маси рідини, домноженого на відношення густин газоподібної і рідкої фаз. Такий підхід трансформує кореляцію Диттуса-Боелтера в

кореляцію Дугалла-Розенау [2], що застосовується для дисперсних потоків.

Згідно з [11], у випадках вимушеної турбулентної конвекції рідини при зовнішньому обтіканні пучків стержнів коефіцієнт тепловіддачі є функцією відносного кроку пучка (відношення кроку стержнів у пучку до діаметру стержня). В коді RELAP 5 цей факт ураховується в спеціальному наборі кореляцій для теплообміну при обтіканні пучків стержнів (геометрія 111) шляхом введення до кореляції Диттуса-Боелтера так званого множника Інаятова [11] (pitch-to-diameter ratio multiplier).

Відмітимо, що кореляція Диттуса-Боелтера використовується для розрахунку коефіцієнту тепловіддачі при вимушеній турбулентній конвекції вже понад 40 років. Перевірка цього співвідношення в багатьох експериментах свідчить, що похибка кореляції не перевищує 40% [2]. Найгірших результатів слід очікувати при описі теплообміну в каналах невеликої відносної довжини (менше 20 діаметрів), а також у випадках протитечії, за умови рівності порядків інерційних і термогравітаційних сил [11].

6.6.3.2 Вимушена ламінарна конвекція

У випадку вимушеної ламінарної конвективної стабілізованої течії теплоносія з постійними фізичними властивостями (під стабілізованою розуміється течія за межами термічної початкової ділянки, де відбувається формування профілю температури) вдається знайти аналітичний розв'язок задачі теплообміну в круглій трубі постійного діаметру [6]. Для граничних умов другого роду (постійний тепловий потік на стінці) він має вигляд: $Nu = 4.36$. Це співвідношення використовується в коді RELAP 5 для розрахунку коефіцієнту тепловіддачі для вимушеної ламінарної конвекції. Отже:

$$Nu = 4.36, Re < 2000, Nu = h \frac{D}{\lambda}. \quad (6.130)$$

У відповідності до [11], використання еквівалентного діаметра при розрахунку теплообміну на ламінарних режимах не завжди

забезпечує належну точність. Отже, співвідношення (6.130) може не бути справедливим для областей течії з поперечним перерізом прямокутної або трикутної форми. Крім того, у порівнянні з турбулентною течією, для ламінарної течії більш важливим є урахування термічної та гідродинамічної початкових ділянок, де, відповідно, відбувається формування профілів швидкості та температури. Неурахування початкових ділянок призводить до використання граничного значення коефіцієнту тепловіддачі h , справедливого для ділянки стабілізованого теплообміну. В той же час, дані [11] свідчать, що на гідродинамічній початковій ділянці значення h нижчі на 30-75% за граничне значення.

Також відмітимо ефект впливу граничних умов. При використанні граничних умов першого роду (постійна температура стінки) для числа Нуссельта отримано [6] значення $Nu = 3.66$, таким чином, коефіцієнт тепловіддачі приблизно на 20% нижчий за розрахований згідно (6.130).

6.6.3.3 Вільна конвекція

Фізично виникнення вільної конвекції пояснюється неоднорідністю поля густини, пов'язаної, як правило, з неоднорідністю поля температури у потоці рідини. Більш легкі частинки прагнуть всплити, залишивши більш важкі у нижній частині потоку. За цей процес відповідають так звані термогравітаційні сили, детально розглянуті в розд. 1. Процеси вільної конвекції у вертикальних та горизонтальних трубах носять різний характер, внаслідок чого в коді RELAP 5 приймають різні кореляції для вертикальних та горизонтальних труб.

Для *вертикальних труб* прийнята кореляція Чурчилла-Чу:

$$Nu_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387(Ra_L)^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2, \quad (6.131)$$

де $Ra_L = Gr_L \cdot Pr$ – число Релея, $Gr_L = \frac{\rho^2 g \beta (T_w - T_b) L^3}{\mu^2}$ –

число Грасгофа, T_b – температура в ядрі потоку, T_w – температура стінки, L – довжина ділянки вільної конвекції; β – коефіцієнт термічного розширення.

Для горизонтальних труб використовується кореляція Макадамса:

$$Nu_L = 0.27 Ra_L^{0.25}, \quad (6.132)$$

Дані кореляції розроблені, відповідно, для вертикальних і горизонтальних пластин, однак код RELAP 5 використовує їх для опису теплообміну в трубах.

6.6.4 Кореляції для бульбашкового кипіння недогрітої рідини (Режим 3) і для бульбашкового кипіння насиченої рідини (Режим 4).

Як впливає з розглянутої кривої кипіння, тепловіддача при бульбашковому кипінні вище, ніж при однофазній конвекції. Це пов'язано з появою мікроконвективних течій, обумовлених рухом парових бульбашок від стінки. Мікроконвекція накладається на основну макроконвективну течію, при цьому парові бульбашки виступають у ролі, умовно кажучи, поршневих насосів, що виштовхують рідину у момент зростання бульбашок та підсмоктують рідину до стінки після відриву бульбашок. Чим

вищим є тепловий потік, тим більшою є частота відриву бульбашок та їх кількість, що утворюється на одиниці поверхні, і тим більше тепла при цьому відводиться від стінки. Однак, при певній величині теплового потоку стійкість зустрічних потоків рідини та пари порушується і стінка покривається плівкою пари – відбувається перехід бульбашкового режиму кипіння у плівковий. Тепловіддача у плівковому режимі кипіння погіршується, що спричинює кризу теплообміну.

Режим бульбашкового кипіння поділяється на режим бульбашкового кипіння недогрітої рідини, коли середньомасова температура рідини в даному перерізі T_f менша температури

насичення T^s : $T_f < T^s$, та режим розвиненого бульбашкового

кипіння при $T_f = T^s$. Кипіння починається при досягненні рідиною в вузькому шарі поблизу стінки температури насичення (при цьому температура в ядрі потоку може бути менша від температури

насичення, отже $T_f < T^s$). За таких умов рідина поблизу стінки

стає нестійкою, проте процес фазового переходу і утворення бульбашок відбувається лише при зіткненні перегрітої відносно температури насичення рідини з паровою фазою. Цей процес відбувається у так званих центрах утворення пари – мікровпадинах

заповнених газом. Режим кипіння недогрітої рідини ($T_f < T^s$)

характерний тим, що центри утворення пари функціонують нестабільно, а їх кількість на одиниці поверхні невелика. При

бульбашковому кипінні насиченої рідини ($T_f = T^s$) кількість

діючих центрів утворення пари на одиниці поверхні збільшується, а їх робота стає стійкою. Згідно з [3], при бульбашковому кипінні

тепловий потік від стінки йде головним чином до рідини. У зв'язку з цим параметр розподілу теплового потоку між рідиною та газом Ψ , введений у формулі (6.126), при бульбашковому кипінні має нульове значення:

$$\Psi = 0. \quad (6.133)$$

Таким чином, для бульбашкового кипіння справедливо $q'' = q_{wf}$. При цьому в режимі розвиненого бульбашкового кипіння весь підведений тепловий потік йде на утворення пари. В режимі кипіння недогрітої рідини частина теплового потоку q_{wf}^* зумовлює збільшення ентальпії рідини, а частина q_{wf}^{**} йде на утворення пари. Способи розподілу повного теплового потоку, спрямованого від стінки до рідини на зазначені складові q_{wf}^* та q_{wf}^{**} описано в підрозд. 6.7.

В коді RELAP 5 для обох підрежимів бульбашкового кипіння використовується кореляція Чена. У відповідності до підходу Чена, теплообмін при бульбашковому кипінні в усьому діапазоні зміни вмісту пари (газу) визначається конвекцією двох типів: макроконвекцією вимушеного руху теплоносія і мікроконвекцією внаслідок турбулентного руху бульбашок. Отже:

$$q'' = q_{mac}'' + q_{mic}'' \quad (6.134)$$

де q'' - загальний тепловий потік від стінки до теплоносія, q_{mac}'' - тепловий потік внаслідок макроконвекції, q_{mic}'' - тепловий потік внаслідок мікроконвекції.

Макроконвекція вимушеного руху домінує при малих і великих значеннях об'ємного вмісту пари (газу). Вираз для q_{mac}'' має вигляд [11]:

$$q_{mac}'' = h_{mac}(T_w - T^s)F, \quad (6.135)$$

де коефіцієнт тепловіддачі h_{mac} визначається рівнянням Диттуса-Боелтера, а отже залежить від швидкості вимушеного руху, $T^s = T^s(P)$ - температура насичення при повному тиску, F - функція, що визначає неперервність переходу до режиму вимушеної конвекції газу при великих значеннях α_g і до режиму вимушеної

конвекції рідини при малих значеннях α_g , а також ураховує інтенсифікацію теплообміну зі збільшенням макроконвекції в двофазній суміші.

Мікроконвекція внаслідок турбулентного руху бульбашок домінує на режимах розвиненого бульбашкового кипіння при відносно невеликих швидкостях вимушеного руху. Для q''_{mic} справедливо:

$$q''_{mic} = h_{mic}(T_w - T^s)S, \quad (6.136)$$

де коефіцієнт тепловіддачі h_{mic} є функцією температурного напору (різниці температури стінки і температури насичення) і визначається з рівняння Форстера-Зубера:

$$h_{mic} = 0.00122 \left(\frac{k_f^{0.79} C_{pf}^{0.45} \rho_f^{0.49}}{\sigma^{0.5} \mu_f^{0.29} h_{fg}^{0.24} \rho_g^{0.24}} \right) (T_w - T_s)^{0.24} (P(T_w) - P), \quad (6.137)$$

де індекс “f” відповідає параметрам рідкої, а індекс “g” – газоподібної фази, h_{fg} - теплота утворення пари, $P(T_w)$ - тиск насичення, що відповідає температурі стінки T_w . Функція S враховує ефект зниження вкладу мікроконвекції при збільшенні швидкості макроконвективного руху.

Оскільки функція F, що входить до формули (6.136), повинна забезпечувати гладкість переходу до режимів однофазної конвекції рідини і газу, ця функція задається різними виразами для режимів бульбашкового кипіння недогрітої рідини (Режим 3) і бульбашкового кипіння насиченої рідини (Режим 4).

Для Режиму 4:

$$F = 2.35(\chi_{tt}^{-1} + 0.213)^{0.736}, \quad (6.138)$$

$$\chi_{tt}^{-1} = (G_g / G_f)^{0.9} (\rho_f / \rho_g)^{0.5} (\mu_g / \mu_f)^{0.1},$$

де χ_{tt} - параметр Локкарта-Мартінеллі.

Для Режиму 3 замість функції F використовується функція F' :

$$F' = \begin{cases} F - 0.2(T^s - T_f)(F - 1), & T^s > T_f \geq (T^s - 5), \\ 1, & T_f < (T^s - 5). \end{cases} \quad (6.139)$$

де функція F визначається виразом (6.138).

Функція S , яка входить до формули (6.136) і визначає зменшення інтенсивності мікроконвекції бульбашок зі збільшенням швидкості вимушеного руху, дається співвідношенням:

$$S = \begin{cases} (1 + 0.12 \text{Re}_{\text{tp}})^{-1.14} & \text{Re}_{\text{tp}} < 32.5 \\ (1 + 0.42 \text{Re}_{\text{tp}}^{0.78})^{-1} & 32.5 \leq \text{Re}_{\text{tp}} < 70, \\ 0.0797 & \text{Re}_{\text{tp}} \geq 70 \end{cases} \quad (6.140)$$

де $\text{Re}_{\text{tp}} = \min(70, 10^{-4} \text{Re}_f F^{1.25})$, $\text{Re}_f = \frac{G_f D}{\mu_f}$, G_f -

масова витрата рідини, функція F визначається з (6.139).

Відмітимо, що процедура визначення тепловіддачі при бульбашковому кипінні модифікується у випадку вертикально розшарованої течії. Вказана модифікація детально розглянута в [11].

Точність кореляції Чена досліджувалася шляхом порівняння з експериментальними даними, отриманими в багатьох серіях експериментів. За даними [11] максимальна середня похибка кореляції Чена становить 15.4%.

6.6.5 Криза теплообміну

6.6.5.1 Механізми кризи теплообміну

Кризою теплообміну називається явище різкого зниження тепловіддачі внаслідок погіршення умов відведення тепла від стінки, яке відбувається при досягненні тепловим потоком q'' певного значення, що називається критичним.

Адекватний опис явища кризи теплообміну є надзвичайно важливим під час моделювання відведення тепла від тепловидільних елементів у складі енергетичного обладнання як на експлуатаційних, так і на аварійних режимах. Проте, складний і ще недостатньо вивчений характер явища кризи теплообміну є причиною того, що на сьогоднішній день відсутні в повній мірі обґрунтовані і загальновизнані кореляції, які дозволили б отримувати надійні оцінки кількісних характеристик явища в широкому діапазоні умов, типових для практики. Перед тим, як розглянути механізми кризи теплообміну введемо ряд нових понять. Будемо казати, що фази знаходяться в термодинамічній рівновазі, якщо температура обох фаз однакова і рівна температурі насичення. Якщо припустити, що фази знаходяться у термодинамічній рівновазі, а їх середні швидкості однакові, то, знаючи витрату кожної фази на вході у канал, геометрію каналу та граничні умови на стінці, можна розрахувати основні параметри потоку. Знайдені за таких припущень параметри називаються *витратними*. Витратні параметри, в загальному випадку, невірно відображають стан потоку, оскільки кожна з фаз може бути недогрітою або перегрітою по відношенню до температури насичення, а середні швидкості фаз, як правило, не рівні. Реальний стан потоку описується *істинними* параметрами. Введемо у розгляд деякі витратні і істинні параметри потоку.

Масова витрата двофазної суміші складається з масових витрат рідкої і газоподібної фази:

$$G = G_g + G_f. \quad (6.141)$$

Якщо фази знаходяться у термодинамічній рівновазі, то справедливо:

$$G_g = \frac{h_m - h_f^s}{r} G, \quad (6.142)$$

де h_m , h_f^s – ентальпія суміші та ентальпія рідини на лінії насичення, r – теплота утворення пари.

Частку пари (газу) у суміші характеризує витратний масовий вміст пари (газу):

$$X = \frac{G_g}{G}. \quad (6.143)$$

Для рівноважного двофазного потоку, як випливає з (6.142), виконується умова:

$$X = X_e = \frac{h_m - h_f^s}{r}, \quad (6.144)$$

де X_e - рівноважний витратний масовий вміст пари (газу), або відносна ентальпія потоку. Якщо рівновага між фазами відсутня, рівноважний витратний масовий вміст пари (газу), розрахований по значеннях ентальпій h_m та h_f^s дає невірну характеристику складу двофазного потоку. Наприклад, для недогрітої рідини з бульбашками, що не встигли зконденсуватися, розрахунок за формулою (6.144) приводить до від'ємних значень X_e . Однак, як засвідчує практика проведення експериментальних досліджень кризи теплообміну, механізм явища кризи теплообміну, що реалізується у потоці, зручно визначати за допомогою параметру X_e .

У підрозд. 6.6.1 було розглянуто механізм кризи тепловіддачі при кипінні у великому об'ємі, де встановлено, що криза тепловіддачі настає внаслідок погіршення умов надходження рідини до стінки, а критичний тепловий потік визначається температурою перегріву стінки відносно температури насичення.

Рівень знань щодо кризи теплообміну для вимушеного руху теплоносія по трубах і каналах складної геометрії поки що не є повним і надійність результатів розрахунку критичного теплового потоку набагато нижча ніж для випадку кипіння рідини у великому об'ємі. Причина цього полягає в більшій кількості фізичних величин, що впливають на величину критичного теплового потоку, та в різноманітності механізмів кризи. Типовий експеримент по визначенню критичного теплового потоку під час вимушеного руху полягає у дослідженні процесу тепловіддачі в обраній системі (кругла труба, пучок стержнів) за умов реалізації фіксованих значень параметрів потоку на вході і виході при поступовому збільшенні

щільності теплового потоку, що передається від стінок до теплоносія. Критичне значення теплового потоку фіксується в момент виникнення коливань температури стінки з наступним її зростанням. Подібні експерименти лежать в основі більшості кореляцій і моделей, призначених для розрахунку критичних теплових потоків.

Як свідчить експеримент, механізм кризи теплообміну принципово відрізняється для режимів з недогрівом рідини відносно температури насичення при низьких вмістах пари (газу) (від'ємні і малі додатні значення X_e), на яких теплообмін визначається бульбашковим кипінням, і для режимів з високим вмістом пари (газу), де криза теплообміну обумовлена випаровуванням рідкої плівки у дисперсно-кільцевому режимі.

В першому випадку рідка фаза займає значну частину поперечного перерізу області течії. За таких умов криза теплообміну відбувається в результаті порушення гідродинамічної стійкості зустрічних потоків бульбашок пари, що рухаються від стінки, та струменів рідини, що підтікають до стінки. В результаті втрати стійкості цих потоків стінка покривається плівкою пари, що призводить до погіршення тепловіддачі. Криза теплообміну внаслідок порушення гідродинамічної стійкості зустрічних потоків називається *кризою I-го роду*.

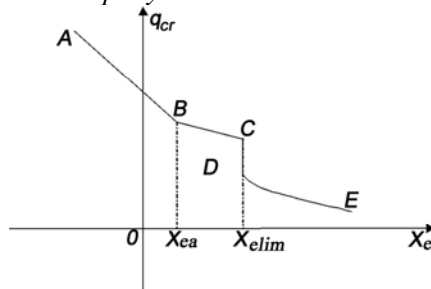


Рис.6.12. Залежність критичного теплового потоку від витратного масового вмісту пари (газу).

Криза першого роду виникає при дуже високих теплових навантаженнях та викликає значне зниження інтенсивності

відведення тепла від стінок каналу, що загрожує їх руйнуванням. Кризі першого роду відповідає ділянка АВ на рис.6.12. Кипінню недогрітої до температури насичення рідини відповідає область від'ємних значень X_e . Із зростанням X_e збільшується маса пари у потоці, що ускладнює надходження рідини до стінки та веде до зменшення значень критичного теплового потоку. Криза першого роду характерна для бульбашкового режиму двофазного потоку.

Криза теплообміну 2-ого роду відбувається при більш високих вмістах пари, коли реалізується дисперсно-кільцевий режим. Даний вид кризи теплообміну пов'язаний з випаровуванням пристінної рідкої плівки і називається ще *кризою висихання*. Після кризи висихання дисперсно-кільцевий режим переходить у дисперсний. Для кризи висихання характерні помірні теплові потоки та значно менше зниження тепловіддачі. Розглядаючи кризу другого роду, розрізняють три підрежими, що відрізняються закономірностями процесів масообміну між рідкою плівкою та парокропельним ядром потоку:

- I. криза висихання, при якій винесення вологи з поверхні рідкої плівки превалює над процесом осаджування вологи з ядра (лінія ВС);
- II. криза висихання, при якій процеси виносу та осаджування збалансовані (компенсуються). Виникнення подібної кризи відбувається при певному граничному значенні $X_{e \lim}$ незалежно від значень q_{cr} з певного інтервалу (вертикаль CD). Для кризи другого роду при $X_e = X_{e \lim}$ тепловий потік припинює впливати на вміст пари, при якому відбувається криза. Для визначення $X_{e \lim}$ використовується формула [3]:

$$X_{e \text{ lim}} = \left[0.39 + 1.57 \left(\frac{P}{9.8} \right) - 2.04 \left(\frac{P}{9.8} \right)^2 + 0.68 \left(\frac{P}{9.8} \right)^3 \right] \times \\ \times \left(\frac{\rho v_x}{1000} \right)^{-0.6} \left(\frac{8 \cdot 10^{-3}}{D_e} \right)^{0.15}, \quad (6.145)$$

де D_e – еквівалентний гідравлічний діаметр. Співвідношення (6.145) справедливе для таких діапазонів параметрів:

$$P = 0.98 \div 16.7 \text{ МПа}, \quad \rho v_x = 750 \div 3000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}},$$

$$D_e = 4 \div 16 \text{ мм};$$

III. криза висихання, при якій превалює процес осаджування вологи на поверхню рідкої плівки (ділянка DE). В такому випадку характерні досить малі теплові навантаження та великі вмісти пари (газу).

Зауважимо, що зниження q_{cr} із збільшенням X_e пояснюється, по-перше, тим, що із зростанням вмісту пари ускладнюється надходження рідини до стінки і, по-друге, у відповідності зі сказаним раніше, величина q_{cr} буде зменшуватися по мірі зниження інтенсивності обміну між рідкою плівкою та ядром, і буде мінімальною на ділянці DE, для якої товщина рідкої плівки є мінімальною.

Відмітимо, що крім вмісту пари (газу) на значення критичного теплового потоку впливають *тиск* та *масові швидкості*.

В усьому діапазоні тисків, що використовуються енергетикою, величина q_{cr} зменшується із зростанням тиску. Це пояснюється тим, що при зростанні тиску зменшується теплота пароутворення, що знижує можливість відведення тепла від стінки разом з теплою фазового переходу.

Масова швидкість $\rho_m v_m$ по-різному впливає на величину q_{cr} при різних значеннях X_e . При від'ємних і малих додатних значеннях

X_e залежність $q_{cr}(\rho_m v_m)$ є монотонно зростаючою, оскільки при бульбашковому режимі кипіння зростання масової швидкості сприяє виносу пари від стінки, а отже покращує умови тепловіддачі. При більш високих значеннях X_e залежність $q_{cr}(\rho_m v_m)$ стає монотонно спадаючою, оскільки збільшення масової швидкості призводить до додаткового виносу рідини з рідкої плівки і прискорює випаровування плівки. Значення X_e при якому відбувається зміна характеру залежності $q_{cr}(\rho_m v_m)$ називається *значенням інверсії*.

6.6.5.2 Табличний метод Гронеельда

З вищенаведеного розгляду можна зробити висновок, що в разі застосування кореляцій, які базуються на локальній миттєвій гіпотезі (тобто на значеннях параметрів в даному перерізі в даний момент часу), необхідно використовувати окремі кореляції, принаймні для опису криз теплообміну I-го і II-го роду. В той же час, з експерименту відомо, що на критичний тепловий потік q_{cr} головним чином впливають три параметри: тиск P , рівноважний витратний масовий вміст пари (газу) X_e і масова швидкість суміші G . Отже, існує можливість побудови залежності $q_{cr}(P, X_e, G)$, яка апроксимує експериментальні дані без урахування особливостей механізму кризи теплообміну. Такий підхід прийнятий у відомому табличному методі Гронеельда (Critical Heat Flux Lookup Table Method), що застосовується в коді RELAP 5. З характеристики, наданої методу його авторами, випливає, що цей метод може використовуватися для труб різного діаметру, пучків стержнів, враховує пряму та зворотню течії, ефекти зміни примежового шару та інші важливі особливості потоків у системах ЯЕУ. Проте, слід відмітити непоодинокі випадки невірної розрахунку значень критичного теплового потоку в пучках стержнів реакторів ВВЕР за допомогою метода Гронеельда. Це можна пояснити тим, що таблиця Гронеельда включає тільки дані експерименту, отримані для круглої труби постійного діаметру (0.008м), і не включає даних по критичних теплових потоках у пучках стержнів. Крім того, під

час розробки та валідації метода не враховувалася специфіка реакторів ВВЕР. На даний момент авторами коду RELAP визнано, що розрахунки критичного теплового потоку в системах реакторів ВВЕР (особливо в активній зоні) краще виконувати за допомогою набору кореляцій PG-CHF, введеного у код RELAP 5 починаючи з тривимірної версії RELAP 5 3D. Кореляції цього набору описані в підрозд. 6.6.5.4.

В той же час, необхідно відмітити, що метод Гронефельда має переваги над кореляціями, що використовувалися для розрахунку критичного теплового потоку в попередніх версіях коду RELAP. Кореляції, як правило, являють собою аналітичні співвідношення. Зміна будь-якого з коефіцієнтів, що входять у аналітичні вирази, обумовлена прагненням досягти кращих результатів для якоїсь конкретної ситуації, може виявитися неприйнятною при описах інших випадків. Отже, подібні кореляції, як правило, не мають широкої універсальності. Такий недолік відсутній у випадку використання таблиць, оскільки для забезпечення можливості розрахунку критичного теплового потоку при нових умовах течії, слід лише відкорегувати точки поблизу нових даних. До переваг методу Гронефельда над кореляціями слід віднести і той факт, що у методі Гронефельда враховується передісторія течії (використовуються інтегральні характеристики потоку), в той час, як кореляції базуються лише на значеннях параметрів, обчислених для даного перерізу та у даний момент часу (локальна миттєва гіпотеза).

Таблиця Гронефельда містить 4410 точок, представлених у вигляді тривимірного масиву, що покриває 15 значень тиску від 0.1 до 20.0 МПа, 14 значень масової витрати від 0.0 до $7500 \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$ та 21 значення рівноважного витратного масового вмісту пари (газу) X_e від -0.5 до 1.0.

Рівноважний масовий вміст пари (газу) розраховується за формулою:

$$X_e = \frac{[XU_g + (1 - X)U_f] - U_f^s}{U_g^s - U_f^s}, \quad (6.146)$$

де $X = \alpha_g \rho_g / (\alpha_g \rho_g + \alpha_f \rho_f)$ – статичний або істиний масовий вміст пари (газу).

У відповідності до методу Гронефельда критичний тепловий потік (CHF) розраховується за формулою:

$$\text{CHF} = \text{CHF}_{\text{Table}} \cdot \text{chfmul}, \quad (6.147)$$

де множник *chfmul* представляє собою добуток семи спеціальних коефіцієнтів, кожен з яких враховує певний специфічний ефект: $\text{chfmul} = k1 \cdot k2 \cdot k3 \cdot k4 \cdot k5 \cdot k6 \cdot k8$ (причини відсутності у цьому виразі коефіцієнту *k7* наведені у таб. 6.1.), $\text{CHF}_{\text{Table}}$ – значення CHF, що розраховується за допомогою лінійної інтерполяції табличних даних.

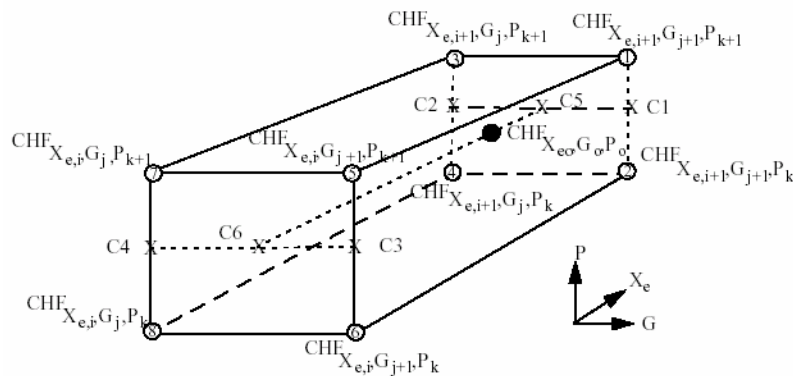


Рис.6.13. Схема інтерполювання за методом Гронефельда

При розрахунку значення $\text{CHF}_{\text{Table}}$ використовується 8 табличних значень критичного теплового потоку, що відповідають значенням

P , X_e та G , які оточують задані для розрахунку значення P_0 , X_{e0} , G_0 (рис.6.12). Спочатку, інтерполюючи CHF по тиску (тобто вважаючи сталими X_e та G) визначаються значення $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, потім за цими значеннями, використовуючи інтерполяцію за масовою витратою – значення $C5$, $C6$, і, нарешті, інтерполюючи по X_e знаходиться остаточне значення CHF_{Table} .

Коефіцієнти $k1-k8$ відображають вплив різних специфічних факторів. Значення цих коефіцієнтів наведені у таблиці.

k	Вираз
k1- гідравлічний коефіцієнт	$k1 = \left(\frac{0.008}{D} \right)^{0.33} \quad \text{для } D < 0.016 \text{ м}$ $k1 = \left(\frac{0.008}{0.016} \right)^{0.33} \quad \text{для } D > 0.016 \text{ м}$ $D = \frac{4A}{P_{heated}} \text{ еквівалентний діаметр, що нагрівається}$
k2 – коефіцієнт, що враховує геометрію течії (виділяються пучки стержнів та інші геометрії)	$k2 = \min[0.8, 0.8 \exp(-0.5 X_e^{0.33})]$ для пучків стержнів $k2 = 1.0 \text{ для інших геометрій}$
k3 – коефіцієнт, що враховує вплив на CHF розташування дистанціонуючих ґраток	$k3 = 1 + A \exp\left(-B \cdot \frac{L_{sp}}{D}\right)$ $A = 1.5 (K_{loss})^{0.5} (G \cdot 0.001)^{0.2}; B = 0.1$ K_{loss} – коефіцієнт втрат тиску на ґратці L_{sp} – відстань від дистанціонуючої ґратки

k4 – коефіцієнт, що враховує відносну довжину ділянки, що нагрівається, вплив гідродинамічної початкової ділянки	$k4 = \exp \left\{ \left(\frac{D}{L} \right) \left[\exp(2 \cdot alp) \right] \right\}$ $alp = \frac{x \lim}{\left[x \lim + (1 - x \lim) \right]} \frac{\rho_g}{\rho_f}$ $x \lim = \min \left[1, \max(0, X_e) \right]$ L – довжина ділянки, що нагрівається від точки входу до точки розрахунку CHF
k5 – коефіцієнт урахування аксіального розподілу потужності	k5=1.0 для $X_e < 0$ $k5 = \frac{q_{local}}{q_{bla}};$ q_{local} – тепловий потік в точці розрахунку CHF, q_{bla} – середній потік тепла від точки початку кипіння до точки розрахунку CHF
k6 – коефіцієнт урахування горизонтальної стратифікованості течії	k6=1 якщо течія вертикальна k6=0 якщо течія горизонтально стратифікована k6=1 якщо течія горизонтальна, але не стратифікована k6 – інтерполяційна формула, на проміжних режимах
k7 – коефіцієнт, що враховує особливості розрахунку CHF при малих масових витратах. $-50 \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} < G < 10 \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$ Необхідний для забезпечення гладкості залежності CHF від масової витрати.	а. для $G < -400$ або $G > 100 \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$, k7 = 1 б. для $-50 < G < 10 \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$, $k7 = (1 - \alpha) \text{ для } \alpha < 0.8$ $k7 = (1 - \alpha) \frac{(0.8 + 0.2 \cdot \text{denr})}{\left[\alpha + (1 - \alpha) \cdot \text{denr} \right]}$ $\text{denr} = \frac{\rho_f}{\rho_g} \text{ для } \alpha > 0.8$

Цей коефіцієнт відсутній в оригінальній версії методу Гроневельда і введений лише в коді RELAP	табличне значення CHF обчислюється при $G=0$; $X_e=0$ с. для $10 < G < 100 \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$ або $-400 < G < -50 \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$ значення k7 інтерполюється
k8 – коефіцієнт, що враховує можливий вихід тиску за межі діапазону таблиці	$k8 = \frac{\text{prop}(\text{out})}{\text{prop}(\text{border})}$ $\text{prop} = \rho_g^{0.5} h_{fg} \left[\text{sig}(\rho_f - \rho_g) \right]^{0.25}$

В той же час, зазначені вище недоліки методу Гроневельда призвели до того, що часто застосовуються кореляційні співвідношення, надійність яких, в певних визначених діапазонах параметрів, є визнаною в практиці теплогідравлічних розрахунків. До таких належить, в першу чергу, кореляція Безрукова.

6.6.5.3 Кореляція Безрукова

Кореляція Безрукова являє собою апроксимацію експериментальних даних, отриманих для пучка з 7 стержнів з електродігрівом. Дослідження було проведено в діапазоні тисків 8.35-16.7МПа, масових швидкостей $1000-3000 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$, та відносних ентальпій $-0.07 \div 0.4$ (що вказує на опис кризи обох механізмів однією кореляцією). В процесі експериментальних досліджень було отримано більше 440 точок. Експериментальна установка являла собою стенд з замкненим циркуляційним контуром. Тиск в системі утворювався за рахунок газового компенсатора об'єму, а циркуляція забезпечувалася центробіжним насосом. Дослідна ділянка нагрівалася струмом від мотор-генераторів. Криза фіксувалася за умов погіршення тепловіддачі, а саме – по незначному підвищенню температури стінки (в межах 10-20 К).

Криза відбувалася за рахунок поступового збільшення потужності при постійних значеннях тиску, масової швидкості та температури теплоносія на вході до ділянки, що нагрівається. Так само, як і в методі Гроневельда, критичний тепловий потік вважався функцією трьох параметрів – масової швидкості G , тиску P і відносної ентальпії X_e . Апроксимація експериментальних даних методом найменших квадратів привела авторів до такої кореляційної формули, що виражає критичний тепловий потік:

$$q_{cr} = a_1(1 - X_e)^{a_2 + a_3 P} G^{a_4 + a_5(1 - X_e)} (1 + a_6 P), \quad (6.148)$$

де $a_1 = 0.795$, $a_2 = -0.5$, $a_3 = 0.105$, $a_4 = -0.127$, $a_5 = 0.311$, $a_6 = -0.0185$.

Формула (6.148) дає задовільну точність наближення експериментальних даних в таких діапазонах зміни параметрів: тиск: $7.45 \div 16.7 \text{ МПа}$, масова швидкість: $700 \div 3800 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$, відносна ентальпія $-0.07 \div +0.4$. Середньоквадратичне відхилення розрахункових даних від експериментальних в цих межах становить 13.1%.

Набір кореляцій PG-CHF розроблено в Інституті ядерних досліджень Чехії [3]. Дані кореляції побудовано по даних, отриманих внаслідок проведення експериментальних досліджень критичних теплових потоків в трубах, пучках стержнів та кільцевих трубопроводах різної геометрії. Діапазони значень визначальних параметрів набагато ширші ніж ті, що використовуються в кореляції Безрукова або в табличному методі Гроневельда. Тиск: $0.26 \div 18.93 \text{ МПа}$, масова швидкість $34.1 \div 7500 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$, відносна ентальпія $-1.73 \div 0.44$.

6.6.5.4 Кореляція PG-CHF

В моделі PG-CHF будується кореляційна залежність для відношення критичного теплового потоку до локального потоку тепла в даному перерізі області течії. Її загальна форма має вигляд:

$$R = \frac{k1(fg)f(P,G)f(P,X_e)}{f(P)(dTr)^{k2}f(q,G,h_{fg},X_{ei},X_{el})f(P,G,h_{fg},X_{ei},X_{el})f(P,X_{ei},X_{el})}$$

(6.149)

де $R = \frac{CHF}{q}$ - відношення критичного теплового потоку до

локального теплового потоку, P – тиск, $k1$ – коефіцієнт кореляції, який може приймати різні значення, в залежності від конкретного типу кореляції, що підключається користувачем, fg – коефіцієнт, що враховує середньоквадратичну похибку, яка відповідає застосуванню даної моделі, використовується тоді, коли користувач має необхідні дані експетименту, в іншому випадку $fg = 1.0$, $h_{fg} = h_g - h_f$ - різниця ентальпій фаз на лінії насичення, q - локальний тепловий потік, $dTr = D_h \times Tr$ - добуток гідравлічного діаметру каналу на параметр Tr радіального розподілу теплового

потоку, $Tr = q \frac{\sum_i P_{wi}}{\sum_i q_i P_{wi}}$, P_{wi} - частина змоченого периметру перерізу

канала, вздовж якої діє тепловий потік q_i .

Набір кореляцій PG-CHF включає 4 кореляції, які розрізняються виглядом функціональних залежностей, що входять в загальний вигляд кореляції (6.149). З огляду на дуже велику складність відповідних формул, детальний вигляд вказаних кореляцій [11] в даному навчальному виданні наводити недоцільно. Вкажемо лише ті фактори, які враховуються в цих залежностях і які повинні вводитися користувачем у випадку використання кореляцій PG-CHF.

1) Коефіцієнт, що враховує розподіл теплового потоку по

довжині каналу, що нагрівається: $\frac{1}{q(y)} \int_0^y q(z) dz$, де y –

відстань від входу до ділянки, що нагрівається, $q(y)$ – локальний тепловий потік. Таким чином, цей коефіцієнт

представляє добуток відстані y на відношення середнього теплового потоку на ділянці від входу до перерізу з координатою y до локального теплового потоку.

- 2) Відстані до дистанціонуючих ґраток, що знаходяться вище і нижче перерізу, в якому розраховується критичний тепловий потік.
- 3) Коефіцієнт радіального розподілу теплового потоку, Tr , введений вище.

Відзначимо, що в методі Гронефельда ураховувався лише аксіальний середній тепловий потік, розподіл теплового потоку по радіусу перерізу вважався однорідним.

Порівняння результатів, отриманих за методами Гронефельда, Безрукова і PG-CHF з результатами експерименту, отриманими для установки КС-1 (Інститут імені Курчатова, Росія) [12] свідчить про переваги кореляцій PG-CHF. Зокрема, стандартне відхилення результатів розрахунку від результатів експерименту становило 6.6% для моделі PG-CHF, 12.4% для моделі Безрукова, 13.5% для моделі Гронефельда.

6.6.6 Кореляції для теплообміну при перехідному кипінні (Режими 5,6)

Перехідний режим кипіння настає після кризи теплообміну і є проміжним режимом між бульбашковим кипінням і стійким плівковим кипінням. На перехідному режимі кипіння має нестійкий характер внаслідок чергування з часом режимів бульбашкового і плівкового кипіння, що відбувається для кожної малої ділянки стінки каналу. Для кількісного опису тепловіддачі на даному режимі кипіння необхідно охарактеризувати інтенсивність тепловіддачі для бульбашкового і плівкового режимів кипіння, а також – відносний час існування кожного з цих режимів. Ці характеристики дозволяють знайти значення тепловіддачі на перехідному режимі кипіння, осереднене на певному відрізку часу.

Визначення тепловіддачі на перехідному режимі кипіння в коді RELAP 5 проводиться на основі моделі перехідного кипіння Чена, яка застосовується для обох режимів перехідного кипіння [11].

Згідно з підходом Чена, чергування режимів кипіння можна представити як чергування контакту стінки з рідкою та газоподібною фазою. Таким чином, загальна тепловіддача при перехідному кипінні є сумою двох окремих компонентів, перший з яких представляє тепловіддачу до рідкої, а другий – до газоподібної фази:

$$q_{tb} = q_{wf} A_f + h_{wgg} (T_w - T_g) (1 - A_f), \quad (6.150)$$

де q_{tb} – сумарний тепловий потік до теплоносія на плівковому режимі кипіння, q_{wf} – середній тепловий потік до рідини за час контакту рідини зі стінкою, A_f – відносна площа нагрітої поверхні, змочена рідиною, яка залежить від кількості рідини, присутньої у даному перерізі у даний момент часу та від ймовірності контакту рідини з нагрітою поверхнею, h_{wgg} – коефіцієнт тепловіддачі до газоподібної фази, розрахований для режимів однофазної конвекції за рівнянням, аналогічним рівнянню Диттуса-Боелтера, T_w – температура стінки, T_g – температура газоподібної фази.

Кореляція для відносної площі A_f має вигляд:

$$A_f = e^{-\lambda(T_w - T^s)^{0.5}}, \quad (6.151)$$

де $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 = C_1 - \frac{C_2 G}{10^5}$, $\lambda_2 = \frac{14 C_3 G}{10^9}$, $C_1 = 2.4 C_2$,

$C_2 = \frac{0.05}{1 - \alpha_g^{40}} + 0.075 \alpha_g$, $C_3 = 0.2 C_2$, T^s - температура насичення при

повному тиску.

Для розрахунку коефіцієнту тепловіддачі h_{wgg} використовується така модифікація кореляції Диттуса-Боелтера:

$$h_{wgg} = 0.0185 \text{Re}^{0.83} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}. \quad (6.152)$$

В коді RELAP 5 використовується модифіковане рівняння (6.150). З метою спрощення обчислювального процесу загальний тепловий

потік від стінки до теплоносія, що дорівнює сумі теплових потоків від стінки до рідини і від стінки до газу, представляється у вигляді:

$$q_{tb} = q_{CHF} A_f M_f + h_{wgg} (T_w - T_s) (1 - A_f M_f), \quad (6.153)$$

де q_{CHF} – критичний тепловий потік, розрахований для даних умов, M_f – множник, що враховує вертикальну розшарованість потоку. При цьому, якщо встановлено, що режим течії є вертикально розшарованим, множник M_f приймає значення об'ємного вмісту рідини в об'ємі з вертикальним розшаруванням, якщо ж підключена модель проходження рівню розшарування (див. розд. 8), M_f має значення відносної висоти положення рівню розшарування всередині контрольного об'єму. У випадку, коли умови вертикального розшарування не виконуються, M_f дорівнює одиниці.

Крім цього, з метою покращення властивостей алгоритмів чисельного обчислення, в коді RELAP 5 вносяться деякі зміни у процедуру обчислення відносної площі A_f . Ці модифікації детально розглянуті в [11].

Середня похибка обчислення теплових потоків за допомогою підходу Чена за даними [11] становить 16.0%.

6.6.7 Кореляції для теплообміну при плівковому кипінні недогрітої рідини (Режим 7) та плівковому кипінні насиченої рідини (Режим 8).

Теплообмін при плівковому кипінні може протікати при трьох режимах двофазного потоку – оберненому дисперсно-кільцевому, оберненому снарядному та дисперсному. Обернений дисперсно-кільцевий режим настає після кризи теплообміну, якщо до кризи реалізовувався бульбашковий режим. Отже, плівковий режим кипіння у випадку оберненого дисперсно-кільцевого режиму потоку характерний низькими значеннями об'ємного вмісту пари. Дисперсний режим виникає внаслідок кризи висихання, в умовах високих об'ємних вмістів пари. Обернений снарядний режим реалізується при значеннях вмісту пари, проміжних між значеннями,

характерними для оберненого дисперсно-кільцевого і дисперсного режимів. Механізмами теплопередачі від стінки до теплоносія при плівковому режимі кипіння є теплопровідність через газоподібну плівку, що контактує з нагрітою стінкою, конвективний теплообмін між стінкою та рухомим газом і між газом та рідким ядром, а також променевий теплообмін з рідкою фазою або дисперсною сумішшю рідких крапель та газу, що відбувається через газоподібну плівку. Рідина не торкається стінки, внаслідок дії відштовхуючої сили, що генерується при випаровуванні рідини.

Відмітимо, що обчислене значення теплового потоку при плівковому кипінні застосовується лише у тому випадку, коли воно вище за значення теплового потоку для перехідного режиму. Це дозволяє запобігти процедури визначення мінімальної температури стійкого плівкового кипіння.

6.6.7.1 *Моделювання коефіцієнтів тепловіддачі за рахунок теплопровідності*

Однією з найбільш відомих кореляцій для тепловіддачі при плівковому кипінні є кореляція Бромлі, розроблена для опису механізму теплопровідності від стінки до рідини, що знаходиться в спокої в горизонтальній трубі, через газоподібну плівку. Згідно з кореляцією Бромлі, коефіцієнт тепловіддачі h дається виразом:

$$h = C \left[\frac{g \rho_g \lambda_g^2 (\rho_f - \rho_g) h'_{fg} C_{pg}}{L (T_w - T^s) Pr_g} \right], \quad (6.154)$$

де h'_{fg} – модифікована теплота пароутворення h_{fg} , що містить додатково енергію, яка поглинається газоподібною плівкою:

$$h'_{fg} = h_{fg} + 0.5 C_{pg} (T_w - T^s). \quad (6.155)$$

Для труб приймаються такі значення коефіцієнту C і лінійного параметру L : $C = 0.62$; $L = D$, де D - діаметр труби.

Інший підхід до визначення тепловіддачі при плівковому кипінні полягає у аналізі гідродинамічної стійкості газоподібної плівки. В

результаті такого аналізу знову приходять до співвідношення (6.154), однак при інших значеннях C і L :

$$C = 0.425, L = 2\pi \left[\frac{\sigma}{g(\rho_f - \rho_g)} \right]^{0.5}, \quad (6.156)$$

Згідно з (6.156) параметр L являє собою критичну довжину хвилі на поверхні плівки.

Модель плівкового кипіння, що використовується кодом RELAP 5, враховує результати, отримані внаслідок застосування обох згаданих підходів. Для коефіцієнту тепловіддачі h_{fs} при плівковому кипінні насиченої рідини прийнято співвідношення:

$$h_{fs} = 0.62 \left[\frac{g \rho_g \lambda_g^2 (\rho_f - \rho_g) h'_{fg} C_{pg}}{L (T_w - T^s) Pr_g} \right] M_a, \quad (6.157)$$

де L визначається виразом (6.156), M_a – множник, що забезпечує гладкість зміни коефіцієнту тепловіддачі h в діапазоні зміни об'ємного вмісту пари α_g (від $\alpha_g = 0.2$ для плівкового кипіння при оберненому дисперсно-кільцевому режимі до $\alpha_g = 0.999$ для плівкового кипіння при дисперсному режимі).

Прийнята в RELAP5 модель тепловіддачі при плівковому кипінні недогрітої рідини враховує ефект збільшення інтенсивності теплообміну на цьому режимі у порівнянні з режимом плівкового кипіння насиченої рідини:

$$h_{fs} = h_s \left\{ 1 + 0.025 \max [T^s - T_f, 0.0] \right\}, \quad (6.158)$$

де h_{fs} – коефіцієнт тепловіддачі для плівкового кипіння насиченої рідини, визначається виразом (6.157).

6.6.7.2 *Моделювання коефіцієнта тепловіддачі за рахунок конвекції*

По мірі зменшення рідкого ядра в оберненому дисперсно-кільцевому режимі потоку збільшується внесок конвективного

теплообміну з газоподібною фазою у процес загального теплообміну при плівковому кипінні. Для значних масових витрат цей механізм стає домінуючим. Виходячи з цього, для моделювання процесу конвективної теплопередачі при плівковому кипінні використовуються співвідношення, отримані для однофазної конвекції газу. При цьому застосовується лінійне інтерполювання коефіцієнту тепловіддачі в діапазоні $0 \leq \alpha_g \leq 0.5$, припускаючи, що $h=0$ при $\alpha_g=0$, а при $\alpha_g=0.5$ коефіцієнт тепловіддачі h визначається кореляцією для однофазної конвекції газу.

6.6.7.3 *Моделювання тепловіддачі за рахунок випромінювання*

При моделюванні тепловіддачі за рахунок випромінювання припускається, що обмін енергією випромінювання відбувається між рідиною та газом, рідиною та стінкою і газом та стінкою. Ланцюговий обмін енергією між частинами стінки не враховується, отже всі частини поверхні стінки, згідно з припущенням, мають майже однакову температуру. Суміш рідини та газу в каналі вважається такою, що до неї можна застосувати модель оптично тонкого середовища. Потоки тепла подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} q_{wf} &= F_{wf} \sigma (T_w^4 - (T^s)^4), \quad (\text{стінка} - \text{рідина}), \\ q_{wg} &= F_{wg} \sigma (T_w^4 - T_g^4), \quad (\text{стінка} - \text{газ}), \\ q_{gf} &= F_{gf} \sigma (T_g^4 - (T^s)^4), \quad (\text{газ} - \text{рідина}). \end{aligned} \quad (6.159)$$

В формулах (6.159) припускається, що рідина знаходиться при температурі насичення, що відповідає повному тиску ($T_f = T^s$). Множники F – коефіцієнти сірого тіла, що виражають відміну закону випромінювання від закону Стефана-Больцмана випромінювання абсолютно чорного тіла, σ – стала Стефана-Больцмана. Формули для обчислення цих величин наведені у керівництві з коду RELAP 5 [11]. Зауважимо, що у RELAP 5 нехтують другим та третім тепловим потоком (6.159) у порівнянні з першим. Це пояснюється тим, що, по-перше, температура газу майже не відрізняється від температури стінки і, по-друге, тим, що

значення коефіцієнту сірого тіла при обміні енергією випромінювання між рідиною та газом набагато менші за відповідні значення при обміні енергією між стінкою та рідиною [11].

Сумарний тепловий потік при плівковому кипінні виражається сумою теплових потоків за рахунок теплопровідності, конвекції та випромінювання. Похибка наближення експериментальних даних, за [11], лежить в межах $\pm 18\%$.

6.6.8 Кореляції для теплообміну при конденсації (Режим 10 для $\alpha_g < 1$ і Режим 11 для $\alpha_g = 1$).

Пристінна конденсація – це процес фазового переходу, внаслідок якого пара, розташована поблизу стінки, температура якої менша температури насичення, переходить в рідину на стінці. Процес супроводжується виділенням тепла. В початковий момент зіткнення пари з холодною поверхнею остання покривається мономолекулярним адсорбованим шаром, який в процесі конденсації або зростає й ущільнюється, або при досягненні певної товщини (порядку мікрона) руйнується, утворюючи велику кількість крапель. Перший вид конденсації, при якому на поверхні утворюється суцільна стійка плівка, називається *плівковою конденсацією*. Другий, коли відбувається процес з утворенням крапель, – *крапельною конденсацією*. Як стверджує експеримент, коефіцієнт тепловіддачі при плівковій конденсації в 5–10 разів менший, ніж при крапельній [7]. Це обумовлено більшим термічним опором плівки, що відділяє пару від стінки. Незважаючи на те, що теплообмін при крапельній конденсації більш вигідний у порівнянні з плівковим, на практиці в переважній більшості випадків зустрічається плівкова конденсація. Такий вид конденсації реалізується і в системах ЯЕУ.

В багатьох випадках, типових для аварій на реакторах ВВЕР, газоподібна фаза являє собою суміш пари і газів, що не конденсуються. Гази, що не конденсуються, відіграють роль певного ізолятора в процесі теплообміну між парою і стінкою. Інтенсивність процесів конденсації і теплообміну залежить від кількох факторів: різниці між температурою насичення при парціальному тиску пари і

температурою стінки, товщини рідкої плівки, турбулентності і т.д. Тепло, що звільнюється на міжфазній поверхні в процесі конденсації, переноситься через рідку плівку до стінки.

На даний момент у коді RELAP 5 застосовується тільки модель плівкової конденсації. Схематичне зображення плівкової конденсації на вертикальній поверхні приведене на рис. 6.14.

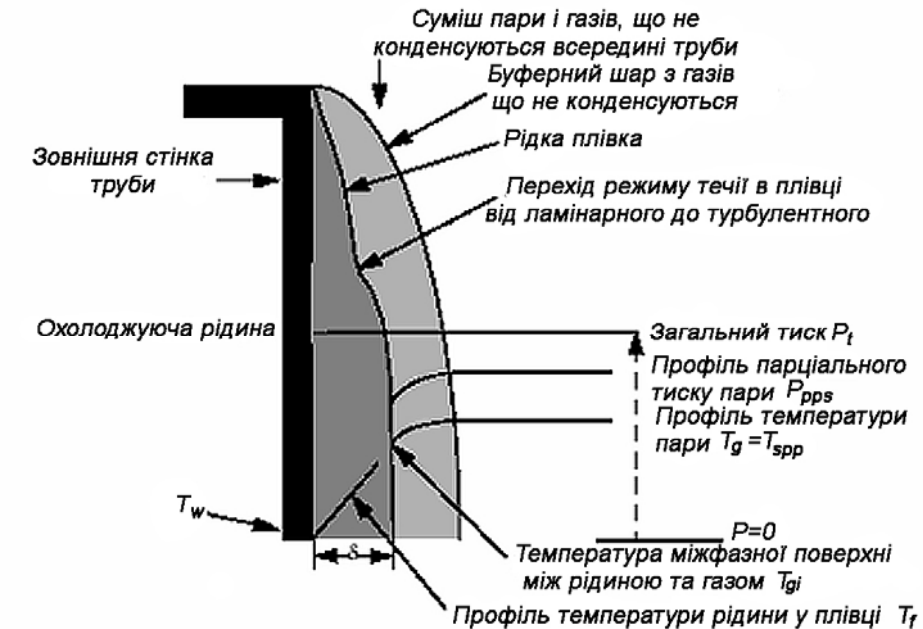


Рис. 6.14 Плівкова конденсація на вертикальній стінці.

Радіальна течія пари у напрямку холодної стінки переносить газів, що не конденсуються до пристінної області, де вони накопичуються внаслідок конденсації пари. В результаті утворюється градієнт концентрації газів, що не конденсуються, внаслідок чого виникає дифузія цих газів назад, до основної течії, в напрямку,

протилежному течії пари. В буферній зоні з великою концентрацією газів, що не конденсуються, парціальний тиск пари і її температура мають менші значення ніж в області основної течії. Таким чином, присутність газів, що не конденсуються призводить до зменшення теплового потоку від газу до стінки через рідку плівку внаслідок зменшення перепаду температур $T_{gi} - T_w$, де T_{gi} – температура міжфазної поверхні між рідкою плівкою та газом, T_w – температура стінки (див. рис.6.14). Також, як випливає з рис.6.14, збільшення товщини рідкої плівки веде до переходу режиму течії в плівці від ламінарного до турбулентного. За даними [11] перехід відбувається за умови $Re = Re_{cr}$; $Re_{cr} = 1800$. Число Рейнольдса визначається таким чином:

$$Re = \frac{4\Gamma}{\mu_f}, \quad (6.160)$$

де μ_f - в'язкість рідини, $\Gamma = \frac{\dot{m}_f}{\pi D_i}$ - масова витрата рідини, віднесена

до периметру труби, $\dot{m}_f$ - масова витрата рідини, D_i - внутрішній діаметр труби.

Умовами, за яких ідентифікується режим конденсації і підключається відповідна модель є:

1. Температура стінки менша за температуру насичення при парціальному тиску пари в ядрі потоку більш ніж на 0.001K.
2. Температура рідини перевищує температуру стінки. Модель RELAP 5 є моделлю плівкової конденсації, в рамках якої припускається, що рідина має нагрівати стінку.
3. Об'ємний вміст рідини більший 0.1 ($\alpha_f > 0.1$), якщо α_f прямує до нуля, відбувається перехід до режиму однофазної конвекції.
4. Вміст газів, що не конденсуються, в ядрі потоку менший за 0.999.
5. Тиск менший критичного.

На режимах, перехідних до конденсації, з метою забезпечення гладкості застосовується лінійна інтерполяція коефіцієнтів тепловіддачі до рідкої і газоподібної фази. Метод розрахунку

коефіцієнту тепловіддачі при конденсації викладено нижче. Якщо цей коефіцієнт відомий, можемо обчислити загальний тепловий потік:

$$q'' = h_c (T_w - T_{sppb}), \quad (6.161)$$

де q'' - загальний тепловий потік, h_c - коефіцієнт тепловіддачі при конденсації, T_{sppb} - температура насичення при парціальному тиску пари в ядрі потоку.

В моделі плівкової конденсації припускається, що існує теплообмін між стінкою та обома фазами – як рідкою, так і газоподібною. Тепловий потік від рідини до стінки дається виразом:

$$q'' = h_c (T_w - T_f), \quad (6.160)$$

Тепловий потік від газу до стінки представляється різницею загального теплового потоку і теплового потоку від рідини до стінки. Тепловий потік від газу до стінки повинен мати або від'ємне, або нульове значення.

6.6.8.1 Кореляції для теплообміну при конденсації на нахилених поверхнях

В моделі конденсації коду RELAP 5 в якості коефіцієнту тепловіддачі використовується максимальне з значень коефіцієнту тепловіддачі, обчислених для турбулентного і ламінарного режиму, з урахуванням впливу дифузії у випадку присутності газів, що не конденсуються.

Для ламінарного режиму використовується кореляція Нуссельта, розроблена для опису процесу конденсації на вертикальних поверхнях. В цій кореляції замість різниці температур, як ключовий параметр використовується товщина плівки. Кореляція має вигляд:

$$h_{\text{Nusselt}} = \frac{\lambda_f}{\delta}, \quad (6.163)$$

де товщина плівки визначається як: $\delta = \left[\frac{3\mu_f \Gamma}{g\rho_f(\rho_f - \rho_g)} \right]^{1/3}$.

Кореляція Нуссельта отримана при таких припущеннях стосовно властивостей потоку на початку ділянки конденсації (верхня частина вертикальної поверхні):

1. Рідина має постійні фізичні властивості.
2. Відсутнє міжфазне тертя на поверхні рідкої плівки.
3. Відхиленням температури рідини від температури насичення можна знехтувати.
4. Теплопередача відбувається за рахунок теплопроводності через рідку кільцеву плівку, рух рідини в якій ламінарний.

Для конденсації при турбулентному режимі течії в коді RELAP 5 використовується кореляція Шо:

$$h_{Shaw} = h_{sf} \left(1 + \frac{3.8}{Z^{0.95}} \right), \quad (6.164)$$

де $Z = \left(\frac{1}{X} - 1 \right)^{0.8} P_{red}^{0.4}$, X – статичний масовий вміст газу, дорівнює відношенню маси газоподібної фази в одиниці об'єму суміші до маси одиниці об'єму суміші, $P_{red} = \frac{P}{P_{critical}}$, $h_{sf} = h_f (1 - X)^{0.8}$ –

зведений коефіцієнт тепловіддачі, $h_f = 0.023 \left(\frac{\lambda_f}{D_h} \right) Re_f^{0.8} Pr_f^{0.4}$ – коефіцієнт тепловіддачі для однофазної конвекції рідини. Коефіцієнт тепловіддачі при конденсації h_c визначається таким чином:

$$h_c = \max(h_{Shah}, h_{Nusselt}). \quad (6.165)$$

Отже, в якості h_c береться максимальне з значень коефіцієнту тепловіддачі, розрахованих для ламінарного і турбулентного режимів руху рідини в плівці.

У випадку нахилених поверхонь, замість гравітаційного прискорення використовується його проекція на напрям розташування поверхні, $g \cos \vartheta$, де ϑ – кут нахилу поверхні по відношенню до вертикалі. Відмітимо, що у випадку вертикально розшарованої течії, код визначає окремо значення коефіцієнтів

тепловіддачі вище і нижче рівня розшарування. Вище рівня розшарування використовується кореляція Нуссельта для ламінарного режиму, в той час як нижче – використовується значення коефіцієнту тепловіддачі, максимальне серед значень, отриманих для режимів вимушеної ламінарної конвекції, вимушеної турбулентної конвекції та вільної конвекції. Також у випадку вертикального розшарування коефіцієнт для рідкої фази множиться на введений раніше множник M_f (див. (6.153)), а коефіцієнт для газоподібної фази, відповідно – на множник $1 - M_f$.

6.6.8.2 *Моделювання теплообміну при конденсації за умов присутності газів, що не конденсуються.*

Модель, що ураховує вплив газів, що не конденсуються, на процес конденсації базується на підході Колбурна-Хогена [11]. Модель розроблено при таких основних припущеннях стосовно характеру потоку:

1. Теплопередачею через дифузійний шар можна знехтувати.
2. Стратифікацією в газоподібній фазі (розшаруванням пари та газів, що не конденсуються), пов'язаною з дією термогравітаційних сил можна знехтувати.

В основу моделі покладений такий принцип збереження енергії при фазових переходах: кількість тепла, яка переноситься шляхом дифузії парою через буферний шар газів, що не конденсуються, до міжфазної поверхні між рідкою і газоподібною фазою (див. рис.6.14), дорівнює кількості тепла, що передається через конденсат (рідку плівку) до стінки. З цього принципу можна, будуючи ітераційний процес, знайти тиск на міжфазній поверхні і її температуру, після чого визначити і інтенсивність теплообміну.

Потік тепла, який виникає внаслідок конденсації масового потоку пари j_v , що рухається в напрямку міжфазної поверхні, задається виразом:

$$q_v'' = j_v \cdot h_{fgb} \cdot (6.166)$$

де $h_{fgb} = h_{fgsat}(P_{vb})$ - різниця ентальпій насичення пари і рідини, визначених при парціальному тиску пари в ядрі потоку, P_{vb} - парціальний тиск пари в ядрі потоку. Масовий потік пари j_v подається таким чином:

$$j_v = h_m \rho_{vb} \ln \left[\frac{1 - \frac{P_{vi}}{P}}{1 - \frac{P_{vb}}{P}} \right], \quad (6.167)$$

де P - повний тиск, P_{vi} - парціальний тиск пари на міжфазній поверхні, h_m - коефіцієнт масообміну, який дорівнює максимуму з коефіцієнтів, отриманих за кореляціями для вимушеної ламінарної конвекції, вимушеної турбулентної конвекції та вільної конвекції [11], ρ_{vb} - густина насичення пари при парціальному тиску пари в ядрі потоку, $\rho_{vb} = (1 - X_n) \rho_{mb}$, ρ_{mb} - густина суміші пари і газів, що не конденсуються, при температурі газоподібної фази в ядрі потоку.

З урахуванням (6.167) співвідношення для q_v'' набуває вигляду:

$$q_v'' = h_m h_{fgb} \rho_{vb} \ln \left[\frac{1 - \frac{P_{vi}}{P}}{1 - \frac{P_{vb}}{P}} \right]. \quad (6.168)$$

Тепловий потік через рідку плівку до стінки дається виразом:

$$q_l'' = h_c (T_{vi} - T_w), \quad (6.169)$$

де $T_{vi} = T_{sat}(P_{vi})$ - температура насичення, що відповідає парціальному тиску пари на міжфазній поверхні (теж саме, що і T_{gi} на рис.6.14). Коефіцієнт теплообміну при конденсації h_c визначається з кореляцій, приведених в попередньому підрозділі.

Принцип балансу енергії при фазових переходах записується у вигляді:

$$q_v'' = q_l'', (6.170)$$

де q_v'' дається виразом (6.168), а q_l'' - виразом (6.169). Співвідношення (6.170) являє собою рівняння, з якого знаходиться парціальний тиск пари на міжфазній поверхні. Для цього використовується ітераційна процедура. По відомому значенню тиску P_{vi} можна розрахувати температуру міжфазної поверхні T_{vi} , а отже знайти і тепловий потік до стінки q_l'' .

6.6.8.3 *Модель теплообміну при конденсації в горизонтальних трубах*

Процес конденсації пари в горизонтальних трубах визначається концентрацією конденсату на верхній частині внутрішньої поверхні труби, стіканням його в нижню частину і рухом конденсату до одного з кінців труби під дією градієнту тиску.

Кореляція для коефіцієнту тепловіддачі має вигляд:

$$h_c = F \left[\frac{g \rho_f (\rho_f - \rho_g) h_{fgb} \lambda_f^3}{D_h \mu_f (T_{sppb} - T_w)} \right]^{1/4}, (6.171)$$

де λ_f, μ_f, ρ_f - відповідно, коефіцієнт теплопровідності, в'язкість і густина рідини, $h_{fgb} = h_{fgsat}(P_{vb})$ - різниця ентальпій насичення пари і рідини, визначених при парціальному тиску пари в ядрі потоку, T_{sppb} - температура насичення, що відповідає парціальному тиску пари в ядрі потоку, множник F враховує рівень розташування рідкої плівки в нижній частині труби. Він має вигляд:

$$F = F(\Phi), (6.172)$$

де Φ - половина кута між радіусами, проведеними з центру труби до кінців хорди, що представляє рівень рідини на дні труби. Як свідчать розрахунки, для параметра F можна прийняти середнє значення, рівне 0.296, що відповідає $2\Phi = 120^\circ$. Порівняння з експериментальними даними, показало, що похибка даної кореляції лежить в межах $+8 \div -18\%$ [11].

6.7 Міжфазний тепломасообмін

6.7.1 . Основні припущення

У розд. 4 було відзначено, що в загальному процесі конвективного теплообміну виділяють дві складові: (а) міжфазний теплообмін, що відбувається через міжфазну поверхню в ядрі потоку і є наслідком різниці температур фаз у ядрі, та (б) теплообмін між стінкою та фазами, в процесі якого тепла енергія передається від стінки або до рідкої, або до газоподібної фази, або – до обох фаз одночасно. У підрозд. 6.6 описані кореляції для коефіцієнтів тепловіддачі, що пов'язують тепловий потік, спрямований на зміну енергії тієї або іншої фази, та різницю температур, внаслідок якої він виникає. В той же час, виділяється спеціальний випадок теплообміну між середовищем та стінкою, який характеризується контактом стінки з двофазною сумішшю, а не з окремою фазою. Наслідком такого контакту є підведення енергії напряму до Σ – фази (міжфазної поверхні), в результаті чого відбувається фазовий перехід, а отже і обмін масою між фазами.

Процеси обміну енергією і масою між фазами мають назву *міжфазного тепломасообміну*. В цьому підрозділі будуть проаналізовані рівняння енергії, в результаті чого стане зрозумілою роль окремих членів цих рівнянь в процесі міжфазного тепломасообміну.

Рівняння збереження повної енергії, записані для фаз, мають вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g U_g) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U_g v_g A) = -P \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} - \frac{P}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g v_g A) +$$

$$+ Q_{wg} + Q_{ig} + \Gamma_{ig} h_g^* + \Gamma_w h_g' - Q_{gf} + \text{DISS}_g,$$

[I] [J] [K] [L]

(6.173)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f U_f) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f \rho_f U_f v_f A) = -P \frac{\partial \alpha_f}{\partial t} - \frac{P}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f v_f A) +$$

$$+ Q_{wf} + Q_{if} - \Gamma_{ig} h_f^* - \Gamma_w h_f' + Q_{gf} + \text{DISS}_f.$$

[I] [J] [K] [L]

)

В рівняннях (6.173) виділені члени, пов'язані з міжфазним тепломасообміном. Позначення відповідають таким процесам: I – теплообмін стінка-теплоносій, J – міжфазний теплообмін, K – прихований міжфазний теплообмін в ядрі потоку, L – прихований міжфазний теплообмін у пристінній області.

Члени, позначені літерою J (Q_{ig}, Q_{if}), характеризують процес міжфазного теплообміну, який відбувається в результаті обміну енергією в ядрі потоку внаслідок різниці температур фаз та обміну енергією у пристінній області при кипінні або конденсації в результаті теплообміну стінка – теплоносій. Вони пов'язані з K і L членами, що описують міжфазний масообмін у ядрі потоку внаслідок різниці температур фаз (Γ_{ig}) та масообмін у пристінній області (Γ_w) внаслідок теплообміну стінка – теплоносій, відповідно. Всі чотири позначені члени пов'язані з передачею енергії від стінки до двофазного теплоносія.

Співвідношення, що виражають зв'язок між членами рівнянь енергії I, J, K і L, ґрунтуються на таких базових припущеннях.

1. Питомі ентальпії h_g^* і h_f^* є параметрами фаз у ядрі потоку, а отже пов'язані з процесом міжфазного масообміну у ядрі. Їх визначення базується на припущенні, що маса, яка зазнала фазового переходу, перебуває в стані

насичення. Отже, $h_g^* = h_g^s$ і $h_f^* = h_f$ у випадку пароутворення і $h_g^* = h_g$, $h_f^* = h_f^s$ у випадку конденсації. Такі ж умови накладаються на питомі ентальпії h'_g, h'_f , пов'язані з масообміном в області поблизу стінки.

2. Сума членів J, K і L у рівняннях (6.173) дорівнює нулеві, що виражає баланс енергії при фазових переходах у припущенні, що маса і енергія не накопичуються у Σ -фазі.
3. Припущення 2 справедливе за умов, що сумарні міжфазні енергообміни у ядрі та у пристінній області незалежно дорівнюють нулеві.

Нижче описано як ці припущення реалізовано при побудові моделі міжфазного тепломасообміну коду RELAP 5.

6.7.2 Міжфазний тепломасообмін у пристінній області.

Члени I та L відповідають теплообміну стінка – двофазний теплоносій. В кожному рівнянні член I виражає повний тепловий потік від стінки до відповідної фази. Сума позначених через I членів двох рівнянь (6.173) $Q = Q_{wf} + Q_{wg}$ є повним тепловим потоком, що передається від стінки до двофазного теплоносія. Позначимо через Q_{if}^w, Q_{ig}^w частки теплових потоків Q_{wf} та Q_{wg} , відповідно, які безпосередньо витрачаються на фазові переходи у пристінній області і, таким чином, пов'язують між собою члени I та L. Зв'язок між інтенсивностями тепло- та масообміну у пристінній області дається рівняннями, які було розглянуто вище у розд. 4:

$$\Gamma_w = -\frac{Q_{if}^w}{h_g' - h_f'} (\text{кипіння}), \quad (6.174)$$

$$\Gamma_w = -\frac{Q_{ig}^w}{h_g' - h_f'} (\text{конденсація}).$$

В кожному випадку з процесом міжфазного теплообміну в області поблизу стінки пов'язується лише один з членів рівнянь енергії (6.173): Q_{wf} , або Q_{wg} . Під час бульбашкового кипіння весь потік тепла передається до рідкої фази, отже, $Q_{wg} = 0$. Тепловий потік Q_{wf} поділяється на дві частини: $Q_{wf} = Q_{conv} + Q_{boil}$, де Q_{conv} - частина теплового потоку від стінки, яка переноситься рідиною в процесі руху (конвективний потік тепла), $Q_{boil} = -Q_{if}^w$ – та частина теплової енергії, що передається від стінки, яка забезпечує фазовий перехід у пристінній області з інтенсивністю Γ_w . Оскільки код RELAP 5 використовує лише одну температуру для рідкої фази в контрольному об'ємі і не обчислює температурних градієнтів у примежовому шарі, для обчислення Γ_w необхідна спеціальна модель. Особливо це важливо при кипінні недогрітої рідини, коли температура рідини у ядрі менша температури насичення, в той час, як у пристінній області температура рідини суттєво вища і вона закипає при попаданні на стінку, що призводить до ланцюгового утворення пари. Щоб описати цей ефект треба встановити умови існування ланцюгового кипіння, а також – запропонувати метод обчислення частки загального потоку тепла до рідини, що забезпечує закипання рідини на стінці. Умови існування ланцюгового кипіння в коді RELAP 5 отримані на основі метода Саха-Зубера. Частка теплового потоку, що забезпечує фазовий перехід, розраховується за допомогою методу Лахея.

Для існування стійкого кипіння на стінці під час течії недогрітої рідини необхідно, щоб питома середньомасова ентальпія рідини

була достатньо близькою до ентальпії насичення, оскільки у випадку суттєво недогрітої рідини бульбашки, що утворюються поблизу стінки, відразу ж будуть конденсуватися. Мінімальна ентальпія h_{cr} , при якій можливе ланцюгове кипіння, називається критичною. У моделі Саха-Зубера вона обчислюється за числом Стентона при домінуванні конвективного теплообміну у загальній теплопередачі і за числом Нуссельта при домінуванні теплопроводності:

$$h_{cr} = \begin{cases} h_{f,sat} - \frac{St' C_{pf}}{0.0065}, Pe > 70000, \\ h_{f,sat} - \frac{Nu' C_{pf}}{455}, Pe \leq 70000. \end{cases} \quad (6.175)$$

де $St' = \frac{Nu'}{Pe}$, $Nu' = \frac{q_f'' D}{\lambda_f}$, $Pe = \frac{GDC_{pf}}{\lambda_f}$, G – загальний потік

маси, q_f'' – потік тепла від стінки до рідини. Нагадаємо, що число Пекле характеризує відношення інтенсивностей процесів конвективного теплообміну і теплопроводності.

Умова існування ланцюгового кипіння має вигляд:

$$\min(h_f, h_{f,sat}) > h_{cr}. \quad (6.176)$$

Якщо ця умова виконується, застосовується метод Лахея обчислення частки теплового потоку від стінки до рідини, що забезпечує фазовий перехід.

Вираз для інтенсивності масообміну у пристінній області має вигляд:

$$\Gamma_w = \frac{q_f'' A_w}{V \left[\max(h_g^s - h_f, 10^4 \frac{Дж}{кг}) \right]} Mul, \quad (6.177)$$

де A_w - площа поверхні стінки; V - об'єм ноди (див. розд.7),

$$Mul = \frac{\min(h_f, h_f^s) - h_{cr}}{(h_f^s - h_{cr})(1 + \varepsilon)}, \quad h_{cr} - \text{критична питома ентальпія,}$$

розрахована за моделлю Саха-Зубера,

$$\varepsilon = \frac{\rho_f (h_f^s - \min(h_f, h_f^s))}{\rho_g h_{fg}}. \quad \text{В знаменнику (6.177) штучно}$$

введене мінімальне значення для різниці ентальпій, що зроблено для коректного опису присутності газів, що не конденсуються. При обчисленні перевіряється умова кипіння: за крок по часу закипіти може не більше 90% рідини, що знаходиться в об'ємі, тобто:

$$\Gamma_w = \min(\Gamma_w, \frac{0.9\alpha_f \rho_f}{\Delta t}), \quad (6.178)$$

Вираз для інтенсивності масообміну в області поблизу стінки при конденсації має вигляд, аналогічний (6.177):

$$\Gamma_w = \frac{q_g'' A_w}{V \left[\max(h_g - h_f^s, 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}) \right]} \quad (6.179)$$

В формулі (6.179) враховано, що при конденсації весь тепловий потік іде від газоподібної фази до стінки. Під час обчислень перевіряється умова конденсації, аналогічна умові кипіння (6.178): за крок по часу сконденсуватися може не більше 90% газу, що знаходиться в об'ємі.

6.7.3 Міжфазний теплообмін у ядрі потоку.

Умова балансу потоків тепла та маси, що передаються через міжфазну поверхню у ядрі потоку, дозволяє знайти вираз для інтенсивності фазових переходів у ядрі Γ_{ig} (див. підрозд. 4.3.4).

6.7.4 Повний міжфазний масообмін.

Використовуючи співвідношення (4.25)-(4.26), (4.34) отримані при побудові моделі пароутворення коду RELAP 5, рівняння енергії для рідкої фази можна звести до вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f U_f) + \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f \rho_f U_f v_f A) + P \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f v_f A) \right] = \\ & = P \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \frac{P_s}{P} H_{ig}(T^s - T_g) + \frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} H_{if}(T^s - T_f) + \\ & + \frac{P - P_s}{P} H_{gf}(T_g - T_f) - \left[\frac{1 + \varepsilon}{2} h_g' + \frac{1 - \varepsilon}{2} h_f' \right] \Gamma_w + Q_{wf} + \text{DISS}_f. \end{aligned} \quad (6.180)$$

До аналогічного вигляду зводиться і рівняння енергії для газоподібної фази. Рівняння (6.180) отримане на основі припущень, введених в підрозд. 6.7.1. Згідно з припущенням 2, запишемо умову балансу енергії при фазових переходах (умову збереження енергії для Σ -фази):

$$Q_{ig} + Q_{if} + \Gamma_{ig}(h_g^* - h_f^*) + \Gamma_w(h_g' - h_f') = 0. \quad (6.181)$$

Ліва частина рівняння (6.181) являє собою повну суму потоків енергії, що переносяться через міжфазну поверхню в процесі фазових переходів. Вираз (6.181) можна отримати з суми рівнянь (6.173), якщо зібрати всі члени, пов'язані з міжфазними обмінами масою та теплом.

Припущення 3 додатково вимагає рівності нулю сумарного перенесення енергії через міжфазну поверхню незалежно для ядра потоку і області поблизу стінки. Ці умови мають вигляд:

$$\frac{P_s}{P} H_{ig}(T^s - T_g) + H_{if}(T^s - T_f) + \Gamma_{ig}(h_g^* - h_f^*) = 0, \quad (6.182)$$

для ядра потоку, та:

$$Q_{ig}^w + Q_{if}^w + \Gamma_w(h_g' - h_f') = 0, \quad (6.183)$$

для області поблизу стінки.

З рівняння (6.183), враховуючи, що фазові переходи в області поблизу стінки можуть протікати тільки в одному напрямку, тобто на кожній ділянці стінки відбувається або процес кипіння або процес конденсації, отримаємо співвідношення (6.174).

Для інтенсивності масообміну у ядрі потоку з (6.178) отримаємо:

$$\Gamma_{ig} = - \frac{H_{ig}(T^s - T_g) + H_{if}(T^s - T_f)}{h_g^* - h_f^*}, \quad (6.184)$$

у випадку відсутності газів, що не конденсуються, та

$$\Gamma_{ig} = - \frac{\frac{P_s}{P} H_{ig}(T^s(P_s) - T_g) + H_{if}(T^s(P_s) - T_f)}{h_g^* - h_f^*}, \quad (6.185)$$

у випадку, коли гази, що не конденсуються, присутні.

Модель передачі енергії в процесах тепломасообміну, прийнята в коді RELAP5, проілюстровано на схемах (рис.6.15). Загальний потік тепла від стінки до теплоносія Q є сумою теплових потоків до рідкої Q_{wf} та до газоподібної Q_{wg} фази. Член Γ_{ig} виражає інтенсивність масообміну внаслідок процесу міжфазного обміну енергією у ядрі потоку, отже він не враховує масообміну в області поблизу стінки, який відбувається внаслідок прямої передачі енергії від стінки до Σ - фази (наприклад, закипання рідини на стінці). В той же час, члени Q_{ig} і Q_{if} враховують обмін енергією, пов'язаний з обома формами масообміну:

$$Q_{ig} = Q_{ig}^B + Q_{ig}^W = \frac{P_s}{P} H_{ig}(T^s - T_g) + Q_{ig}^W, \quad (6.186)$$

$$Q_{if} = Q_{if}^B + Q_{if}^W = H_{if}(T^s - T_f) + Q_{if}^W.$$

Сума членів Q_{ig} і Q_{if} виражає ланцюговий обмін енергією між фазами.

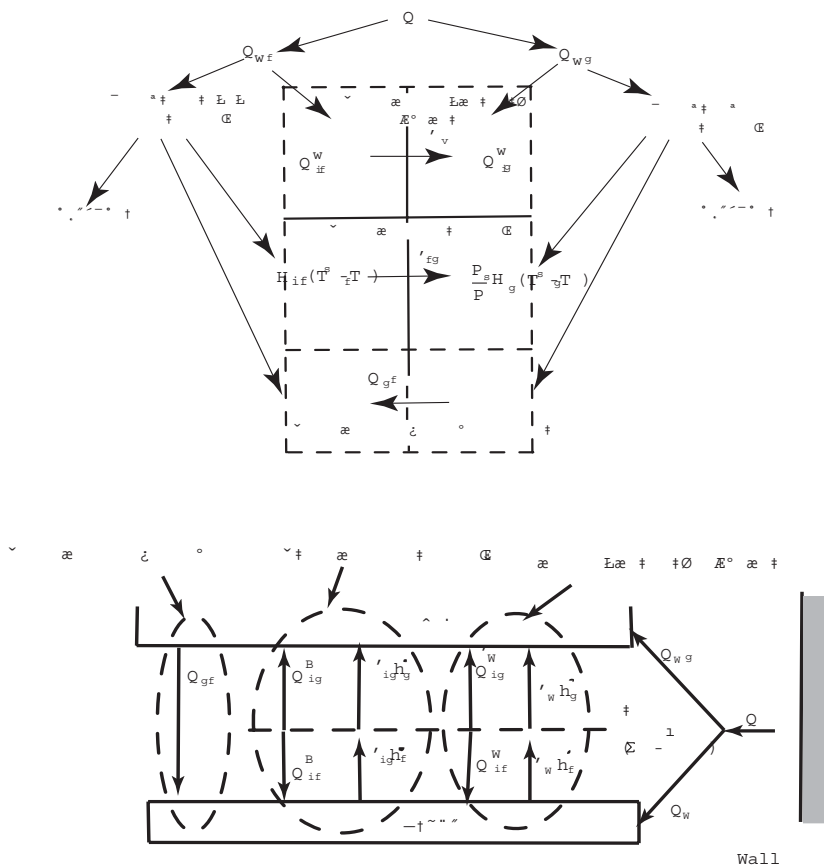


Рис.6.15. Схема розподілу теплового потоку від стінки до теплоносія

У відповідності до схем рис.6.15, загальний тепловий потік, що надходить від стінки до теплоносія розподіляється на потоки Q_{wf} і Q_{wg} , що поступають, відповідно, до рідкої і газоподібної фази. Повні потоки тепла, що надходять до окремих фаз, в свою чергу поділяються на потоки, які забезпечують процеси фазового переходу

в області поблизу стінки Q_{if}^w, Q_{ig}^w , відповідно, і потоки, які надходять до ядра потоку. Останні теплові потоки розділяються на три складові: теплові потоки, що забезпечують міжфазний масообмін в ядрі Q_{if}^B, Q_{ig}^B , теплові потоки, що ідуть на так званий *прямий нагрів* газів, що не конденсуються (Q_{gf}) і теплові потоки, що витрачаються на зміну внутрішніх енергій фаз в потоці теплоносія (конвективні теплові потоки). Під процесом прямої теплопередачі слід розуміти обмін енергією між газом, що не конденсується, та рідиною, який проходить без участі Σ -фази.

Розберемо відмінності, що вносяться у модель тепломасообміну для випадку кількох теплоструктур, що контактують з теплоносієм в межах одного контрольного об'єму. Інтенсивність масообміну у пристінній області Γ_w в такому випадку розбивається на частину, пов'язану з кипінням (Γ_w) та конденсацією (Γ_c). При цьому Γ_w – інтенсивність масообміну внаслідок дії всіх теплоструктур, які забезпечують кипіння, Γ_c – інтенсивність масообміну внаслідок дії всіх теплоструктур, які забезпечують конденсацію. Отже, інтенсивність загального масообміну визначається формулою:

$$\Gamma_g = \Gamma_{ig} + \Gamma_w + \Gamma_c. \quad (6.187)$$

Використовуючи (6.187) перепишемо рівняння енергії для фаз у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g U_g) + \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U_g v_g A) \right] = & -P \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} - \frac{P}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g v_g A) + \\ & + Q_{ig}^B + \Gamma_{ig} h_g^* + Q_{wg} - Q_{cond} + \Gamma_w h'_{wg} + \Gamma_c h'_{cg} - Q_{gf} + DISS_g, \end{aligned} \quad (6.188)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f U_f) + \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f \rho_f U_f v_f A) \right] = & -P \frac{\partial \alpha_f}{\partial t} - \frac{P}{A} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f v_f A) + \\ & + Q_{if}^B - \Gamma_{ig} h_f^* + Q_{wf} - Q_{flash} - \Gamma_w h'_{wf} - \Gamma_c h'_{cf} + Q_{gf} + DISS_f. \end{aligned}$$

В рівняннях (6.188) Q_{flash} відповідає $-Q_{\text{if}}^{\text{w}}$ для кипіння в пристінній області (закипання) і Q_{cond} відповідає $-Q_{\text{ig}}^{\text{w}}$ для конденсації.

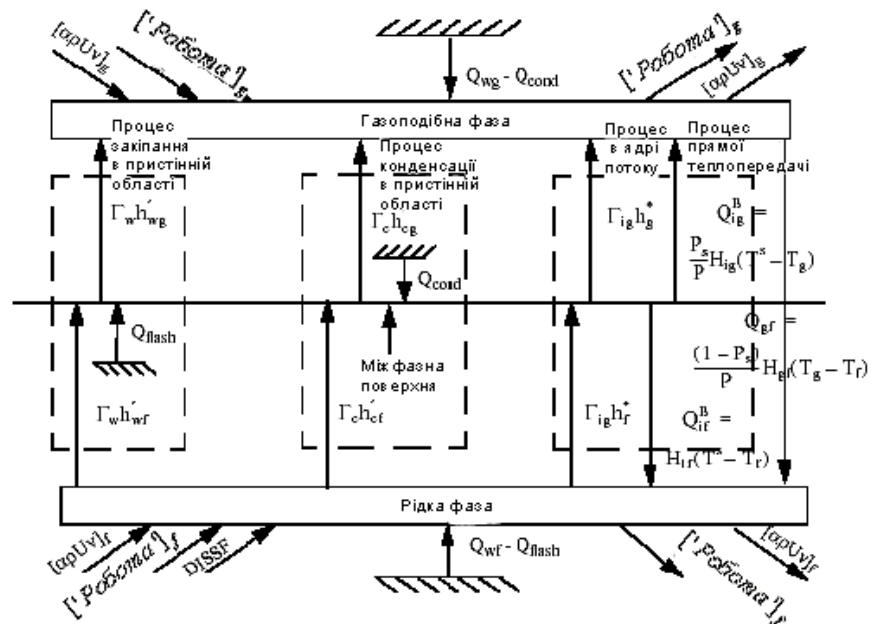


Рис. 6.16. Деталізована схема розподілу енергетичних потоків, прийнята в моделі теплогідравліки коду RELAP 5.

Місце окремих членів рівнянь енергії у загальному процесі обміну енергією для випадку кількох теплоструктур, що взаємодіють з теплоносієм в межах однієї ноди, показане на схемі рис.6.16.

Рідка та газоподібна фази зображені у вигляді прямокутників, щоб підкреслити накопичення енергії у фазах, що виражається

похідними по часу. Горизонтальна лінія, що відповідає міжфазній поверхні, навпаки, підкреслює, що в Σ -фазі накопичення маси та енергії не відбувається. Стрілки $\alpha\rho Uv$ та “робота” ілюструють конвективний перенос енергії та роботу сил тиску. Потоки тепла, що забезпечують закипання або конденсацію в області поблизу стінки, виділяються окремо і не включаються до загального теплового потоку від стінки до фази. Це пов'язано з тим, що ці теплові потоки поступають напряду до Σ -фази, як показано на схемі, і забезпечують відповідний процес фазового переходу. Стрілки, пов'язані з масообміном, йдуть від рідкої фази до газоподібної, оскільки Γ -ми виражають інтенсивності переходу маси від рідкої фази до газоподібної. При цьому відмітимо, що даний процес відбувається через Σ -фазу (горизонтальна лінія), при переході через яку змінюється питома ентальпія.

Питомі теплові потоки до кожної фази визначаються співвідношеннями:

$$Q_{wf} = \frac{1}{V} \sum_i q_{fi} A_{hi}, \quad Q_{wg} = \frac{1}{V} \sum_i q_{gi} A_{hi}, \quad (6.189)$$

де q_{fi} і q_{gi} - теплові потоки через одиницю поверхні, що віддає тепло, для i -ої теплоструктури, моделі для обчислення q_{fi} і q_{gi} розглянуті у підрозд. 6.6. A_{hi} - площа поверхні, що віддає тепло для i -ої теплоструктури. Підсумовування відбувається по всіх теплоструктурах, приєднаних до даного гідродинамічного об'єму.

Тепловий потік, що йде до фази, у випадку виконання умов кипіння або конденсації, розділяється в пакеті кореляцій на дві частини - тепловий потік, що забезпечує зміну питомої внутрішньої енергії фази та тепловий потік, що йде до Σ -фази і викликає тепломасообмін при фазовому переході (Q_{flash}, Q_{cond}). При закипанні рідини частина теплового потоку до рідини від кожної теплової структури поступає до Σ -фази та призводить до фазового переходу, що супроводжується передачею маси та енергії від рідини

до газу. Для кожної теплоструктури ця частина обчислюється за допомогою множника m_{fi} , який визначається пакетом кореляцій для теплової взаємодії між стінкою і потоком (див.(6.177)):

$$\Gamma_{wi} = m_{fi} q_{fi}, \quad (6.190)$$

де Γ_{wi} інтенсивність масообміну при закипанні, внаслідок теплового потоку від i -ої теплоструктури.

При конденсації, аналогічно, частина теплового потоку до газу від кожної теплоструктури йде до Σ -фази та призводить до фазового переходу, що супроводжується передачею маси та енергії газу до рідини. Ця частина визначається за допомогою множника m_{gi} :

$$\Gamma_{ci} = m_{gi} q_{gi}, \quad (6.191)$$

Відмітимо, що у випадку кипіння теплові потоки до Σ -фази мають додатні, а у випадку конденсації – від’ємні значення.

Загальна інтенсивність масообміну у пристінній області визначається співвідношеннями:

$$\Gamma_w = \sum_i \Gamma_{wi}, \quad \Gamma_c = \sum_i \Gamma_{ci}. \quad (6.192)$$

На схемі рис.6.16 тепловий потік Q_{flash} представлено як частину загального теплового потоку від стінки до рідини, що йде безпосередньо до Σ -фази та викликає передачу маси та енергії від рідини до газу. Аналогічно, Q_{cond} – та частина загального потоку тепла до газоподібної фази, яка йде прямо до Σ -фази і викликає передачу маси та енергії від газу до рідини. Слід пам’ятати:

$$\Gamma_w \geq 0, \quad \Gamma_c \leq 0. \quad (6.193)$$

Виходячи з принципу ненакопичення маси та енергії у Σ -фазі,

$$Q_{flash} = \Gamma_w (h'_{wg} - h'_{wf}), \quad Q_{cond} = \Gamma_c (h'_{cg} - h'_{cf}). \quad (6.194)$$

Як показано на схемі рис.6.16, потік тепла, що йде до Σ -фази, віднімається від загального теплового потоку, що йде від стінки до фази, отже тепловий потік від стінки до рідини буде дорівнювати

$Q_{wf} - Q_{flash}$. Енергія, що залишає рідину при фазових переходах, представляється членами $\Gamma_w h'_{wf}, \Gamma_c h'_{cf}$. Аналогічно, член $Q_{wf} - Q_{cond}$ визначає тепловий потік, що передається від стінки до газу, а $\Gamma_w h'_{wg}, \Gamma_c h'_{cg}$ представляють собою енергію, що потрапляє до газу у процесі фазових переходів.

Для завершення опису моделі міжфазного тепломасообміну необхідно розглянути співвідношення, призначені для моделювання міжфазного тепломасообміну у ядрі потоку.

6.7.5 Міжфазний тепломасообмін у ядрі потоку

Міжфазний тепломасообмін в ядрі потоку відбувається через міжфазну поверхню (Σ – фазу) і виникає внаслідок різниць температур фаз і міжфазної поверхні (нерівноважного стану потоку). Температура міжфазної поверхні припускається рівною температурі насичення, що відповідає місцевому значенню тиску. Кожна фаза може перебувати в недогрітому або перегрітому стані відносно температури насичення, тому теплова енергія може передаватися як від фази до міжфазної поверхні, так і в зворотньому напрямку. В моделі коду RELAP 5 припускається, що вся теплова енергія, що передається з боку кожної фази до Σ – фази, витрачається на утворення пари і навпаки – вся енергія, що передається від міжфазної поверхні до фаз утворюється внаслідок конденсації пари. Таким чином, у випадках перегрітої рідини або перегрітого газу вважається, що відбувається утворення пари, а у випадках недогрітої рідини або недогрітого газу – конденсація пари. Кореляції, що побудовані для опису процесів міжфазного теплообміну у ядрі потоку, визначають об'ємні коефіцієнти міжфазного теплообміну N_{if} та N_{ig} . Інтенсивність міжфазного масообміну у ядрі потоку Γ_{ig} , як впливає з (6.184)-(6.185), обчислюється також на підставі коефіцієнтів N_{if} та N_{ig} .

Кореляції, що застосовуються для обчислення цих коефіцієнтів, залежать від режиму течії і типу нерівноважності. Як впливає зі сказаного вище, розрізняють чотири типи нерівноважності потоку, які відповідають відхиленню якоїсь однієї з фаз від стану насичення в напрямку перегріву або недогріву. При цьому вважається, що інша фаза перебуває в стані насичення. Типами нерівноважності є перегріта рідина (Superheated liquid, SHL), недогріта рідина (Subcooled liquid, SCL), перегрітий газ (Superheated gas, SHG) і недогрітий газ (Subcooled gas, SCG). Коефіцієнти міжфазного теплообміну, як правило, вважаються пропорційними питомій площі міжфазної поверхні a_{gf} з коефіцієнтами пропорційності, залежними від числа Нуссельта Nu :

$$H_{ik} = K_k (Nu) \cdot a_{gf}, \quad k = g, f, \quad (6.195)$$

де K_k – коефіцієнт пропорційності для k -ої фази.

6.7.5.1 Бульбашковий режим.

Коефіцієнти міжфазного теплообміну для бульбашкового режиму течії задаються співвідношеннями:

$$H_{ig} = K_g a_{gf}, \quad H_{if} = K_f a_{gf}. \quad (6.196)$$

Коефіцієнти K_g і K_f визначаються кореляціями, що відрізняються для окремих типів нерівноважності. Ми не будемо обговорювати ці співвідношення, зважаючи на дуже складний їх характер. Повний опис вказаних кореляційних залежностей можна знайти в [11]. Визначення питомої площі міжфазної поверхні a_{gf} розглянуто у підрозд. 6.3.2. (див. (6.55)–(6.57)).

Необхідне для обчислення a_{gf} число Вебера є емпіричною константою, для якої приймаються різні значення в залежності від типу нерівноважності.

6.7.5.2 Снарядний режим течії

При побудові кореляцій для коефіцієнтів міжфазного теплообміну у ядрі потоку для снарядного режиму припускається, що вся рідина зосереджена у рідкій плівці поблизу стінки та у пробках між газоподібними снарядами (снаряди інколи називають бульбашками Тейлора). Міжфазна теплова взаємодія представляється сумою взаємодії на поверхні снарядів та взаємодії на поверхні звичайних малих бульбашок, зважених у рідких пробках. Таким чином, коефіцієнти міжфазного теплообміну задаються співвідношеннями:

$$H_{if} = H_{if,Tb} + H_{if,bub}, H_{ig} = H_{ig,Tb} + H_{ig,bub}. \quad (6.197)$$

Індекс “Tb” позначає бульбашки Тейлора, а індекс “bub” – звичайні бульбашки. Звідси випливає, що повний потік тепла до фази k через міжфазну поверхню в ядрі потоку дається виразом:

$$Q_{ik}^B = H_{ik,Tb} \Delta T + H_{ik,bub} \Delta T, \quad k = g, f, \quad (6.198)$$

де ΔT – різниця між температурою насичення та температурою фази k. Вирази для коефіцієнтів міжфазного теплообміну між рідкою плівкою і газоподібними снарядами мають вигляд:

$$H_{if,Tb} = K_{f,Tb} \alpha_{Tb} a_{gf,Tb}, \quad H_{ig,Tb} = K_{g,Tb} \alpha_{Tb} a_{gf,Tb}, \quad (6.199)$$

де $a_{gf,Tb} = 2.0 \left(\frac{4.5}{D} \right)$ – площа поверхні снарядів в одиниці

об’єму, $\alpha_{Tb} = \frac{\alpha_g - \alpha_{gs}}{1 - \alpha_{gs}}$ – об’ємний вміст снарядів, α_{gs} –

об’ємний вміст пари (газу) у рідкій плівці. Вираз, що використовується для обчислення площі міжфазної поверхні для снарядів базується на наступних міркуваннях. Обчислюючи відношення площі повної поверхні циліндра до його об’єму, отримуємо:

$$\frac{A_{\text{cyl}}}{V_{\text{cyl}}} = \frac{\pi D_{\text{cyl}} L_{\text{cyl}} + 2 \frac{\pi}{4} D_{\text{cyl}}^2}{\frac{\pi}{4} D_{\text{cyl}}^2 L_{\text{cyl}}}, \quad (6.200)$$

При зростанні довжини циліндра внесок площі основ до повної поверхні зменшується і ним можна знехтувати, спрямовуючи довжину циліндра до нескінченності, тобто: $\lim_{L_{\text{cyl}} \rightarrow \infty} \frac{A_{\text{cyl}}}{V_{\text{cyl}}} = \frac{4}{D_{\text{cyl}}}$.

Припускаючи, що бульбашки Тейлора мають форму циліндрів і $D_{\text{Tb}} = 0.88D$ (отримано з експерименту), маємо:

$$\frac{4}{D_{\text{cyl}}} = \frac{4}{0.88D} = \frac{4.55}{D} \approx \frac{4.5}{D}. \quad (6.201)$$

Коефіцієнт 2.0 вводиться з метою урахування нерівності поверхні бульбашок Тейлора внаслідок виникнення хвиль.

Коефіцієнти теплообміну для звичайних бульбашок обчислюються аналогічно до бульбашкового режиму.

6.7.5.3 Кільцевий режим.

Кільцевий режим двофазного потоку характерний тим, що вся рідина зосереджена у плівці поблизу стінки, а газ утворює ядро потоку. Отже, міжфазна теплова взаємодія відбувається тільки на поверхні рідкої плівки. За таких умов площа міжфазної поверхні в одиниці об'єму суміші визначається виразом:

$$a_{\text{gf}} = 4C_{\text{ann}} \sqrt{\alpha_g} / D. \quad (6.202)$$

Коефіцієнт C_{ann} вводиться з метою врахування негладкості рідкої плівки. Ідеальному випадку гладкої плівки відповідає значення $C_{\text{ann}} = 1$. Дійсно, у цьому випадку:

$$a_{gf,ann} = \frac{\pi D' L}{\frac{\pi}{4} D^2 L} = \frac{4 D'}{D^2},$$

де D' - внутрішній діаметр кільцевої плівки. Відношення $\frac{D'}{D}$ природньо виразити через об'ємний вміст пари (газу):

$$\frac{V_{\text{ядро}}}{V_{\text{заг}}} = \frac{D'^2}{D^2} = \frac{V_{\text{газ}} / V_{\text{заг}}}{V_{\text{газ}} / V_{\text{ядро}}} = \frac{\alpha_g}{\alpha_{gd}},$$

де α_{gd} - вміст пари у ядрі, для кільцевого режиму рівний одиниці.

Звідси одержуємо співвідношення (6.202).

Тепловий потік до фази k у ядрі потоку визначається виразом:

$$Q_{ik}^B = H_{ik,ann} \Delta T, \quad k = g, f, \quad (6.203)$$

де $H_{ik,ann}$ - коефіцієнт міжфазного теплообміну, що визначає тепловий потік до фази k на поверхні рідкої плівки, ΔT - різниця між температурою насичення та температурою фази k .

6.7.5.4 Дисперсно-кільцевий режим.

Для даного режиму рідка фаза не тільки утворює плівку поблизу стінки, але й присутня у вигляді дрібних крапель, зважених у газоподібному ядрі потоку. Відповідно, міжфазна теплова взаємодія представляється сумою взаємодії на поверхні плівки та взаємодії на поверхні крапель. Таким чином, коефіцієнти міжфазного теплообміну подаються у вигляді:

$$H_{if} = H_{if,ann} + H_{if,drp}, \quad H_{ig} = H_{ig,ann} + H_{ig,drp}, \quad (6.204)$$

де індекс “ann” відноситься до рідкої плівки, індекс “drp” - до поверхні крапель. Для повного теплового потоку до фази k у ядрі потоку справедливо:

$$Q_{ik}^B = H_{ik,ann} \Delta T + H_{ik,drp} \Delta T, \quad k = g, f, \quad (6.205)$$

де ΔT - різниця між температурою насичення та температурою фази k . Коефіцієнти міжфазного теплообміну вважаються пропорційними площі міжфазної поверхні в одиниці об'єму:

$$\begin{aligned} H_{if,ann} &= K_{f,ann} a_{gf,ann}, \quad H_{ig,ann} = K_{g,ann} a_{gf,ann}, \\ H_{if,drp} &= K_{f,drp} a_{gf,drp}, \quad H_{ig,drp} = K_{g,drp} a_{gf,drp}. \end{aligned} \quad (6.206)$$

Для обчислення площ міжфазних поверхонь до розгляду вводять відношення частки перерізу труби, зайнятої рідкими краплями, до частки, зайнятої всією рідиною:

$$E^* = A_d / A_f, \quad (6.207)$$

де A_d - частка загального перерізу труби, зайнята краплями, A_f - частка загального перерізу труби, зайнята рідиною.

Знаючи величину E^* можна знайти об'ємний вміст пари (газу) у парокропельному ядрі:

$$\alpha_g^* = \frac{A_g}{A_g + A_d} = \left[1 + E^* \frac{(1 - \alpha_g)}{\alpha_g} \right]^{-1}, \quad (6.208)$$

Тоді, використовуючи співвідношення (6.56), яке справедливе для всіх типів дисперсних течій (див. підрозд.6.3.2), можна отримати такий вираз для питомої площі міжфазної поверхні у ядрі потоку:

$$a_{gf,drp} = \frac{3.6 \alpha_{fd}}{d_d} (1 - F(E^*) \alpha_f), \quad (6.209)$$

де $F(E^*)$ - коефіцієнт кореляції, що залежить від E^* , повний вигляд якого приведений в [11]. Середній діаметр краплі d_d обчислюється аналогічно середньому діаметру бульбашки, тобто через критичне число Вебера.

Визначення питомої площі рідкої плівки $a_{gf,ann}$ проводиться аналогічно кільцевому режиму. Отже, для $a_{gf,ann}$ справедливо:

$$a_{gf,ann} = \frac{4}{D} \sqrt{1 - \alpha_{ff}}, \text{ де } \alpha_{ff} - \text{об'ємний вміст рідкої плівки.}$$

Модифікуючи цю формулу за допомогою коефіцієнтів $F(E^*)$ і C_{ann} , отримаємо:

$$a_{gf,ann} = (4C_{ann}/D) \sqrt{\alpha_g + F(E^*)(1 - \alpha_g)}. \quad (6.210)$$

Для коефіцієнтів $K_{f,ann}$, $K_{g,ann}$, $K_{f,dnp}$, $K_{g,dnp}$, в залежності від типу нерівноважності використовуються різні кореляції, детально розглянуті в [11].

6.7.5.5 *Обернений дисперсно-кільцевий режим.*

Міжфазна теплова взаємодія для оберненого дисперсно-кільцевого режиму складається з взаємодії на поверхні газової плівки поблизу стінки та взаємодії на поверхні бульбашок, розчинених у рідкому ядрі потоку. Отже, коефіцієнти міжфазного теплообміну подаються у вигляді:

$$H_{if} = H_{if,bub} + H_{if,ann}, \quad H_{ig} = H_{ig,bub} + H_{ig,ann}. \quad (6.211)$$

Коефіцієнти теплообміну вважаються пропорційними площі міжфазної поверхні і для них справедливі вирази, аналогічні (6.206) (відмінності лише в кореляціях для коефіцієнтів пропорційності). Площа поверхні бульбашок в одиниці об'єму суміші $a_{gf,bub}$ обчислюється аналогічно бульбашковому режиму, а площа поверхні парової плівки в одиниці об'єму суміші $a_{gf,ann}$ – аналогічно дисперсно-кільцевому, але із своїми значеннями коефіцієнтів кореляції. Вирази для цих величин приведені в [11].

6.7.5.6 *Обернений снарядний режим.*

Даний режим характеризується наявністю насичених бульбашками рідких снарядів, що пливуть у ядрі потоку та оточені газом, який містить краплі рідини. Таким чином, міжфазна теплова взаємодія складається з взаємодії між газовою плівкою поблизу стінки і рідкими снарядами та взаємодії на поверхні крапель, зважених у потоці газу. Коефіцієнти міжфазного теплообміну подаються у вигляді:

$$H_{if} = H_{if,ann} + H_{if,drp}, H_{ig} = H_{ig,ann} + H_{ig,drp}. \quad (6.212)$$

Відповідно, повний потік тепла до фази k в ядрі потоку задається таким співвідношенням:

$$Q_{ik}^B = H_{ik,ann} \Delta T + H_{ik,drp} \Delta T, \quad k = g, f. \quad (6.213)$$

Припускаючи, що рідкі снаряди мають настільки велику довжину, що внеском тепломасообміну на їх кінцях можна знехтувати, для площі міжфазної поверхні в одиниці об'єму приймаються такі співвідношення:

$$a_{gf,ann} = \frac{4.5}{D} \alpha_B \times (2.5), \quad \alpha_B = \frac{\alpha_f - \alpha_{drp}}{1 - \alpha_{drp}}, \quad (6.214)$$

$$\alpha_{drp} = (1 - \alpha_{AM})F, \quad F = \exp \left[-\frac{(\alpha_{AM} - \alpha_g)}{(\alpha_{AM} - \alpha_{BS})} \right],$$

де α_B - об'ємний вміст рідких снарядів, α_{AM} - значення об'ємного вмісту пари (газу), що визначає перехід від дисперсно-кільцевого режиму до дисперсного, α_{BS} - значення об'ємного вмісту пари (газу), що визначає перехід від бульбашкового режиму до снарядного, α_{drp} - об'ємний вміст дрібних крапель у газоподібній плівці. Коефіцієнт 2.5 введений для урахування негладкості газоподібної плівки поблизу стінки.

Площа поверхні крапель в одиниці об'єму суміші $a_{gf,drp}$ визначається за відомими формулами, що застосовуються для зважених частинок і має вигляд:

$$a_{gf,drp} = \frac{3.6\alpha_{drp}}{d_d}(1 - \alpha_B), \quad (6.215)$$

де d_d - середній діаметр крапель, обчислюється через критичне число Вебера. Кореляції для коефіцієнтів пропорційності теплових потоків площам відповідних міжфазних поверхонь $K_{if,ann}$, $K_{if,drp}$, $K_{ig,ann}$, $K_{ig,drp}$ мають різний вигляд для різних типів нерівноважності та приведені в [11].

6.7.5.7 Дисперсний режим.

Розрахунок міжфазного теплообміну для дисперсного режиму проводиться так само як і для бульбашкового режиму потоку, оскільки для обох режимів характерна наявність малих зважених частинок дисперсної фази в потоці несучої фази. Таким чином, для коефіцієнтів міжфазного теплообміну у ядрі потоку буде справедливо:

$$H_{if} = K_f a_{gf}, H_{ig} = K_g a_{gf}. \quad (6.216)$$

Кореляції для коефіцієнтів пропорційності K_f і K_g мають різний вигляд для окремих типів нерівноважності і приведені в [11]. Для площі міжфазної поверхні в одиниці об'єму суміші використовується загальне для дисперсних режимів співвідношення (6.56), яке в даному випадку записується у вигляді:

$$a_{gf} = \frac{3.6\alpha_f}{d_d}. \quad (6.217)$$

Для обчислення середнього діаметра крапель d_d використовуються різні значення критичного числа Вебера, що залежать не тільки від типу нерівноважності, але й від характеру самого дисперсного режиму (докризвий або післякризовий режим).

6.7.5.8 Горизонтально розширована течія

Режим горизонтально розширеної течії характерний тим, що вся рідина зосереджена у нижній частині горизонтально розташованого каналу або труби. Міжфазна поверхня вважається плоскою. Площа міжфазної поверхні в одиниці об'єму обчислюється через центральний кут θ , що визначає площу кругового сегменту, зайнятого рідиною (див. підрозд. 4.3.7):

$$a_{gf} = \frac{4 \sin \theta}{\pi D} F, \quad (6.218)$$

де F - коефіцієнт пропорційності, що задається окремою кореляцією для кожного з типів нерівноважності. Для коефіцієнтів пропорційності теплових потоків площі міжфазної поверхні, в залежності від типу нерівноважності, використовуються різні кореляції, описані в [11].

6.7.5.9 Вертикально розширована течія.

В течії двофазного теплоносія присутнє вертикальне розшарування, якщо швидкість суміші є меншою за швидкість підйому бульбашок Тейлора:

$$\frac{v_m}{v_{Tb}} < 1, \quad (6.219)$$

$$\text{де } v_m = \frac{\alpha_g \rho_g |v_g| + \alpha_f \rho_f |v_f|}{\alpha_g \rho_g + \alpha_f \rho_f} \quad - \text{ швидкість суміші, а}$$

$$v_{Tb} = 0.35 \left[\frac{gD(\rho_f - \rho_g)}{\rho_f} \right]^{1/2} \quad - \text{ швидкість підйому бульбашок}$$

Тейлора.

У випадку нерівноважностей, пов'язаних з перегрітістю рідини (SHL) та недогрітістю газу (SCG), розрахунок коефіцієнтів міжфазного теплообміну виконується на основі виразів, справедливих для інших режимів потоку, що визначаються за допомогою карти режимів для вертикальних потоків в залежності

від α_g . Для нерівноважностей SCL (недогріта рідина) і SHG (перегрітий газ) вирази для коефіцієнтів міжфазного теплообміну мають вигляд:

$$H_{if} = Nu_f K_f a_{gf}, H_{ig} = Nu_g K_g a_{gf}. \quad (6.220)$$

В рівняннях (6.220) числа Нуссельта ($Nu = 0.27(Gr \cdot Pr)^{1/4}$) – емпіричні константи, що вводяться з метою врахування співвідношення між інтенсивностями міжфазного теплообміну за рахунок вільної конвекції та за рахунок теплопроводності.

Площа міжфазної поверхні в одиниці об'єму суміші визначається співвідношенням:

$$a_{gf} = \frac{A}{V} = \frac{A}{AL} = \frac{1}{L}, (AL = 1), \quad (6.221)$$

де V - одиничний об'єм суміші, A і L - відповідно, його довжина і площа перерізу.

У підсумку слід відзначити, що для всіх розглянутих випадків коефіцієнти міжфазного теплообміну прямопропорційні площі міжфазної поверхні в одиниці об'єму. Отже, їх визначення зводиться до побудови співвідношень для площі міжфазної поверхні і кореляцій для коефіцієнтів пропорційності, ураховуючи режим двофазного потоку і тип нерівноважності, для яких будується кореляція.

7 МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОГІДРАВЛІКИ

Система рівнянь, що описує процеси гідродинаміки та теплообміну в двофазному теплоносії, є нестационарною, нелінійною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП). Для чисельного розв'язання крайових задач, сформульованих для цієї системи, як правило використовується *метод скінченних різниць*. Нижче викладені основи цього методу.

7.1 Метод скінченних різниць

Основою методу скінченних різниць є *дискретизація* – заміна неперервної області розв'язання задачі сукупністю ізольованих точок (сіткою), при цьому розв'язок рівнянь шукається лише у вузлах сітки. Похідні апроксимуються скінченними різницями внаслідок чого розв'язання рівняння в частинних похідних зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Припустимо, що потрібно розв'язати деяку крайову задачу, сформульовану для ДРЧП, наприклад:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ u(x, 0) = \gamma(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(1, t) = \mu_2(t). \end{cases} \quad (7.1)$$

Перш за все на області $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ введемо сітку, тобто виконаємо перехід від неперервної області до дискретної (рис.7.1). Тепер замість неперервної функції $u(x, t)$, нас буде цікавити сіткова функція $u(i\Delta x, j\Delta t)$, визначена тільки на вузлах сітки. Положення вузлів сітки визначаються значеннями величин i, j , тому різниці рівняння записуються для довільного вузла (i, j) , причому для апроксимації похідних використовуються значення функції u у цьому та сусідніх вузлах сітки (рис.7.2).

Позначимо $u_i^j = u(x_0, t_0)$, де x_0, t_0 – вузол сітки, що відповідає індексам i, j . Тоді:

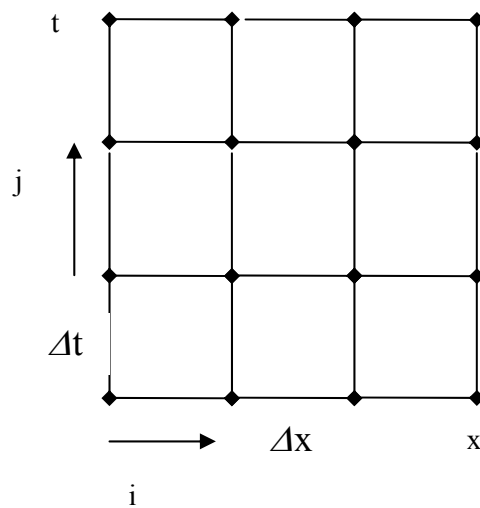


Рис. 7.1 Скінченно-різницева сітка

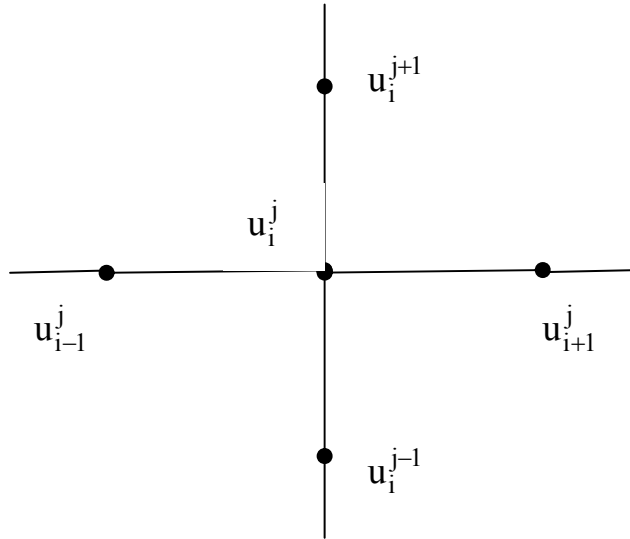


Рис. 7.2. Значення шуканої функції в вузлах сітки

$$u_{i+1}^j = u(x_0 + \Delta x, t_0), u_{i-1}^j = u(x_0 - \Delta x, t_0),$$

$$u_i^{j+1} = u(x_0, t_0 + \Delta t), u_i^{j-1} = u(x_0, t_0 - \Delta t).$$

Щоб краще зрозуміти ідею скінченно-різницевої апроксимації, згадаємо означення похідної:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, t_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)}{\Delta x}. \quad (7.2)$$

Якщо функція $u(x, t)$ неперервна, а Δx – досить мале, то значення різниці $[u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)] / \Delta x$ буде близьким

до значення похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$. Дійсно, за формулою Тейлора:

$$u(x_0 + \Delta x, t_0) = u(x_0, t_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, t_0} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0, t_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots, (7.3)$$

звідки

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, t_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)}{\Delta x} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0, t_0} \frac{\Delta x}{2!} - \dots, (7.4)$$

або

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} + O(\Delta x), (7.5)$$

де $O(\Delta x)$ – похибка апроксимації, величина, що має порядок Δx .

Похибкою апроксимації називається різниця значень частинної похідної та її скінченно-різницевого аналога.

Представлення похибки апроксимації у вигляді $O(\Delta x)$ нічого не говорить про величину похибки, а лише вказує на її порядок малості (такий саме як і у Δx). Якщо похибка іншої скінченно-різницевої апроксимації похідної є величиною $O[(\Delta x)^2]$, то у другому випадку похибка апроксимації буде меншою, ніж у першому для всіх достатньо малих Δx , починаючи з деякого значення. У загальному випадку це значення визначити досить складно.

Взагалі кажучи, можна побудувати необмежену кількість скінченно-різничевих апроксимацій $\frac{\partial u}{\partial x}$. Наприклад, побудуємо

апроксимацію $\frac{\partial u}{\partial x}$ лівою різницею. Запишемо:

$$u(x_0 - \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, t_0} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0, t_0} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_0, t_0} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots$$

,(7.6)

звідки

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (7.7)$$

Віднімаючи (7.6) від (7.3), одержимо апроксимацію похідної центральною різницею:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \quad (7.8)$$

Додаючи (7.3) та (7.6) знайдемо скінченно-різницеву апроксимацію похідної другого порядку:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2. \quad (7.9)$$

Безумовно, приведені апроксимації не вичерпують всієї множини можливих апроксимацій.

Аналіз похибки апроксимації ДРЧП скінченно-різницеvim аналогом проведемо на прикладі однорідного рівняння теплопроводності, тобто, припускаючи, що функція $f(x, t)$ в правій частині (7.1) дорівнює нулеві:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.10)$$

Використовуючи (7.5) та (7.9) для апроксимації похідних, перейдемо до скінченно-різницевого рівняння, яке буде мати вигляд:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (7.11)$$

В рівнянні (7.11) і далі індекс «j» відноситься до просторової координати, індекс «n» - до часу. Рівняння (7.11) є наближеним, точний зв'язок між неперервним та скінченно-різницеvim аналогами має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \\ & + \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{n,j} \frac{\Delta t}{2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{n,j} \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Вираз у квадратних дужках представляє *похибку апроксимації* неперервного рівняння (7.10) скінченно-різницеvim (7.11). Порядок похибки апроксимації визначається старшими членами розкладів відповідних похідних у ряди Тейлора. У даному випадку він дорівнює $O(\Delta t) + O[(\Delta x)^2]$.

Розв'язуючи чисельно скінченно-різницеvі рівняння, ми сподіваємось, що їх розв'язки близькі до розв'язків вихідних рівнянь, однак не можемо цього гарантувати. Для одержання гарантії необхідно дослідити *узгодженість та стійкість різницевої схеми*.

Різницева схема називається *узгодженою*, якщо похибка апроксимації прямує до нуля при подрібненні сітки.

Різницева схема називається *стійкою*, якщо на кожному кроці по часу будь-яка похибка скінченно-різницевого розв'язку не збільшується при переході на наступний крок. Це означає, що не відбувається накопичення таких похибок, як похибка заокруглення, похибка апроксимації тощо.

Різницева схема називається *збіжною*, якщо розв'язок скінченно-різницевого аналога прямує до розв'язку вихідного рівняння при

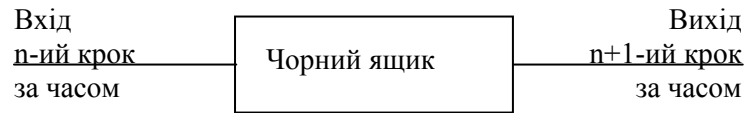


Рис. 7.3. До поняття стійкості

подрібленні сітки. Необхідною і достатньою умовою збіжності є виконання умов узгодженості і стійкості.

Умову узгодженості різницевої схеми перевірити не складно і, крім того, вона майже завжди виконується автоматично. Набагато складніше перевірити виконання умови стійкості. Цілком очевидно, що саме ця умова накладає обмеження на мінімальний крок різницевої схеми або, іншими словами, визначає ліміт подріблення сітки. Перш, ніж приділити увагу стійкості, розберемо поняття явної та неявної різницевої схем.

Різницева схема називається *явною*, якщо до кожного алгебраїчного рівняння входить лише одне невідоме, яке за допомогою цього рівняння може бути визначене через вже відомі величини. Розглядаючи схему (7.11), відмітимо, що в силу нестационарності рівняння, в усій області розв'язання, тобто в кожному вузлі сітки, повинні бути заданими значення $u(x_i, 0)$, які визначаються початковими умовами (7.1). Ці значення відповідають нульовому кроку за часом ($n=0$). За допомогою (7.11) можна явно визначити значення на наступному часовому кроці, тобто при $n=1$. Очевидно, що така можливість існує і для всіх наступних кроків. Таким чином, схема (7.11) є явною.

Різницева схема називається *неявною*, якщо визначення невідомих величин на новому кроці вимагає розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Побудуємо різницевий аналог рівняння (7.10), використовуючи для апроксимації $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ значення u на $n+1$ -ому кроці за часом.

Отримаємо:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}). \quad (7.12)$$

Тепер до кожного різницевого рівняння (7.12) увійдуть 3 невідомих значення u на $n+1$ кроці за часом. Для їх визначення на кожному кроці за часом необхідно розв'язувати систему лінійних рівнянь з тридіагональною матрицею (кожне рівняння відповідає кроку за просторовою координатою). Таким чином, схема (7.12) буде неявною.

У випадках, коли чисельно розв'язується система рівнянь, частина рівнянь системи може бути апроксимована явно, а частина – неявно. В такому випадку різницева схема розв'язання задачі називається *напівнеявною* або *частково неявною*.

Перейдемо до розгляду поняття стійкості. Кожна схема може бути зображена у вигляді, приведеному на рис. 7.3. На n -ому кроці значення функції u відомі, а на $n+1$ -ому їх потрібно визначити. Стійкість схеми визначається перетворенням вхідних даних, що проводяться чорним ящиком (різницеvim оператором). Вхідні дані не можуть бути задані абсолютно точно, існує похибка заокруглення, пов'язана з представленням чисел у ЕОМ. Якщо у чорному ящику ці похибки підсилюються, то схема буде нестійкою. Те ж саме стосується і похибки апроксимації.

Розглянемо задачу (7.1). Для початку розрахунку за будь-якою різницевою схемою, що апроксимує рівняння (7.1), необхідно задати початкові та граничні умови. Через похибку заокруглення зробити це абсолютно точно неможливо, отже насправді розв'язується наближена задача, в якій початкові та граничні умови задаються функціями $\bar{\gamma}(x)$, $\bar{\mu}_1(t)$, $\bar{\mu}_2(t)$ замість $\gamma(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$.

Нехай u – розв'язок задачі (7.1), одержаний за допомогою застосування різницевої схеми без урахування похибки заокруглення

(на ідеальній ЕОМ), а $\bar{u}$ – на реальній ЕОМ, тоді для стійкості схеми необхідно вимагати малість відхилення $\bar{u}$ від u при малому відхиленні $\bar{\gamma}(x)$ від $\gamma(x)$ (стійкість за початковими даними) та малість відхилення $\bar{u}$ від u при малих відхиленнях $\mu_1(t), \mu_2(t)$, відповідно, від $\bar{\mu}_1(t), \bar{\mu}_2(t)$ (стійкість за крайовими умовами). Стійкість за початковими даними та за крайовими умовами називається стійкістю за вхідними даними.

Основні проблеми, що виникають при чисельному розв'язанні нестационарних задач теплообміну у двофазних потоках пов'язані з можливою негіперболічністю системи диференціальних рівнянь. При описі нестационарних процесів зміна типу системи ДРЧП з гіперболічного на еліптичний, пов'язана із виникненням комплексних характеристичних напрямків, призводить до порушення одного з основних принципів фізики – принципу причинності [3], оскільки в такому випадку теперешній стан системи залежить від майбутнього. З точки зору математичної фізики втрата системою гіперболічності призводить до порушення рівномірно неперервної залежності розв'язку від початкових даних і, як наслідок, – до некоректності постановки задачі Коші. Дослідження типу системи рівнянь теплогідроліки, проведені в [3], стверджують, що у випадку застосування моделі рівних тисків і нерівних температур і швидкостей фаз, система не буде гіперболічною. Отже, застосування розглянутих у розд.4 рівнянь теплогідроліки вимагає подолання проблеми нестійкості різницевої схем у зв'язку з негіперболічністю вихідної системи рівнянь. Перехід від системи диференціальних рівнянь до системи рівнянь скінченно-різницевої, в залежності від способу апроксимації, може здійснювати як стабілізуючий так і дестабілізуючий ефект. Дослідження стійкості як правило проводиться методом Фур'є (методом гармонік). В результаті отримують *умови стійкості різницевої схеми*, що являють собою обмеження на вибір кроку за часом Δt та за просторовою змінною Δx . Для явних і напівявних схем, що застосовуються для розв'язання задач теплогідроліки, стійкість забезпечується *умовою Куранта*:

$$\nu = \left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1, (7.13)$$

де ν має назву *числа Куранта*. Величина c залежить від обраної схеми скінченно-різницевої апроксимації. Зрозуміло, що схема буде тим кращою, чим меншим буде значення c (оскільки тим більшим буде допустимий крок Δt). Якщо кроки Δt та Δx обрані не узгоджено з (7.13), то похибка заокруглення буде накопичуватися, а отже відхилення наближеного розв'язку від істинного буде збільшуватися при виконанні кожного кроку за часом.

7.2 Модифікована система рівнянь теплогідраліки

Перед виконанням скінченно-різницевої апроксимації, система рівнянь теплогідраліки, розглянута нами раніше, модифікується з метою забезпечення кращих властивостей скінченно-різницевої схеми. Крім того, проведені перетворення полегшують використання системи в однофазному випадку. Замість рівнянь (4.10), (4.13), що виражають закони збереження маси та кількості руху для кожної фази, використовуються рівняння, отримані внаслідок додавання та віднімання рівнянь для фаз. Назвемо їх *рівняннями суми та різниці*.

Використовуючи співвідношення $\frac{\partial \alpha_f}{\partial t} = -\frac{\partial \alpha_g}{\partial t}$, що є

наслідком постійності суми $\alpha_f + \alpha_g$, одержимо рівняння суми збереження маси:

$$\alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \alpha_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + (\rho_g - \rho_f) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g v_g A + \alpha_f \rho_f v_f A) = 0. (7.14)$$

Враховуючи вираз (4.34), що визначає загальну інтенсивність масообміну Γ_g , рівняння різниці збереження маси набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial t} - \alpha_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + (\rho_g + \rho_f) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g v_g A - \alpha_f \rho_f v_f A) = \\ = - \frac{2 \left[\frac{P_s}{P} H_{ig} (T^s - T_g) + H_{if} (T^s - T_f) \right]}{h_g^* - h_f^*} + 2 \Gamma_w. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Рівняння збереження маси газів, що не конденсуються, отримане на основі застосування гомогенної моделі для представлення процесів у газоподібній фазі, має вигляд:

$$\rho_g X_n \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \alpha_g X_n \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \alpha_g \rho_g \frac{\partial X_n}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g X_n v_g A) = 0. \quad (7.16)$$

Рівняння суми збереження кількості руху отримується безпосереднім додаванням рівнянь (4.13) з врахуванням (4.14), (4.15) і записується таким чином:

$$\begin{aligned} \alpha_g \rho_g \frac{\partial v_g}{\partial t} + \alpha_f \rho_f \frac{\partial v_f}{\partial t} + \frac{1}{2} \alpha_g \rho_g \frac{\partial v_g^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_f \rho_f \frac{\partial v_f^2}{\partial x} = \\ = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_m B_x - \alpha_g \rho_g F W G v_g - \alpha_f \rho_f F W F v_f - \Gamma_g (v_g - v_f) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Рівняння різниці збереження кількості руху одержується з рівнянь збереження кількості руху для фаз (4.13), розділених відповідно на $\alpha_g \rho_g A$ і $\alpha_f \rho_f A$, нехтуючи конвективними похідними у членах, що враховують ефект приєднаних мас та враховуючи додатковий член, що описує сили, які виникають через стратифікованість течії (підймальні сили). Це рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_g}{\partial t} - \frac{\partial v_f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_g^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_f^2}{\partial x} = - \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right) \frac{\partial P}{\partial x} - F W G v_g + F W F v_f + \\ + \frac{\Gamma_g [\rho_m v_I - (\alpha_f \rho_f v_g + \alpha_g \rho_g v_f)]}{\alpha_g \rho_g \alpha_f \rho_f} - \rho_m F I (v_g - v_f) - \\ - C \frac{\rho_m^2}{\rho_g \rho_f} \frac{\partial (v_g - v_f)}{\partial t} + \frac{\rho_m}{\rho_g \rho_f} (\rho_f - \rho_g) B_y \frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned} \quad (7.18)$$

де швидкість на міжфазній поверхні v_I задається виразом:

$$v_I = \lambda v_g + (1 - \lambda) v_f.$$

Коефіцієнт λ має простий фізичний зміст: він визначає яка частина загальної дисипованої кінетичної енергії переходить у внутрішню енергію рідини. В коді RELAP 5 значення λ обирається рівним нулю, якщо $\Gamma_g > 0$, і рівним одиниці, якщо $\Gamma_g < 0$.

Рівняння збереження енергії записуються окремо для кожної фази. Для газоподібної фази рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} & (\rho_g U_g + P) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \alpha_g U_g \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \alpha_g \rho_g \frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g U_g v_g A) + P \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g v_g A) \right] =, (7.19) \\ & = - \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right) \frac{P_s}{P} H_{ig} (T^s - T_g) - \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right) H_{if} (T^s - T_f) - \left(\frac{P - P_s}{P} \right) H_{gf} (T_g - T_f) + \\ & \quad + \left[\left(\frac{1 + \varepsilon}{2} \right) h_g' + \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} \right) h_f' \right] \Gamma_w + Q_{wg} + DISS_g \end{aligned}$$

Для рідкої фази:

$$\begin{aligned} & -(\rho_f U_f + P) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \alpha_f U_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \alpha_f \rho_f \frac{\partial U_f}{\partial t} + \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_f \rho_f U_f v_f A) + P \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_f v_f A) \right] = \\ & = \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right) \frac{P_s}{P} H_{ig} (T^s - T_g) + \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right) H_{if} (T^s - T_f) + \left(\frac{P - P_s}{P} \right) H_{gf} (T_g - T_f) - \\ & - \left[\left(\frac{1 + \varepsilon}{2} \right) h_g' + \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} \right) h_f' \right] \Gamma_w + Q_{wf} + DISS_f, (7.20) \end{aligned}$$

Розглянуті нами рівняння (7.14)-(7.20) називаються рівняннями у розширеній формі. Така назва пояснюється тим, що у зазначених рівняннях розписані локальні похідні по часу, які стоять у лівих частинах. Рівняння збереження (4.10), (4.13), (4.16) називаються рівняннями у стислій формі.

7.3 Напівявна скінченно-різницева схема коду RELAP 5

Методика чисельного розв'язання крайових задач теплогідравліки, прийнята у коді RELAP 5, орієнтована на отримання високої швидкості виконання розрахунків разом із забезпеченням задовільної точності результатів. Для підвищення швидкості розрахунку, по-перше, слід використовувати мінімальну

кількість неявних апроксимацій, а, по-друге, необхідно використовувати схеми з меншими значеннями величини C , що входить до умови Куранта (7.13).

Напівнеявна схема чисельного розв'язання задач теплогідравліки, що використовується у коді RELAP 5, отримується внаслідок апроксимації вихідної системи диференціальних рівнянь за допомогою скінченно-різницевої схеми, частково неявної за часом. При побудові цієї схеми використовується відомий *метод контрольного об'єму* [1]. Згідно з цим методом схема будується за допомогою застосування фізичних законів збереження, наслідком яких є дане рівняння у частинних похідних, до обраного контрольного об'єму області течії. Процедура виводу рівнянь схеми аналогічна процедурі отримання самих рівнянь у частинних похідних, за виключенням відсутності етапу переходу до границі при стягненні об'єму в точку.

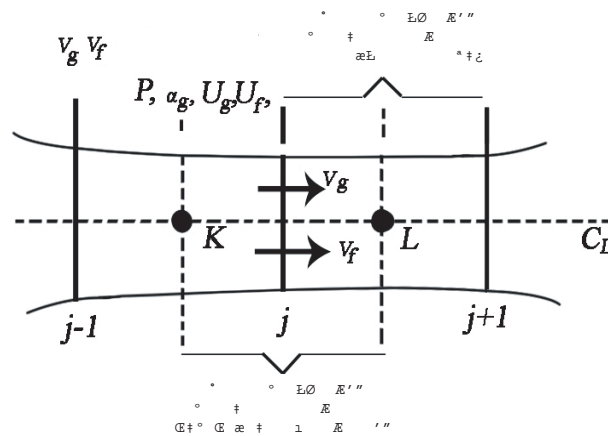


Рис.7.4. Розрахункова сітка коду RELAP 5.

Збереження маси та енергії у контрольному об'ємі виражається за допомогою прирівнювання накопичення енергії або маси в об'ємі до суми притоку маси (енергії) за рахунок дії внутрішніх джерел (фазових переходів) та потоків маси (енергії) всередину об'єму та за межі об'єму через поверхню, що його обмежує. Такий підхід дозволяє визначати середні за об'ємом значення маси (енергії), якщо відомі значення швидкостей фаз на границях об'єму. Швидкості на границях визначаються за допомогою використання так званих контрольних об'ємів для кількості руху або *з'єднань*, центри яких розміщуються на границях контрольних об'ємів для маси та енергії. При цьому скалярні характеристики потоку (тиск, енергії фаз, об'ємний вміст пари (газу) та масовий вміст газів, що не конденсуються) визначаються у центрах контрольних об'ємів для скалярних величин (маси та енергії), векторні характеристики (швидкості) визначаються у центрах контрольних об'ємів для векторних величин (*з'єднань*), як показано на рис. 7.4. В подальшому, дотримуючись термінології керівництва з коду RELAP 5, контрольні об'єми для скалярних і векторних величин будуть називатися скалярними та векторними *нодами*, відповідно.

Дослідження стійкості алгоритмів, побудованих за допомогою методу контрольного об'єму показали [3], що для стійкості явної схеми необхідне виконання умови Куранта у вигляді

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max(v_g + a_g, v_f + a_f)}, \text{ а отже реалізація явної схеми}$$

вимагає дуже малих кроків за часом. Повністю неявна схема є безумовно стійкою, проте вимагає великої кількості обчислень для реалізації. Тому в коді RELAP 5 було прийнято напівнеявну схему чисельного розв'язання, яка використовує неявні апроксимації лише для конвективних членів, з метою забезпечення стійкості при умові

$$\text{Куранта у вигляді } \Delta t < \frac{\Delta x}{\max(v_g, v_f)}, \text{ що не містить швидкостей}$$

звука і дає змогу виконувати значно більші кроки за часом.

Для побудови системи скінченно-різницевих рівнянь розглянемо дві сусідні скалярні ноди K і L з центрами в точках x_K , x_L . Межі об'єму K визначаються значеннями x_{j-1} та x_j , а об'єму L – значеннями x_j та x_{j+1} (див. рис.7.4).

Для отримання скінченно-різницевих рівнянь для скалярних параметрів потоку проінтегруємо рівняння збереження маси та енергії (7.14), (7.15), (7.16), (7.19), (7.20) за просторовою змінною x від x_j до x_{j+1} . В результаті цих операцій прийдемо до таких рівнянь.

Рівняння суми збереження маси:

$$V \left[\alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \alpha_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + (\rho_g - \rho_f) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} \right] + (\alpha_g \rho_g v_g A)_{x_j}^{x_{j+1}} + (\alpha_f \rho_f v_f A)_{x_j}^{x_{j+1}} = 0, \quad (7.21)$$

де V - об'єм скалярної ноди, $V = A(x_{j+1} - x_j)$.

Рівняння різниці збереження маси:

$$V \left[\alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial t} - \alpha_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + (\rho_f + \rho_g) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} \right] + (\alpha_g \rho_g v_g A)_{x_j}^{x_{j+1}} - (\alpha_f \rho_f v_f A)_{x_j}^{x_{j+1}} =$$

$$V \left\{ - \frac{2 \left[\frac{P_s}{P} H_{ig} (T^s - T_g) + H_{if} (T^s - T_f) \right]}{h_g^* - h_f^*} + 2 \Gamma_w \right\} \quad (7.22)$$

Рівняння збереження маси газів, що не конденсуються:

$$V \left[\rho_g X_n \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \alpha_g X_n \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \alpha_g \rho_g \frac{\partial X_n}{\partial t} \right] + (\alpha_g \rho_g X_n v_g A)_{x_j}^{x_{j+1}} = 0$$

(7.23)

Рівняння збереження енергії для газоподібної фази.

$$\begin{aligned}
& V \left[\left(\rho_g U_g + P \right) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \alpha_g U_g \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \alpha_g \rho_g \frac{\partial U_g}{\partial t} \right] + \\
& + \left(\alpha_g \rho_g U_g v_g A \right)_{x_j}^{x_{j+1}} + P \left(\alpha_g v_g A \right)_{x_j}^{x_{j+1}} = \\
& = V \left\{ - \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right) \frac{P_s}{P} H_{ig} (T^s - T_g) - \right. \\
& - \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right) H_{if} (T^s - T_f) - \left(\frac{P - P_s}{P} \right) H_{gf} (T_g - T_f) + \\
& + \left[\left(\frac{1 + \varepsilon}{2} \right) h'_g + \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} \right) h'_f \right] \Gamma_w + Q_{wg} + DISS_g \left. \right\}. \tag{7.24}
\end{aligned}$$

Рівняння збереження енергії для рідкої фази:

$$\begin{aligned}
& V \left[- \left(\rho_f U_f + P \right) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \alpha_f U_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \alpha_f \rho_f \frac{\partial U_f}{\partial t} \right] + \\
& + \left(\alpha_f \rho_f U_f v_f A \right)_{x_j}^{x_{j+1}} + P \left(\alpha_f v_f A \right)_{x_j}^{x_{j+1}} = \\
& = V \left\{ \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right) \frac{P_s}{P} H_{ig} (T^s - T_g) + \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right) H_{if} (T^s - T_f) + \right. \\
& + \left(\frac{P - P_s}{P} \right) H_{gf} (T_g - T_f) - \left[\left(\frac{1 + \varepsilon}{2} \right) h'_g + \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} \right) h'_f \right] \Gamma_w + Q_{wf} + DISS_f \left. \right\}. \tag{7.25}
\end{aligned}$$

)

Рівняння суми та різниці збереження кількості руху (7.17), (7.18) інтегруються в межах з'єднання, тобто від x_K до x_L . В результаті вказані рівняння, відповідно, приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
& \frac{V}{A} \left(\alpha_g \rho_g \frac{\partial v_g}{\partial t} + \alpha_f \rho_f \frac{\partial v_f}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \alpha_g \rho_g \left(v_g^2 \right)_{x_k}^{x_L} + \frac{1}{2} \alpha_f \rho_f \left(v_f^2 \right)_{x_k}^{x_L} = \\
& - \left(P \right)_{x_k}^{x_L} + \rho_m B_x (x_L - x_K) - \left(\alpha_g \rho_g FWGv_g + \alpha_f \rho_f FWFv_f \right) (x_L - x_K) - \\
& - \Gamma_g (v_g - v_f) (x_L - x_K) - \alpha_g \rho_g HLOSSGv_g - \alpha_f \rho_f HLOSSFv_f \\
& (7.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V}{A} \left(1 + \frac{C \rho_m^2}{\rho_g \rho_f} \right) \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} - \frac{\partial v_f}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(v_g^2 \right)_{x_k}^{x_L} - \frac{1}{2} \left(v_f^2 \right)_{x_k}^{x_L} = \\
& - \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right) \left(P \right)_{x_k}^{x_L} - \left(FWGv_g - FWFv_f \right) (x_L - x_K) + \\
& + \Gamma_g \frac{\rho_m v_I - (\alpha_f \rho_f v_g + \alpha_g \rho_g v_f)}{\alpha_f \rho_f \alpha_g \rho_g} (x_L - x_K) - HLOSSGv_g + HLOSSFv_f - \\
& - \rho_m FI (v_g - v_f) (x_L - x_K) + \frac{\rho_m}{\rho_g \rho_f} (\rho_f - \rho_g) B_y (y_L - y_K) \\
&)
\end{aligned} \tag{7.27}$$

В рівняннях (7.22)-(7.27) члени, взяті в дужки, позначені індексами, слід розуміти як різницю значень відповідної величини в точках, що відповідають верхньому та нижньому індексам, наприклад, $\left(P \right)_{x_K}^{x_L} = P|_{x_L} - P|_{x_K}$. Величини, що не мають індексів, є осередненими по відповідній ноді. Коефіцієнти *HLOSSG* та *HLOSSF* враховують втрати, що виникають у ділянках складної геометрії (різке звуження або розширення потоку, гиби, тощо).

Щоб одержати остаточні скінченно-різницеві рівняння, необхідно апроксимувати похідні по часу. При цьому в коді RELAP 5 прийнято до уваги міркування швидкості виконання розрахунків, що зумовило мінімум неявних апроксимацій і використання лінійних різницевих рівнянь відносно значень на новому кроці по часу [10]. Неявним чином апроксимовано лише члени, що визначають обмеження на крок за часом, пов'язані із розповсюдженням звукових хвиль, а

також члени, що описують фізичні процеси, характерний час протікання яких є невеликим. Отже, неявно апроксимовано швидкості у членах, що відповідають за конвективний перенос маси і енергії, а також члени, що відповідають за міжфазний обмін масою та енергією. В приведених нижче рівняннях символом “~” позначені проміжні значення величин на новому кроці за часом.

Скінченно-різницеve рівняння суми збереження маси:

$$\begin{aligned} & V_L \left[\alpha_{g,L}^n (\tilde{\rho}_{g,L}^{n+1} - \rho_{g,L}^n) + \alpha_{f,L}^n (\tilde{\rho}_{f,L}^{n+1} - \rho_{f,L}^n) + (\rho_{g,L}^n - \rho_{f,L}^n) (\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n) \right] + \\ & + (\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \dot{\rho}_{g,j+1}^n v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{g,j}^n \dot{\rho}_{g,j}^n v_{g,j}^{n+1} A_j) \Delta t + \\ & + (\dot{\alpha}_{f,j+1}^n \dot{\rho}_{f,j+1}^n v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{f,j}^n \dot{\rho}_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1} A_j) \Delta t = 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Скінченно-різницеve рівняння різниці збереження маси:

$$\begin{aligned} & V_L \left[\alpha_{g,L}^n (\tilde{\rho}_{g,L}^{n+1} - \rho_{g,L}^n) - \alpha_{f,L}^n (\tilde{\rho}_{f,L}^{n+1} - \rho_{f,L}^n) + (\rho_{g,L}^n + \rho_{f,L}^n) (\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n) \right] \\ & + (\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \dot{\rho}_{g,j+1}^n v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{g,j}^n \dot{\rho}_{g,j}^n v_{g,j}^{n+1} A_j) \Delta t - (\dot{\alpha}_{f,j+1}^n \dot{\rho}_{f,j+1}^n v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \\ & - \dot{\alpha}_{f,j}^n \dot{\rho}_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1} A_j) \Delta t = - \left(\frac{2}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n V_L \Delta t \left[\frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1}) + \right. \\ & \left. + H_{if,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1}) \right] + 2V_L \Delta t \Gamma_{w,L}^n. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Скінченно-різницеve рівняння збереження маси газів, що не конденсуються:

$$\begin{aligned} & V_L \left[\rho_{g,L}^n X_{n,L}^n (\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n) + \alpha_{g,L}^n X_{n,L}^n (\tilde{\rho}_{g,L}^{n+1} - \rho_{g,L}^n) + \right. \\ & + \alpha_{g,L}^n \rho_{g,L}^n (\tilde{X}_{n,L}^{n+1} - X_{n,L}^n) \left. \right] + (\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \dot{\rho}_{g,j+1}^n \dot{X}_{n,j+1}^n v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \\ & - \dot{\alpha}_{g,j}^n \dot{\rho}_{g,j}^n \dot{X}_{n,j}^n v_{g,j}^{n+1} A_j) \Delta t = 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Рівняння збереження енергії для газоподібної фази:

$$\begin{aligned}
& V_L [(\rho_{g,L}^n U_{g,L}^n + P_L^n)(\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n) + \alpha_{g,L}^n U_{g,L}^n (\tilde{\rho}_{g,L}^{n+1} - \rho_{g,L}^n) + \\
& \alpha_{g,L}^n \rho_{g,L}^n (\tilde{U}_{g,L}^{n+1} - U_{g,L}^n)] + [\dot{\alpha}_{g,j+1}^n (\dot{\rho}_{g,j+1}^n \dot{U}_{g,j+1}^n + P_L^n) v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \\
& - \dot{\alpha}_{g,j}^n (\dot{\rho}_{g,j}^n \dot{U}_{g,j}^n + P_L^n) v_{g,j}^{n+1} A_j] \Delta t = \\
& = \left\{ - \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n \frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1}) - \right. \\
& - \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n H_{if,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1}) - \\
& - \left(\frac{P_L^n - P_{s,L}^n}{P_L^n} \right) H_{gf,L}^n (\tilde{T}_{g,L}^{n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1}) + \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{2} \right) h_{g,L}^{'n} + \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \right) h_{f,L}^{'n} \right] \Gamma_{w,L}^n + \\
& + Q_{wg,L}^n + DISS_{g,L}^n \} V_L \Delta t.
\end{aligned}$$

(7.31)

Рівняння збереження енергії для рідкої фази:

$$\begin{aligned}
& V_L \left[-(\rho_{f,L}^n U_{f,L}^n + P_L^n) (\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n) + \right. \\
& + \alpha_{f,L}^n U_{f,L}^n (\tilde{\rho}_{f,L}^{n+1} - \rho_{f,L}^n) + \alpha_{f,L}^n \rho_{f,L}^n (\tilde{U}_{f,L}^{n+1} - U_{f,L}^n) \left. \right] + \\
& + \left[\dot{\alpha}_{f,j+1}^n (\dot{\rho}_{f,j+1}^n \dot{U}_{f,j+1}^n + P_L^n) v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{f,j}^n (\dot{\rho}_{f,j}^n \dot{U}_{f,j}^n + P_L^n) v_{f,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = \\
& = \left\{ \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n \frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1}) + \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n H_{if,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1}) + \right. \\
& + \left(\frac{P_L^n - P_{s,L}^n}{P_L^n} \right) H_{gf,L}^n (\tilde{T}_{g,L}^{n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1}) - \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{2} \right) h_{g,L}^{\prime,n} + \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \right) h_{f,L}^{\prime,n} \right] \Gamma_{w,L}^n + \\
& \left. Q_{wf,L}^n + DISS_{f,L}^n \right\} V_L \Delta t.
\end{aligned}
\tag{7.32}$$

У рівняннях (7.28)–(7.32) індекс “.” вгорі позначає так звані *донорні* значення скалярних величин, тобто значення, що відповідають центру ноди, розташованій вище за потоком. Отже, для довільної скалярної величини φ справедливо:

$$\dot{\varphi}_j = \frac{1}{2} (\varphi_K + \varphi_L) + \frac{1}{2} \frac{|v_j|}{v_j} (\varphi_K - \varphi_L),
\tag{7.33}$$

де v_j , швидкість фази, до якої відноситься параметр φ , що має місце у j -ому з’єднанні. Рівняння (7.33) справедливе при $v_j \neq 0$.

Для випадку $v_j = 0$ донорні значення визначаються значеннями тиску в центрах сусідніх нод:

$$\phi_j = \begin{cases} \varphi_K, & P_K > P_L \\ \varphi_L, & P_K < P_L \\ \frac{\rho_K \varphi_K + \rho_L \varphi_L}{\rho_K + \rho_L}, & P_K = P_L (\varphi \neq \rho) \\ \frac{\rho_K + \rho_L}{2}, & \varphi = \rho. \end{cases} \quad (7.34)$$

Система рівнянь (7.28)–(7.32) служить для визначення проміжних значень скалярних величин на новому кроці за часом $\tilde{X}_n^{n+1}, \tilde{\alpha}_g^{n+1}, \tilde{\rho}_g^{n+1}, \tilde{\rho}_f^{n+1}, \tilde{U}_f^{n+1}, \tilde{U}_g^{n+1}, \tilde{T}^{s,n+1}, \tilde{T}_f^{n+1}, \tilde{T}_g^{n+1}$. При цьому v_g^{n+1}, v_f^{n+1} визначаються з приведених нижче скінченно-різницевих рівнянь збереження кількості руху. Однак 9 невідомих величин не можуть бути визначені з системи з 5-ти рівнянь. Щоб замкнути систему використовуються рівняння стану, що пов'язують температури T_g, T_f, T^s і густини ρ_g, ρ_f із значеннями тиску P , внутрішніх енергій U_g, U_f та масового вмісту газів, що не конденсуються X_n . Розкладаючи рівняння стану у ряди Тейлора, матимемо:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\rho}_{g,L}^{n+1} &= \rho_{g,L}^n + \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right)_L^n (P_L^{n+1} - P_L^n) + \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial X_n} \right)_L^n (\tilde{X}_{n,L}^{n+1} - X_{n,L}^n) + \\ &+ \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial U_g} \right)_L^n (\tilde{U}_{g,L}^{n+1} - U_{g,L}^n); \\ \tilde{\rho}_{f,L}^{n+1} &= \rho_{f,L}^n + \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial P} \right)_L^n (P_L^{n+1} - P_L^n) + \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial U_f} \right)_L^n (\tilde{U}_{f,L}^{n+1} - U_{f,L}^n) \end{aligned} \right.$$

(7.35)

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{T}_L^{s,n+1} &= T_L^{s,n} + \left(\frac{\partial T^s}{\partial P} \right)_L^n (P_L^{n+1} - P_L^n) + \left(\frac{\partial T^s}{\partial X_n} \right)_L^n (\tilde{X}_{n,L}^{n+1} - X_{n,L}^n) + \\ &+ \left(\frac{\partial T^s}{\partial U_g} \right)_L^n (\tilde{U}_{g,L}^{n+1} - U_{g,L}^n); \\ \tilde{T}_{g,L}^{n+1} &= T_{g,L}^n + \left(\frac{\partial T_g}{\partial P} \right)_L^n (P_L^{n+1} - P_L^n) + \left(\frac{\partial T_g}{\partial X_n} \right)_L^n (\tilde{X}_{n,L}^{n+1} - X_{n,L}^n) + \\ &+ \left(\frac{\partial T_g}{\partial U_g} \right)_L^n (\tilde{U}_{g,L}^{n+1} - U_{g,L}^n); \\ \tilde{T}_{f,L}^{n+1} &= T_{f,L}^n + \left(\frac{\partial T_f}{\partial P} \right)_L^n (P_L^{n+1} - P_L^n) + \left(\frac{\partial T_f}{\partial U_f} \right)_L^n (\tilde{U}_{f,L}^{n+1} - U_{f,L}^n) \end{aligned} \right.$$

(7.36)

Зауважимо, що в RELAP 5 використовуються спеціальні методи для отримання похідних, що входять до рівнянь (7.35)-(7.36). Ці методи розглянуто в розд. 9.

При одержанні скінченно-різницевого схем для рівнянь суми та різниці збереження кількості руху в основу лягли аналогічні міркування. Значення скалярних параметрів у з'єднаннях обчислюються за допомогою лінійної інтерполяції значень, що відносяться до центрів сусідніх скалярних нод K та L (рис 7.4). Спеціальний метод застосовується для апроксимації членів, що виражають потік імпульса. Використання донорних членів для добутків $\rho\alpha$, призводить до появи членів штучної в'язкості у скінченно-різницевого рівняннях збереження кількості руху, що забезпечує стійкість побудованої схеми і коректність відповідних крайових задач. Вигляд цих рівнянь приведено нижче.

Рівняння суми:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_g \rho_g)_j^n (v_g^{n+1} - v_g^n)_j \Delta x_j + (\alpha_f \rho_f)_j^n (v_f^{n+1} - v_f^n)_j \Delta x_j + \\
 & + \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n [(v_g^2)_L^n - (v_g^2)_K^n] \Delta t + \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f)_j^n [(v_f^2)_L^n - (v_f^2)_K^n] \Delta t - \\
 & - \frac{1}{2} [(\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n VISG_j^n + (\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f)_j^n VISF_j^n] \Delta t = \\
 & = -(P_L - P_K)^{n+1} \Delta t + [(\rho_m)_j^n B_x - (\alpha_g \rho_g)_j^n FWG_j^n (v_g)_j^{n+1} - \\
 & - (\alpha_f \rho_f)_j^n FWF_j^n (v_f)_j^{n+1} - (\Gamma_g)_j^n (v_g - v_f)_j^{n+1}] \Delta x_j \Delta t - \\
 & - [(\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n HLOSSG_j^n v_{g,j}^{n+1} + (\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f)_j^n HLOSSF_j^n v_{f,j}^{n+1}] \Delta t.
 \end{aligned}
 \tag{7.37}$$

Рівняння різниці:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{C\rho_m^2}{\rho_g\rho_f}\right)_j^n [(v_g^{n+1} - v_g^n) - (v_f^{n+1} - v_f^n)]_j \Delta x_j + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g}{\alpha_g \rho_g}\right)_j^n [(v_g^2)_L^n - (v_g^2)_K^n] \Delta t - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g}{\alpha_g \rho_g}\right)_j^n VISG_j^n \Delta t - \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f}{\alpha_f \rho_f}\right)_j^n [(v_f^2)_L^n - (v_f^2)_K^n] \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f}{\alpha_f \rho_f}\right)_j^n VISF_j^n \Delta t = \\
& = - \left(\frac{\rho_f - \rho_g}{\rho_f \rho_g}\right)_j^n (P_L - P_K)^{n+1} \Delta t - \{FWG_j^n (v_g)^{n+1}_j - FWF_j^n (v_f)^{n+1}_j - \\
& - \left[\frac{\Gamma_g^n (\rho_m^n v_L^{n+1} - \alpha_f^n \rho_f^n v_g^{n+1} - \alpha_g^n \rho_g^n v_f^{n+1})}{(\alpha_g \rho_g \alpha_f \rho_f)^n} \right]_j + (\rho_m FI)_j^n (v_g^{n+1} - v_f^{n+1})_j \} \Delta x_j \Delta t - \\
& - \left[\left(\frac{\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g}{\alpha_g \rho_g}\right)_j^n HLOSSG_j^n v_{g,j}^{n+1} - \left(\frac{\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f}{\alpha_f \rho_f}\right)_j^n HLOSSF_j^n v_{f,j}^{n+1} \right] \Delta t + \\
& + \left(\frac{\rho_m}{\rho_g \rho_f}\right)_j^n (\rho_f - \rho_g)_j^n B_y (y_L^n - y_K^n) \Delta t.
\end{aligned}$$

(7.38)

При апроксимації конвективних членів використовувалися рівняння нерозривності в інтегральній формі $\rho_{m,j+1} A_{j+1} v_{m,j+1} = \rho_{m,j} A_j v_{m,j}$.

Члени штучної в'язкості, що з'явилися в результаті лінійної інтерполяції, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{VISG}_j^n &= \frac{1}{2} \left\{ \left| v_{g,L}^n \right| \left[\left(v_g^n \right)_{j+1} \frac{A_{j+1}}{A_j} - \left(v_g^n \right)_j \right] - \left| v_{g,K}^n \right| \left[\left(v_g^n \right)_j - \left(v_g^n \right)_{j-1} \frac{A_{j-1}}{A_j} \right] \right\} \\ \text{VISF}_j^n &= \frac{1}{2} \left\{ \left| v_{f,L}^n \right| \left[\left(v_f^n \right)_{j+1} \frac{A_{j+1}}{A_j} - \left(v_f^n \right)_j \right] - \left| v_{f,K}^n \right| \left[\left(v_f^n \right)_j - \left(v_f^n \right)_{j-1} \frac{A_{j-1}}{A_j} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Зауважимо, що оскільки введення явної апроксимації градієнтів швидкостей центральними різницями призводить до нестійкості схеми [3], введення штучної в'язкості необхідне для забезпечення стійкості при виконанні умови Куранта. В силу рівнянь нерозривності величина членів штучної в'язкості близька до нуля. Введення штучної в'язкості зменшує порядок похибки апроксимації конвективних членів, бо члени штучної в'язкості є головними членами похибки апроксимації конвективних членів їх скінченно-різницевиими аналогами. (наприклад, апроксимації члену

$$\frac{1}{2} \rho_g \alpha_g ((v_g^2)_L - (v_g^2)_K) \quad \text{рівняння} \quad (7.26) \quad \text{членом} \quad \frac{1}{2} (\dot{\rho}_g \dot{\alpha}_g)_j^n ((v_g^2)_L^n - (v_g^2)_K^n).$$

Значення скалярних параметрів у з'єднаннях, що входять до рівнянь (7.37) та (7.38), обчислюються за допомогою лінійної інтерполяції, або для них беруться донорні значення (вгору за потоком). Коефіцієнти втрат в ділянках різкої зміни поперечного перерізу каналу визначаються формулами:

$$\begin{aligned} HLOSSG_j^n &= \frac{1}{2} (K_g^n + K_{in}) |v_{g,j}^n|, \\ HLOSSF_j^n &= \frac{1}{2} (K_f^n + K_{in}) |v_{f,j}^n|. \end{aligned} \quad (7.40)$$

де K_g^n, K_f^n – коефіцієнти втрат, пов’язані з різкою зміною площі поперечного перерізу, що обчислюються кодом, K_{in} – коефіцієнт втрат, що визначається користувачем.

Важлива роль у стратегії застосування напівнеявної схеми розв’язання задач теплогидравліки відводиться рівнянням у стислій формі, оскільки саме з них отримуються остаточні значення скалярних величин на новому кроці за часом. Скінченно-різницева апроксимація рівнянь у стислій формі також будується за допомогою методу контрольного об’єму. Напівнеявна стратегія вимагає явного характеру апроксимації системи рівнянь у стислій формі. З цього випливає, що рівняння збереження повинні записуватися для кожної фази окремо.

Рівняння збереження маси газоподібної фази:

$$\begin{aligned} V_L \left[(\alpha_g \rho_g)_{L}^{n+1} - (\alpha_g \rho_g)_{L}^n \right] + (\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \dot{\rho}_{g,j+1}^n v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{g,j}^n \dot{\rho}_{g,j}^n v_{g,j}^{n+1} A_j) \Delta t = \\ = \tilde{\Gamma}_{g,L}^{n+1} V_L \Delta t, \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\tilde{\Gamma}_{g,L}^{n+1} = - \frac{\frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1}) + H_{if,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1})}{h_{g,L}^{*,n} - h_{f,L}^{*,n}} + \Gamma_{w,L}^n. \quad (7.42)$$

Рівняння збереження маси рідкої фази:

$$\begin{aligned} V_L \left[(\alpha_f \rho_f)_{L}^{n+1} - (\alpha_f \rho_f)_{L}^n \right] + (\dot{\alpha}_{f,j+1}^n \dot{\rho}_{f,j+1}^n v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{f,j}^n \dot{\rho}_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1} A_j) \Delta t = \\ = -\tilde{\Gamma}_{g,L}^{n+1} V_L \Delta t. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Рівняння збереження маси газів, що не конденсуються:

$$\begin{aligned} V_L \left[(\alpha_g \rho_g X_n)_{L}^{n+1} - (\alpha_g \rho_g X_n)_{L}^n \right] + \\ + (\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \dot{\rho}_{g,j+1}^n \dot{X}_{n,j+1}^n v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{g,j}^n \dot{\rho}_{g,j}^n \dot{X}_{n,j}^n v_{g,j}^{n+1} A_j) \Delta t = 0. \end{aligned}$$

(7.44)

Рівняння енергії для газоподібної фази:

$$\begin{aligned}
& V_L \left[\left(\alpha_g \rho_g U_g \right)_L^{n+1} - \left(\alpha_g \rho_g U_g \right)_L^n \right] + \\
& + \left[\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \left(\dot{\rho}_{g,j+1}^n \dot{U}_{g,j+1}^n + P_L^n \right) v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{g,j}^n \left(\dot{\rho}_{g,j}^n \dot{U}_{g,j}^n + P_L^n \right) v_{g,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = \\
& = -V_L P_L^n \left(\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n \right) + \left\{ - \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n \frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n \left(\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1} \right) - \right. \\
& - \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n H_{if,L}^n \left(\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1} \right) - \left(\frac{P_L^n - P_{s,L}^n}{P_L^n} \right) H_{gf,L}^n \left(\tilde{T}_{g,L}^{n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1} \right) + \\
& \left. + \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{2} \right) h_{g,L}'^n + \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \right) h_{f,L}'^n \right] \Gamma_{w,L}^n + Q_{wg,L}^n + DISS_{g,L}^n \right\} V_L \Delta t
\end{aligned}$$

(7.45)

Рівняння енергії для рідкої фази:

$$\begin{aligned}
& V_L \left[\left(\alpha_f \rho_f U_f \right)_L^{n+1} - \left(\alpha_f \rho_f U_f \right)_L^n \right] + \\
& + \left[\dot{\alpha}_{f,j+1}^n \left(\dot{\rho}_{f,j+1}^n \dot{U}_{f,j+1}^n + P_L^n \right) v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{f,j}^n \left(\dot{\rho}_{f,j}^n \dot{U}_{f,j}^n + P_L^n \right) v_{f,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = \\
& = V_L P_L^n \left(\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n \right) + \left\{ \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n \frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n \left(\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1} \right) + \right. \\
& + \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n H_{if,L}^n \left(\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1} \right) + \left(\frac{P_L^n - P_{s,L}^n}{P_L^n} \right) H_{gf,L}^n \left(\tilde{T}_{g,L}^{n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1} \right) - \\
& \left. - \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{2} \right) h_{g,L}'^n + \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \right) h_{f,L}'^n \right] \Gamma_{w,L}^n + Q_{wf,L}^n + DISS_{f,L}^n \right\} V_L \Delta t.
\end{aligned}$$

(7.46)

Схема чисельного розв'язання системи скінченно-різницевих рівнянь залежить від стану потоку у контрольному об'ємі на двох успішних кроках за часом. При цьому можливі 4 випадки:

1. Двофазний потік на n -ому (старому) кроці за часом та двофазний потік на $n+1$ -ому (новому) кроці за часом.
2. Однофазний потік на n -ому та однофазний потік на $n+1$ -ому кроках за часом.
3. Двофазний потік на n -ому та однофазний потік на $n+1$ -ому кроках за часом (зникнення фази).
4. Однофазний потік на n -ому та двофазний потік на $n+1$ -ому кроці (виникнення фази).

Розглянемо алгоритм чисельного розв'язання у першому випадку ("двофазний-двофазний"). Спочатку лінеаризовані рівняння стану (7.35)-(7.36) підставляються до рівнянь збереження маси та енергії у розширеній формі (7.28)-(7.32). Враховуючи, що швидкості визначаються з рівнянь збереження кількості руху, до підстановки рівняння (7.28)-(7.32) містили 9 невідомих, після підстановки – 5. Після виконання вказаної підстановки рівняння перенумеровуються так, що першим йде рівняння збереження маси газів, що не конденсуються, потім рівняння різниці збереження енергії, суми збереження енергії, і, нарешті, рівняння різниці та суми збереження маси. З цих рівнянь повинні бути визначені 5 невідомих, також впорядкованих:

$$(\tilde{X}_{n,L}^{n+1} - X_{n,L}^n), (\tilde{U}_{g,L}^{n+1} - U_{g,L}^n), (\tilde{U}_{f,L}^{n+1} - U_{f,L}^n), (\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n), (P_L^{n+1} - P_L^n)$$

Тільда використовується для того, щоб підкреслити, що виділені значення є проміжними і не представляють остаточних значень на новому кроці за часом. Дана система рівнянь записується у вигляді:

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} + \underline{g}^1 v_{g,j+1}^{n+1} + \underline{g}^2 v_{g,j}^{n+1} + \underline{f}^1 v_{f,j+1}^{n+1} + \underline{f}^2 v_{f,j}^{n+1}. \quad (7.47)$$

Матриця $\underline{A}$ має розмірність 5×5 і, як і 5-ти вимірні вектори $\underline{b}, \underline{g}^1, \underline{g}^2, \underline{f}^1, \underline{f}^2$ містить значення лише на старому кроці за часом

n . Детально вигляд компонентів матриці $\underline{A}$ та вказаних векторів приводиться у керівництві з коду RELAP 5 [10].

Обернена матриця $\underline{A}^{-1}$ знаходиться за допомогою LR(LU)-алгоритма. Використовуючи лише останній рядок $\underline{A}^{-1}$ можна, після множення на нього (7.47), одержати рівняння, що включає лише невідомі $(P_L^{n+1} - P_L^n), v_{g,j+1}^{n+1}, v_{g,j}^{n+1}, v_{f,j+1}^{n+1}, v_{f,j}^{n+1}$.

Рівняння збереження кількості руху (7.37),(7.38) можна розв'язати відносно $v_{g,j}^{n+1}$ та $v_{f,j}^{n+1}$ (ці швидкості виражаються через значення параметрів на старому кроці за часом та тиски на новому кроці). Підстановка одержаних виразів, що називаються *рівняннями швидкостей*, до результату множення останнього рядка $\underline{A}^{-1}$ на (7.47), дозволяє одержати рівняння, що включає лише тиск. Ці процедури виконуються для кожного об'єму і їх результатом є побудова системи з N рівнянь для N значень тиску всередині кожного з N контрольних об'ємів задачі. Одержані з цієї системи значення $P_L^{n+1} - P_L^n$ підставляються потім до рівнянь швидкостей, щоб отримати значення швидкостей на новому кроці за часом. Після цього значення швидкостей підставляються знову у (7.47) і, застосовуючи LR-алгоритм, знаходяться проміжні значення $\tilde{X}_{n,L}^{n+1}, \tilde{U}_{g,L}^{n+1}, \tilde{U}_{f,L}^{n+1}, \tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1}$.

Густина суміші $\rho_{m,L}^{n+1}$ одержується із стислої форми рівняння збереження маси для суміші (його отримують за рахунок сумування рівнянь збереження маси відповідних фаз).

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g v_g A + \alpha_f \rho_f v_f A) = 0.$$

(7.48)

Скінченно-різницева апроксимація (7.48) має вигляд:

$$\begin{aligned} V_L \left(\rho_{m,L}^{n+1} - \rho_L^n \right) + \left(\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \dot{\rho}_{g,j+1}^n v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{g,j}^n \dot{\rho}_{g,j}^n v_{g,j}^{n+1} A_j \right) \Delta t + \\ + \left(\dot{\alpha}_{f,j+1}^n \dot{\rho}_{f,j+1}^n v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{f,j}^n \dot{\rho}_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1} A_j \right) \Delta t = 0, \end{aligned} \quad (7.49)$$

звідки $\rho_{m,L}^{n+1}$ знаходиться явним чином.

Для отримання остаточних значень $X_{n,L}^{n+1}, U_{g,L}^{n+1}, U_{f,L}^{n+1}, \alpha_{g,L}^{n+1}$ на новому кроці за часом використовуються рівняння у стислій формі (7.41), (7.43)-(7.46). Переваги використання рівнянь у стислій формі під час зворотної підстановки пояснюються відсутністю похибки лінеаризації. Розглянемо алгоритм знаходження остаточних значень скалярних параметрів з рівнянь в стислій формі. Рівняння збереження маси (7.41), (7.43) дозволяють отримати значення $\left(\alpha_g \rho_g \right)_L^{n+1}$ і $\left(\alpha_f \rho_f \right)_L^{n+1}$. З рівняння збереження маси газів, що не конденсуються (7.44), після підстановки знайденого значення $\left(\alpha_g \rho_g \right)_L^{n+1}$ визначається $X_{n,L}^{n+1}$. Аналогічно, з рівнянь (7.45) і (7.46) визначаються значення внутрішніх енергій фаз $U_{g,L}^{n+1}$ і $U_{f,L}^{n+1}$.

Нарешті обчислюється значення $\alpha_{g,L}^{n+1}$. Для цього використовується

$$\text{рівняння } \alpha_{g,L}^{n+1} = 1 - \alpha_{f,L}^{n+1} = 1 - \frac{\left(\alpha_f \rho_f \right)_L^{n+1}}{\hat{\rho}_{f,L}^{n+1}}, \text{ де } \hat{\rho}_{f,L}^{n+1} - \text{густина рідкої}$$

фази, обчислена за допомогою лінеаризованого рівняння стану (7.35) по значеннях внутрішньої енергії і тиску на новому кроці за часом $U_{f,L}^{n+1}$ і P_L^{n+1} .

Рівняння у стислій формі використовуються у всіх випадках переходу від двофазного потоку до двофазного, за виключенням

ситуацій, коли проміжне значення об'ємного вмісту пари $\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} < 0.001$ і $\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} < \alpha_{g,L}^n$. У цьому випадку проміжні значення використовуються у якості остаточних.

Розглянемо другий випадок (“однофазний-однофазний”).

У цьому випадку обчислення тиску відбувається так само як і для випадку 1. Проте, для обчислення густин та енергій не використовуються рівняння у стислій формі. Як значення цих параметрів на новому кроці за часом приймаються проміжні значення, що одержуються після розв'язання системи у розширеній формі. Для відсутньої фази значення коефіцієнту міжфазного теплообміну береться відповідним $\alpha = 10^{-5}$ (а не $\alpha = 0$). Такий підхід приводить до того, що параметри відсутньої фази приймають значення, дуже близькі до значень насичення. Значення насичення встановлюються для параметрів відсутньої фази і при використанні рівнянь стану. У рівняннях істинний об'ємний вміст відсутньої фази покладається рівним 0. Для присутньої фази приймається нульове значення коефіцієнту міжфазного теплообміну. Тим самим моделюється перехід енергії від присутньої фази до відсутньої в ядрі потоку, як тільки температура присутньої фази перейде через температуру насичення.

Третій випадок (“двофазний – однофазний”, зникнення фази).

У цьому випадку схема обчислень аналогічна випадку 1: спочатку використовується система рівнянь у розширеній формі, потім система рівнянь у стислій формі (за виключенням випадку $\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} < 0.001$ та $\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} < \alpha_{g,L}^n$). Для фази, що зникає, в рівняннях стану значення енергії, температури та густини приймаються рівними значенням насичення. Іноді при зникненні фази в результаті розрахунків отримуються значення об'ємного вмісту пари менші нуля або більші одиниці. У цих випадках значення α_g встановлюються, відповідно, рівними 0 або 1. Однак у випадках, коли відмінності від нуля або одиниці перевищують встановлену допустиму похибку, обчислення для даного кроку за часом повторюються.

Четвертий випадок (“однофазний – двофазний”, виникнення фази).

Обчислення відбуваються так само, як і для випадку 2. При цьому може виникнути похибка, пов’язана з появою фази в об’ємі внаслідок конвекції з сусіднього об’єму, в якому температура відмінна від температури насичення. Похибка контролюється шляхом порівняння кількості фази, що виникла на даному кроці за часом з максимально припустимим значенням. Якщо похибка перевищує припустиму величину, крок за часом повторюється.

В RELAP5 контроль кроку за часу здійснюється по 4-х показниках. Вибір кроку по часу вважається невдалим якщо:

1. Не виконується умова Куранта стійкості чисельного розв’язку у вигляді:

$$\Delta t < \min_{1 \leq j \leq N} \left[\frac{\Delta x_j}{\max(|v_{g,j}|, |v_{f,j}|)} \right]. \quad (7.50)$$

2. При розрахунку значень вмісту пари отримано значення, менші 0 або більші 1, причому відмінності перевищують встановлені допустимі значення.
3. Відносна різниця густин двофазної суміші, визначених за рівнянням стану $\rho_{m,j}^*$ та за рівнянням збереження маси суміші (7.49), більше встановленої границі
4. Тиск, вміст пари, внутрішня енергія виходять за робочий діапазон таблиць для визначення параметрів стану.
5. Похибка виникнення фази перевищує припустиме значення.

У випадку невиконання якої-небудь з цих умов крок зменшується вдвічі, а у випадку, коли всі п’ять умов виконуються, крок за часом вважається успішним і величина наступного кроку робиться вдвічі більшою.

Таким чином, напівнеявна схема дає досить універсальні алгоритми, при невеликих об’ємах обчислень. Своєю назвою вона зобов’язана явним характером апроксимації рівнянь збереження

кількості руху (7.37),(7.38) (апроксимація конвективних членів) і тому іноді ще називається конвективно-явною.

7.4 Майже неявна скінченно-різницева схема.

Для задач, в яких можна очікувати, що параметри потоку слабо змінюються з часом, можна отримати адекватний чисельний розв'язок використовуючи дуже великі кроки за часом. Зняти обмеження на крок за часом, пов'язані із стійкістю чисельного розв'язку, можна використовуючи неявні апроксимації для всіх членів, тобто переходячи до повністю неявної схеми. Однак, використання такої схеми вимагає надзвичайно великих витрат часу під час розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для зменшення кількості обчислень застосовуються так звані методи часткових кроків.

Майже неявна стратегія чисельного розв'язання задач теплогідродинаміки складається з двох кроків. На першому кроці розв'язуються всі сім рівнянь збереження, застосовуючи для апроксимації членів, пов'язаних з міжфазними тепло- та масообміном, розповсюдженням збурень тиску та переносом кількості руху (конвекцією) неявну апроксимацію. Одержані скінченно-різницеві рівняння цілком аналогічні рівнянням у розширеній формі (7.28)–(7.32), (7.37), (7.38), що використовуються у напівнеявній схемі, при одній істотній відмінності. Конвективні члени у рівняннях (7.37), (7.38) *апроксимуються неявно* (в лінеаризованій формі) замість явної донорної апроксимації, що застосовується у напівнеявній схемі. Другий крок полягає у розв'язанні рівнянь збереження маси та енергії у стислій формі.

7.4.1 Перший крок майже неявної стратегії чисельного розв'язання.

Проілюструємо процедуру отримання неявної лінеаризованої скінченно-різницевої апроксимації конвективних членів у рівняннях збереження кількості руху на прикладі члена, що відповідає за конвекцію газоподібної фази у рівнянні суми для збереження кількості руху (7.26). Цей член має вигляд:

$$\frac{1}{2}\alpha_g \rho_g \left(v_g^2\right)_{x_K}^{x_L}. \quad (7.51)$$

Скінченно-різницева форма (7.51) має вигляд:

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n \left[\left(v_{g,L}^{n+1}\right)^2 - \left(v_{g,K}^{n+1}\right)^2 \right]. \quad (7.52)$$

У даному випадку немає потреби у введенні членів штучної в'язкості, бо не виникає проблем із стійкістю схеми. Вираз (7.52) можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n \left[\left(v_{g,L}^{n+1} - v_{g,L}^n\right)^2 + 2v_{g,L}^n \left(v_{g,L}^{n+1} - v_{g,L}^n\right) + \left(v_{g,L}^n\right)^2 - \left(v_{g,K}^{n+1} - v_{g,K}^n\right)^2 - \right. \\ & \left. - 2v_{g,K}^n \left(v_{g,K}^{n+1} - v_{g,K}^n\right) - \left(v_{g,K}^n\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Лінеаризувати (7.53) можна, якщо припустити, що квадрати зміни з часом швидкості у даному об'ємі L або K малі у порівнянні з іншими членами, тоді замість (7.53) одержимо:

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n \left[2v_{g,L}^n \left(v_{g,L}^{n+1} - v_{g,L}^n\right) + \left(v_{g,L}^n\right)^2 - 2v_{g,K}^n \left(v_{g,K}^{n+1} - v_{g,K}^n\right) - \left(v_{g,K}^n\right)^2 \right] \quad (7.54)$$

Використовуючи розглянутий підхід, конвективні члени в рівнянні суми збереження кількості руху (7.37) замінюються на:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n \left[2v_{g,L}^n \left(v_{g,L}^{n+1} - v_{g,L}^n\right) + \left(v_{g,L}^n\right)^2 - 2v_{g,K}^n \left(v_{g,K}^{n+1} - v_{g,K}^n\right) - \left(v_{g,K}^n\right)^2 \right] \Delta t + \\ & + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f)_j^n \left[2v_{f,L}^n \left(v_{f,L}^{n+1} - v_{f,L}^n\right) + \left(v_{f,L}^n\right)^2 - 2v_{f,K}^n \left(v_{f,K}^{n+1} - v_{f,K}^n\right) - \left(v_{f,K}^n\right)^2 \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Аналогічно, в рівнянні різниці збереження кількості руху (7.38) конвективні члени замінюються такими виразами:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g}{\alpha_g \rho_g} \right)_j^n \left[2v_{g,L}^n (v_{g,L}^{n+1} - v_{g,L}^n) + (v_{g,L}^n)^2 - 2v_{g,K}^n (v_{g,K}^{n+1} - v_{g,K}^n) - (v_{g,K}^n)^2 \right] \Delta t - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f}{\alpha_f \rho_f} \right)_j^n \left[2v_{f,L}^n (v_{f,L}^{n+1} - v_{f,L}^n) + (v_{f,L}^n)^2 - 2v_{f,K}^n (v_{f,K}^{n+1} - v_{f,K}^n) - (v_{f,K}^n)^2 \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Швидкості у центрах об'ємів визначаються через швидкості у з'єднаннях, що примикають до об'єму. Спосіб визначення розглянуто у підрозд. 7.5. Осереднені по скалярній ноді значення швидкостей фаз на новому кроці за часом даються виразами:

$$\begin{aligned} v_{f,L}^{n+1} &= \sum_{j=1}^{j_{in}} C_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1} + \sum_{j=1}^{j_{out}} C_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1}, \\ v_{g,L}^{n+1} &= \sum_{j=1}^{j_{in}} C_{g,j}^n v_{g,j}^{n+1} + \sum_{j=1}^{j_{out}} C_{g,j}^n v_{g,j}^{n+1}, \end{aligned} \quad (7.57)$$

де коефіцієнти $C_{f,j}^n, C_{g,j}^n$ містять всі параметри, обчислені на попередньому кроці за часом, j_{in}, j_{out} - кількості з'єднань, що примикають до даного об'єму, відповідно, вгору та вниз за потоком.

Розглянемо відмінності від алгоритма напівнеявної стратегії, що виникають внаслідок неявної апроксимації. У випадку напівнеявної схеми рівняння (7.28)-(7.32) розв'язуються окремо і для кожного об'єму дають рівняння вигляду:

$$P_L^{n+1} = A v_{g,j+1}^{n+1} + B v_{g,j}^{n+1} + C v_{f,j+1}^{n+1} + D v_{f,j}^{n+1} + E, \quad (7.58)$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E містять лише значення змінних на n -ому кроці за часом. У напівнеявній схемі окремо розв'язуються і рівняння збереження кількості руху, внаслідок чого отримуються лінійні співвідношення між значеннями швидкостей фаз та тиску на новому кроці за часом:

$$\begin{aligned} v_{g,j}^{n+1} &= A^1 (P_L^{n+1} - P_K^{n+1}) + C^1, \\ v_{f,j}^{n+1} &= D^1 (P_L^{n+1} - P_K^{n+1}) + D^1, \end{aligned} \quad (7.59)$$

де коефіцієнти A^1, B^1, C^1, D^1 знову містять значення параметрів на старому кроці за часом.

Використовуючи (7.59) можна виключити значення швидкостей на новому кроці з (7.58) і отримати рівняння для визначення значень тиску на новому кроці за часом. В результаті для задачі з N об'ємами прийдемо до системи з N рівнянь, що визначають N невідомих значень тиску у цих об'ємах. Система має тридіагональну матрицю.

У випадку майже неявної схеми внаслідок неявної апроксимації членів, що виражають потоки кількості руху фаз (7.55), (7.56), вже неможливо розв'язати окремо рівняння збереження кількості руху (7.37)–(7.38) і отримати (7.59) (зв'язок між швидкостями та тисками в явному вигляді). Нова апроксимація конвективних членів привносить до рівнянь значення швидкостей фаз у з'єднаннях вгору та вниз по потоку на новому кроці за часом

$(v_{k,j-1}^{n+1}, v_{k,j+1}^{n+1}, k = f, g)$. Рівняння (7.28)–(7.32) знову

застосовуються для одержання співвідношень (7.58), однак тепер (7.58) використовуються для виключення членів, що містять значення тиску на $n+1$ кроці з рівнянь збереження кількості руху (7.37), (7.38), в яких для конвективних членів прийнято апроксимацію (7.55), (7.56). Внаслідок цього отримуємо систему з двох рівнянь, що містять лише значення швидкостей у з'єднаннях на новому кроці за часом, тобто для задачі з N з'єднаннями приходимо до системи з $2N$ рівнянь відносно $2N$ невідомих швидкостей у

з'єднаннях на $n+1$ кроці за часом. Визначивши v_f^{n+1}, v_g^{n+1} , можемо знайти P^{n+1} з рівнянь (7.58). Далі, використовуючи (7.28)-(7.32) визначаються проміжні значення $\tilde{\alpha}_g^{n+1}, \tilde{U}_g^{n+1}, \tilde{U}_f^{n+1}, \tilde{X}_n^{n+1}$, що завершує перший крок майже неявної стратегії.

7.4.2 Другий крок майже неявної стратегії чисельного розв'язання.

Другий крок майже неявної стратегії застосовується з метою стабілізації конвективних членів у рівняннях маси та енергії. На другому кроці використовуються остаточні нові значення швидкостей у з'єднаннях та проміжні значення скалярних параметрів $\tilde{\alpha}_g^{n+1}, \tilde{U}_g^{n+1}, \tilde{U}_f^{n+1}, \tilde{X}_n^{n+1}$, одержані на 1-ому кроці, для знаходження остаточних значень скалярних параметрів. Рівняння збереження маси та енергії, що застосовуються на другому кроці, записуються у стислій формі і використовують стійку неявну апроксимацію членів, пов'язаних з конвективним переносом маси та енергії (на відміну від явної апроксимації на 1-му кроці). Вигляд рівнянь збереження приведено нижче.

Рівняння збереження маси газоподібної фази:

$$V_L \left[(\alpha_g \rho_g)_L^{n+1} - (\alpha_g \rho_g)_L^n \right] + \left[\left(\dot{\alpha} \rho \right)_{g,j+1}^{n+1} v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \left(\dot{\alpha} \rho \right)_{g,j}^{n+1} v_{g,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = \\ = \tilde{F}_{g,L}^{n+1} V_L \Delta t. \quad (7.60)$$

Рівняння збереження маси рідкої фази:

$$\begin{aligned}
& V_L \left[(\alpha_f \rho_f)_L^{n+1} - (\alpha_f \rho_f)_L^n \right] + \left[\left(\dot{\alpha} \rho \right)_{f,j+1}^{n+1} v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \left(\dot{\alpha} \rho \right)_{f,j}^{n+1} v_{f,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = \\
& = -\tilde{I}_{g,L}^{n+1} V_L \Delta t.
\end{aligned}
\tag{7.61}$$

В рівняннях (7.60) і (7.61) $\tilde{I}_g^{n+1}$ обчислюється за допомогою проміжних значень скалярних параметрів:

$$\tilde{I}_{g,L}^{n+1} = - \frac{\frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1}) + H_{if,L}^n (\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1})}{h_{g,L}^{*,n} - h_{f,L}^{*,n}} + \Gamma_{w,L}^n.
\tag{7.62}$$

При цьому проміжні значення температур $\tilde{T}^{n+1}$ обчислюються через $\tilde{U}_g^{n+1}, \tilde{U}_f^{n+1}, \tilde{X}_n^{n+1}, P^{n+1}$ за допомогою лінеаризованих рівнянь стану (7.36).

Рівняння збереження маси газів, що не конденсуються:

$$\begin{aligned}
& V_L \left[(\alpha_g \rho_g X_n)_L^{n+1} - (\alpha_g \rho_g X_n)_L^n \right] + \\
& + \left[\left(\alpha_g \dot{\rho}_g X_n \right)_{j+1}^{n+1} v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \left(\alpha_g \dot{\rho}_g X_n \right)_j^{n+1} v_{g,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = 0.
\end{aligned}
\tag{7.63}$$

Рівняння енергії для газоподібної фази:

$$\begin{aligned}
& V_L \left[\left(\alpha_g \rho_g U_g \right)_L^{n+1} - \left(\alpha_g \rho_g U_g \right)_L^n \right] + \left[\left(\alpha \dot{\rho} U \right)_{g,j+1}^{n+1} v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \left(\alpha \dot{\rho} U \right)_{g,j}^{n+1} v_{g,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = \\
& = -V_L P_L^n \left(\tilde{\alpha}_{g,L}^{n+1} - \alpha_{g,L}^n \right) - P_L^n \left(\dot{\alpha}_{g,j+1}^n v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{g,j}^n v_{g,j}^{n+1} A_j \right) \Delta t + \\
& + \left\{ - \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n \frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n \left(\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n H_{if,L}^n \left(\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1} \right) \right\} V_L \Delta t - \left\{ \left(\frac{P_L^n - P_{s,L}^n}{P_L^n} \right) H_{gf,L}^n \left(\tilde{T}_{g,L}^{n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1} \right) + \right. \\
& + \left. \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{2} \right) h_{g,L}'^n + \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \right) h_{f,L}'^n \right] \Gamma_{w,L}^n + Q_{wg,L}^n + DISS_{g,L}^n \right\} V_L \Delta t.
\end{aligned}
\tag{7.64}$$

Рівняння енергії для рідкої фази:

$$\begin{aligned}
& V_L \left[\left(\alpha_f \rho_f U_f \right)_L^{n+1} - \left(\alpha_f \rho_f U_f \right)_L^n \right] + \left[\left(\alpha \dot{\rho} U \right)_{f,j+1}^{n+1} v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \left(\alpha \dot{\rho} U \right)_{f,j}^{n+1} v_{f,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = \\
& = V_L P_L^n \left(\tilde{\alpha}_{f,L}^{n+1} - \alpha_{f,L}^n \right) - P_L^n \left(\dot{\alpha}_{f,j+1}^n v_{f,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \dot{\alpha}_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1} A_j \right) \Delta t + \\
& + \left\{ \left(\frac{h_f^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n \frac{P_{s,L}^n}{P_L^n} H_{ig,L}^n \left(\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{g,L}^{n+1} \right) + \left(\frac{h_g^*}{h_g^* - h_f^*} \right)_L^n H_{if,L}^n \left(\tilde{T}_L^{s,n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1} \right) \right\} V_L \Delta t + \\
& + \left\{ \left(\frac{P_L^n - P_{s,L}^n}{P_L^n} \right) H_{gf,L}^n \left(\tilde{T}_{g,L}^{n+1} - \tilde{T}_{f,L}^{n+1} \right) - \right. \\
& - \left. \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{2} \right) h_{g,L}'^n + \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \right) h_{f,L}'^n \right] \Gamma_{w,L}^n + Q_{wf,L}^n + DISS_{f,L}^n \right\} V_L \Delta t.
\end{aligned}
\tag{7.65}$$

Кожне з рівнянь (7.60)-(7.61), (7.63)-(7.65) містить тільки одну невідому змінну, бо проміжні значення скалярних параметрів і значення швидкостей фаз на новому кроці за часом відомі після

першого кроку майже неявної стратегії. Рівняння (7.60) містить невідому $(\alpha\rho)_g^{n+1}$; рівняння (7.61) – $(\alpha\rho)_f^{n+1}$; рівняння (7.63) – $(\alpha_g\rho_gX_n)^{n+1}$; рівняння (7.64) – $(\alpha\rho U)_g^{n+1}$; рівняння (7.65) – $(\alpha\rho U)_f^{n+1}$. Отже, кожне з рівнянь може розв'язуватись незалежно від інших (розглядаючи кожне з рівнянь над всією областю розв'язання, прийдемо до системи). Відмітимо, що рівняння для газоподібної фази (7.60), (7.63), (7.64) мають однакову форму конвективних членів, бо у кожному з рівнянь конвекція характеризується швидкістю v_g^{n+1} . Звідси випливає, що матриця коефіцієнтів, побудована наприклад, для (7.60), залишається такою самою і для інших рівнянь, тобто процедура обернення матриці виконується тільки один раз, а далі отримана обернена матриця використовується з різними правими частинами для одержання $(\alpha\rho)_g^{n+1}, (\alpha_g\rho_gX_n)^{n+1}, (\alpha\rho U)_g^{n+1}$. Аналогічно, лише один раз процедура обернення матриці коефіцієнтів виконується при розв'язанні рівнянь (7.61), (7.65) при знаходженні $(\alpha\rho)_f^{n+1}, (\alpha\rho U)_f^{n+1}$. Звідси випливає, що для задачі з N об'ємами повинні інвертуватися тільки дві матриці розмірністю $N \times N$. За отриманими значеннями добутків скалярних параметрів $(\alpha\rho)_g^{n+1}, (\alpha_g\rho_gX_n)^{n+1}, (\alpha\rho U)_g^{n+1}, (\alpha\rho)_f^{n+1}, (\alpha\rho U)_f^{n+1}$, використовуючи процедуру, аналогічну розглянутій для напівнеявної схеми, знаходяться остаточні значення скалярних параметрів $U_g^{n+1}, U_f^{n+1}, X_n^{n+1}, \alpha_g^{n+1}$.

Викладений вище розгляд застосування майже неявної схеми стосувався випадку переходу від двофазного потоку до двофазного при виконанні нового часового кроку (випадок 1). Розглянемо особливості трьох інших випадків.

Випадок 2 (“однофазний - однофазний”). У цьому випадку перший і другий кроки стратегії виконуються так само, як і у випадку 1. Для відсутньої фази значення коефіцієнту міжфазного теплообміну береться відповідним $\alpha = 10^{-5}$, для присутньої фази значення коефіцієнту міжфазного теплообміну приймається рівним нулеві. Для скалярних параметрів відсутньої фази приймаються проміжні значення, щоб уникнути ділення на нуль при визначенні цих параметрів з добутків $(\alpha\rho)^{n+1}, (\alpha\rho U)^{n+1}$, визначених з рівнянь в стислій формі. Для енергії, температури та густини відсутньої фази у рівняннях стану приймаються значення насичення.

Випадок 3 (“двофазний-однофазний”, зникнення фази). Розрахунок знову проводиться аналогічно випадку 1. У рівняннях стану енергія, температура та густина фази, що зникає, покладаються рівними відповідним параметрам насичення, як це робиться у випадку 2. Іноді у випадку зникнення фази в результаті розрахунків отримуються значення об’ємного вмісту пари (газу) менші нуля або більші одиниці. У цих випадках, якщо відхилення не перевищує заданої припустимої величини, для об’ємного вмісту пари (газу) приймаються, відповідно, значення 0 або 1. Якщо відхилення перевищує допустиме, фіксується помилка та крок за часом виконується повторно при зменшеному Δt . У даному випадку дії аналогічні напівнеявній схемі.

Випадок 4 (“однофазний-двофазний”, виникнення фази). Для фази, що з’являється, використовуються значення, обчислені на 1-ому кроці. З метою отримання значень енергії та температури фази, що виникає, близьких до значень насичення, використовується велике значення коефіцієнту міжфазного теплообміну, відповідне $\alpha = 10^{-5}$. Аналогічно випадку 4 для напівнеявної схеми, значна похибка може виникнути внаслідок виникнення фази за рахунок конвекції з сусіднього об’єму, де температура відмінна від температури насичення. Ця похибка виявляється за допомогою контролю кількості фази, що з’являється на даному кроці за часом.

Якщо похибка перевищує припустиме значення, обчислення повторюються зі зменшеною величиною Δt .

Підводячи підсумки, можна сказати, що другий крок необхідний для стабілізації конвективних членів та забезпечення стійкості схеми в цілому, причому досягається це досить несуттєвим (у порівнянні зі збільшенням при застосуванні повністю неявної схеми) збільшенням кількості обчислень.

7.5 Швидкості, осереднені за об'ємом.

Розглянутий вище алгоритм побудови скінченно-різницевих схем базувався на припущенні про те, що до контрольного об'єму з кожного його боку теплоносії поступає лише з одного сусіднього об'єму.

В той же час в коді RELAP 5 передбачена можливість моделювання ситуації, коли об'єм має декілька з'єднань, пов'язаних з його входом або виходом. Отже, параметри потоку на вході або виході з об'єму являють деяку функцію від параметрів всіх з'єднань, що пов'язані з входом або виходом.

Осереднені за об'ємом значення швидкостей потрібні для обчислення потоків кількості руху, розрахунку сил тертя на стінках, розрахунку теплопередачі від стінки до теплоносія, розрахунку параметрів міжфазного теплообміну, а також забезпечення виконання обмеження Куранта на крок за часом. У випадку відрізка труби зі сталою площею, що має лише по одному з'єднанню на вході і виході, достатню точність можна отримати якщо покласти середні за об'ємом швидкості рівними середньому арифметичному швидкостей на вході та виході. У випадку об'ємів з кількома з'єднаннями на вході або виході і у випадках різкої зміни площі перерізу всередині об'єму, такий підхід застосувати не можна.

Розглянемо об'єм приведений на рис. 7.5. Кожна із стрілок позначає потік маси рідини через відповідне з'єднання на вході або виході з об'єму. Через J_{in} позначено кількість з'єднань на вході, через J_{out} – на виході. Алгоритм отримання осередненого значення

швидкості розглянемо на прикладі рідкої фази, для газоподібної фази він залишиться таким же.

Загальна масова витрата рідкої фази через вхідний переріз дається співвідношенням:

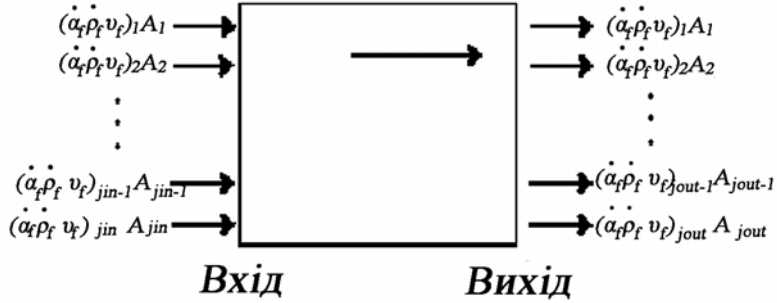


Рис.7.5. До осереднення швидкостей фаз в контрольному об'ємі.

$$M_{f,in} = \sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} v_{f,j} A_j. \quad (7.66)$$

Середній об'ємний вміст рідкої фази на вході до об'єму визначається як:

$$\bar{\alpha}_{f,in} = \frac{\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} A_j}{\sum_{j=1}^{j_{in}} A_j}. \quad (7.67)$$

Середня густина рідкої фази на вході до об'єму визначається таким чином:

$$\bar{\rho}_{f,in} = \frac{\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} A_j}{\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} A_j}. \quad (7.68)$$

Середня швидкість рідкої фази на вході до об'єму дається виразом:

$$\bar{v}_{f,in} = \frac{\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} v_{f,j} A_j}{\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} A_j}. \quad (7.69)$$

Загальна площа з'єднань на вході:

$$A_{in} = \sum_{j=1}^{j_{in}} A_j \quad (7.70)$$

Загальна масова витрата рідкої фази на вході $M_{f,in}$ може бути виражена через середні значення величин на вході:

$$M_{f,in} = \sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} v_{f,j} A_j = \bar{\alpha}_{f,in} \bar{\rho}_{f,in} \bar{v}_{f,in} A_{in}. \quad (7.71)$$

Масова витрата $M_{f,in}$, крім того, може бути виражена через площу поперечного перерізу в центрі об'єму A_L :

$$M_{f,in} = \bar{\alpha}_{f,in} \bar{\rho}_{f,in} \bar{v}_{f,in}^L A_L, \quad (7.72)$$

Прирівнюючи (7.71) і (7.72), отримаємо:

$$\bar{v}_{f,in}^L = \bar{v}_{f,in} \frac{A_{in}}{A_L}. \quad (7.73)$$

З (7.73), використовуючи (7.69), (7.70), отримаємо такий вираз для $\bar{v}_{f,in}^L$:

$$\bar{v}_{f,in}^L = \frac{\left(\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} v_{f,j} A_j \right) \left(\sum_{j=1}^{j_{in}} A_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} A_j \right) (A_L)}. \quad (7.74)$$

Аналогічне співвідношення можна записати і для швидкості на виході:

$$\bar{v}_{f,out}^L = \frac{\left(\sum_{j=1}^{j_{out}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} v_{f,j} A_j \right) \left(\sum_{j=1}^{j_{out}} A_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^{j_{out}} \dot{\alpha}_{f,j} \dot{\rho}_{f,j} A_j \right) (A_L)}. \quad (7.75)$$

Повна кількість руху рідини в об'ємі дорівнює сумі кількостей руху у вхідній та вихідній половинах об'єму:

$$\rho_{f,L} V_L v_{f,L} = \frac{1}{2} \rho_{f,L} V_L \bar{v}_{f,in}^L + \frac{1}{2} \rho_{f,L} V_L \bar{v}_{f,out}^L. \quad (7.76)$$

Звідси знайдемо середню швидкість в об'ємі $v_{f,L} = \frac{1}{2}(\bar{v}_{f,in} + \bar{v}_{f,out})$. Використовуючи (7.74) і (7.75) для значення середньої швидкості в об'ємі на n -ому кроці за часом остаточно отримаємо:

$$v_{f,L}^n = \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j}^n \dot{\rho}_{f,j}^n v_{f,j}^n A_j \right) \left(\sum_{j=1}^{j_{in}} A_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^{j_{in}} \dot{\alpha}_{f,j}^n \dot{\rho}_{f,j}^n A_j \right) (A_L)} + \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{j=1}^{j_{out}} \dot{\alpha}_{f,j}^n \dot{\rho}_{f,j}^n v_{f,j}^n A_j \right) \left(\sum_{j=1}^{j_{out}} A_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^{j_{out}} \dot{\alpha}_{f,j}^n \dot{\rho}_{f,j}^n A_j \right) (A_L)} \quad (7.77)$$

Як показала практика, представлення середньої швидкості у вигляді (7.77) не завжди дає вірні результати. Тому в коді RELAP 5 множник $\frac{1}{2}$ замінюється на множник:

$$\frac{\sum_{j=1}^{j_{in}} (\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f)_j^n A_j}{\sum_{j=1}^{j_{in}+j_{out}} (\dot{\alpha}_f \dot{\rho}_f)_j^n A_j} \quad (7.78)$$

Використання (7.78) приводить до введеної раніше формули (7.57) для швидкостей, середніх за об'ємом.

Відмітимо, що в окремих спеціальних випадках використовуються модифіковані формули (7.77), (7.78). Детальний опис цих модифікацій приведений в [10].

7.6 Модель тривимірного гетерогенного двофазного потоку коду RELAP 5 3D

Розглянуті в розд. 4 і 7 неперервні та скінченно-різницеві рівняння теплогідроліки, що використовуються кодом RELAP 5, були побудовані в рамках одновимірної гетерогенної моделі двофазного потоку. З метою надання користувачеві можливостей для більш точного врахування просторових ефектів під час моделювання течії теплоносія, в код RELAP 5 було введено спеціальний гідродинамічний компонент MULTID, побудований на основі тривимірної гетерогенної моделі двофазного потоку. Використання тривимірних рівнянь збереження кількості руху дозволяє ефективно проводити розрахунок процесів перемішування, а також дає можливість враховувати тривимірний характер течії, насамперед, в активній зоні, опускній камері реактора і парогенераторі. Багатовимірний компонент MULTID визначає одно-, дво-, або тривимірний масив об'ємів, пов'язаних внутрішніми з'єднаннями. Вказаний масив може бути побудований, використовуючи або декартову (x,y,z) , або циліндричну (r,θ,z) систему координат.

В даному підрозділі буде проведено обговорення тривимірної моделі гетерогенного двофазного потоку, що складає основу компоненту MULTID. Відмітимо, що головні зміни, які вносяться в алгоритм чисельного розв'язання задач теплогідроліки, стосуються представлення конвективних членів в рівняннях збереження кількості руху.

7.6.1 Рівняння збереження маси та енергії тривимірної моделі.

Тривимірні рівняння збереження маси та енергії, що описують стан двофазної суміші, записуються, відповідно, у вигляді [10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (7.78)$$

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \mu \Phi + \rho q_v, \quad (7.79)$$

де дисипативна функція $\mu\Phi$ має вигляд (1.18).

Шляхом почленного множення рівняння (7.78) на U і додавання результату до (7.79), отримаємо наступну форму рівняння збереження енергії:

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho U \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - P \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \mu \Phi + \rho q_v. \quad (7.80)$$

Описана нижче процедура отримання тривимірних рівнянь збереження маси та енергії базується на використанні локальних миттєвих рівнянь (7.78)-(7.80) разом із застосуванням розглянутого в підрозд. 7.2 методу контрольного об'єму. Схема застосування методу контрольного об'єму до рівнянь (7.78) та (7.80) буде принципово різною. Це викликано тим, що рівняння (7.78) виражає закон збереження фізичної величини (маси) і, як наслідок, записане у консервативній формі (коефіцієнти при похідних відсутні). В свою чергу, рівняння (7.79) і (7.80) відображають лише закономірність зміни однієї з складових повної енергії – внутрішньої енергії U (хоча рівняння (7.79), (7.80) і еквівалентні рівнянню збереження повної енергії). Тому при застосуванні методу контрольного об'єму безпосередній запис рівняння збереження у вигляді балансового співвідношення між швидкостями зміни величин в об'ємі, потоками величин через границі об'єму та потужностями внутрішніх джерел, може здійснюватися лише для рівняння збереження маси. При застосуванні методу контрольного об'єму до рівняння енергії необхідно виконувати просторове інтегрування, що призводить до виникнення так званих неконсервативних членів, тобто таких членів рівняння, які не є а) похідними по часу від інтегралів по об'єму; б) потоками величин через поверхню, що обмежує об'єм; в) потужностями внутрішніх джерел.

7.6.2 Скінченно-різницеві рівняння збереження маси та енергії.

Скінченно-різницева апроксимація рівнянь теплогідравліки, побудованих на основі тривимірної моделі двофазного потоку, виконується за допомогою методу контрольного об'єму.

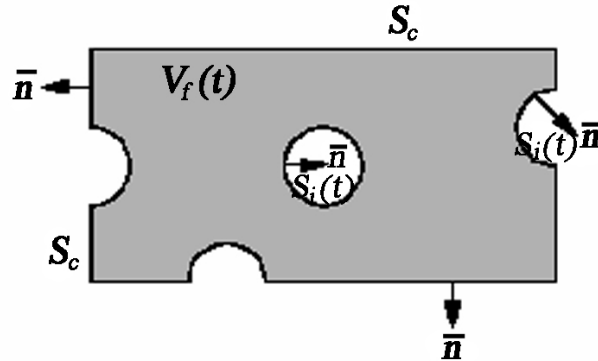


Рис. 7.6. Контрольний об'єм $V_f(t)$.

Розглянемо контрольний об'єм $V_f(t)$ (рис.7.6). $V_f(t)$ являє собою об'єм, зайнятий однією фазою і розташований в області потоку, що досліджується. Об'єм $V_f(t)$ оточений поверхнями $S_i(t)$ та S_c . Поверхня $S_i(t)$ являє собою міжфазну поверхню, яка відокремлює фазу, що утворює об'єм $V_f(t)$, і іншу фазу. Поверхня S_c – зовнішня поверхня, що обмежує виділений об'єм (наприклад, тверді стінки). Поверхня $S_i(t)$ рухається зі швидкістю $\vec{v}_S$, в той час як поверхня S_c є нерухомою ($\vec{v}_S = 0$ для S_c). Відзначимо, що $\vec{v}_S$ є швидкістю руху поверхні, що обмежує виділений об'єм (міжфазної поверхні), а не швидкістю потоку. Об'єм $V_f(t)$ змінюється з часом внаслідок руху поверхні $S_i(t)$.

Застосування методу контрольного об'єму до рівнянь збереження маси та енергії базується на використанні двох наступних інтегральних теорем з векторного аналізу, справедливих для будь-якого скалярного поля φ і векторного поля $\vec{f}$, визначених в об'ємі $V_f(t)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_f(t)} \varphi dV = \int_{V_f(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \int_{S_i(t)} \varphi \vec{v}_S \cdot \vec{n} dA.$$

(основна теорема аналізу)(7.81)

$$\int_{V_f(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = \int_{S_i(t)} \vec{f} \cdot \vec{n} dA + \int_{S_c} \vec{f} \cdot \vec{n} dA.$$

(теорема Гауса-Остроградського) (7.82)

Для того, щоб записати рівняння збереження маси для контрольного об'єму, проінтегруємо рівняння (7.78) по об'єму $V_f(t)$, після чого застосуємо (7.82) для перетворення конвективних членів і (7.81) для перетворення членів, що містять локальні похідні по часу. В результаті одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_f(t)} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \int_{S_i(t)} \rho (\vec{v} - \vec{v}_S) \cdot \vec{n} dA = 0.$$

(7.83)

Рівняння (7.83) представляє собою загальну форму рівняння збереження маси для контрольного об'єму. Це рівняння є основою для побудови скінченно-різницевого рівняння збереження маси.

Виведення рівняння енергії для контрольного об'єму відбувається аналогічно попередньому. Спочатку диференціальне рівняння енергії (7.79) необхідно проінтегрувати по об'єму $V_f(t)$, а потім слід застосувати формули (7.81) і (7.82). В результаті будемо мати:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_f(t)} \rho U dV + \int_{S_c} \rho U \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \int_{S_i(t)} \rho U (\vec{v} - \vec{v}_S) \cdot \vec{n} dA = \\
& = - \int_{S_c} \vec{q} \cdot \vec{n} dA - \int_{S_i(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dA - \int_{V_f(t)} P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV + \int_{V_f(t)} \mu \Phi dV + \int_{V_f(t)} \rho q_v dV.
\end{aligned}
\tag{7.84}$$

Рівняння (7.84) є базовою формою рівняння збереження енергії для контрольного об'єму. Перед тим, як перейти до розгляду скінченно-різницевих форм рівнянь збереження маси та енергії, введемо такі позначення:

$$\Gamma = \frac{1}{V} \int_{S_i(t)} \rho (\vec{v}_S - \vec{v}) \cdot \vec{n} dA \quad - \text{інтенсивність масообміну в}$$

одиниці об'єму;

$$R = \frac{1}{V} \int_{V_f(t)} \rho q_v dV \quad - \text{потужність внутрішніх джерел тепла в}$$

одиниці об'єму;

$$D_s = \frac{1}{V} \int_{V_f(t)} \mu \Phi dV \quad - \text{потужність дисипації кінетичної енергії}$$

в одиниці об'єму,

7.6.3 Скінченно-різницеві форми рівнянь збереження маси та енергії.

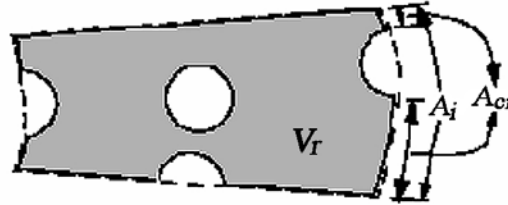


Рис.7.7. Контрольний об'єм для скінченно-різницевої апроксимації.

На рис.7.7. показано контрольний об'єм $V_f(t)$, який буде використовуватися при проведенні скінченно-різницевої апроксимації рівнянь збереження. Надалі будуть вживатися такі позначення:

V – чисельне значення об'єму, обмеженого пунктирними лініями, який включає об'єм $V_f(t)$ та об'єм “отворів”, зайнятих іншою фазою;

A_i – загальна площа i -ої частини зовнішньої поверхні об'єму V ;

A_{ci} – частина площі A_i , зайнята фазою, що розглядається.

Для кожної частини поверхні, що обмежує об'єм V , вводиться об'ємний вміст фази, що наповнює контрольний об'єм $V_f(t)$:

$$\alpha_i = \frac{A_{ci}}{A_i}.$$

Крім того, вводиться об'ємний вміст фази, середній по об'єму V :

$$\alpha_V = \frac{V_f}{V}.$$

Повернемося до основних рівнянь (7.83), (7.84). Для того, щоб виконати дискретизацію цих рівнянь, перетворимо всі об'ємні і поверхневі інтеграли, припускаючи, що всі змінні величини мають постійні значення на поверхні або в об'ємі, по яких виконується інтегрування. В результаті для рівняння (7.83) отримаємо такий скінченно-різницеви аналог:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_f) + \sum_i A_{ci} \rho_i (\vec{v} \cdot \vec{n})_i = V \Gamma,$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_V \rho V) + \sum_i A_i \alpha_i \rho_i v_{in} = V \Gamma, \quad (7.85)$$

де v_{in} - нормальна складова швидкості $\vec{v}$ на i -ій поверхні.

Для побудови скінченно-різницевого аналога рівняння збереження маси залишається здійснити апроксимацію похідної за часом. Проведемо перетворення:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_V \rho V) = V \left(\rho \frac{\partial \alpha_V}{\partial t} + \alpha_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \right).$$

Така форма запису дозволяє провести дискретизацію, використовуючи для представлення коефіцієнтів при похідних значення, отримані на старому кроці за часом, що забезпечить лінійність побудованого скінченно-різницевого рівняння. Виходячи з міркувань стійкості і лінійності системи, для нормальних компонентів швидкості v_{in} використовуються значення на новому кроці за часом, а для величин α_i і ρ_i , які відносяться до поверхонь, що обмежують контрольний об'єм, застосовується донорна апроксимація на старому кроці за часом. Член Γ , що входить до

правій частини рівняння, подається за допомогою величин, взятих на новому кроці за часом, але при цьому виконується його лінеаризація.

Тепер розглянемо рівняння (7.84). Третій доданок в правій частині (7.84) апроксимується, припускаючи, що тиск P не змінюється в межах об'єму V :

$$\int_{V_f(t)} P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = P \int_{V_f(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = P \left[\int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \int_{S_i(t)} \vec{v} \cdot \vec{n} dA \right].$$

При проведенні останнього перетворення використано теорему Гауса-Остроградського (7.82). Отримане співвідношення можна переписати у вигляді:

$$\int_{V_f(t)} P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = P \left[\int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \int_{S_i(t)} (\vec{v} - \vec{v}_S) \cdot \vec{n} dA + \int_{S_i(t)} \vec{v}_S \cdot \vec{n} dA \right]. \quad (7.86)$$

Застосовуючи формулу (7.81) при $\varphi = 1$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_f(t)} 1 dV = \int_{S_i(t)} \vec{v}_S \cdot \vec{n} dA \right) \text{ до останнього члена рівняння (7.86),}$$

будемо мати:

$$\int_{V_f(t)} P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = P \int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} dA + P \int_{S_i(t)} (\vec{v} - \vec{v}_S) \cdot \vec{n} dA + P \frac{\partial V_f}{\partial t}. \quad (7.87)$$

Використовуючи зроблені перетворення члена рівняння енергії, що відповідає за роботу тиску на зміну об'єму, перепишемо рівняння (7.84) у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_f(t)} \rho U dV + \int_{S_c} \rho U \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \\
& = - \int_{S_c} \vec{q} \cdot \vec{n} dA - \int_{S_i(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dA - P \frac{\partial(\alpha_v V)}{\partial t} - P \int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} dA - \\
& - \int_{S_i(t)} \left(U + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\vec{v} - \vec{v}_S) \cdot \vec{n} dA + D_s V + R V.
\end{aligned}
\tag{7.88}$$

Виконаємо дискретизацію рівняння (7.88), припускаючи, що всі величини, які входять до підінтегральних виразів у (7.88), є постійними в межах поверхонь і об'ємів, по яких виконується інтегрування. В результаті будемо мати:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_v \rho U V) + \sum_i A_i \alpha_i \rho_i U_i v_{in} = - \int_{S_c} \vec{q} \cdot \vec{n} dA + Q_i V - P \left[\frac{\partial(\alpha_v V)}{\partial t} + \sum_i A_i \alpha_i v_{in} \right] + \\
& + h_i \Gamma V + D_s V + R V.
\end{aligned}
\tag{7.89}$$

де $h_i = U + \frac{P}{\rho}$ – ентальпія на поверхні S_i ; $Q_i = -\frac{1}{V} \int_{S_i(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dA$

– питома інтенсивність теплопередачі до фази, що заповнює контрольний об'єм $V_f(t)$, через міжфазну поверхню; $-\int_{S_c} \vec{q} \cdot \vec{n} dA$

– інтенсивність теплопередачі до фази, що заповнює контрольний об'єм $V_f(t)$, через поверхню S_c , що обмежує виділений об'єм і не є міжфазною поверхнею. Цей член являє собою приток тепла за рахунок теплопроводності в тому випадку, коли S_c зайнята

теплоносієм і приток тепла за рахунок теплопередачі від стінок, якщо S_c відноситься до твердих стінок.

Перший член в лівій частині (7.89) розписується, використовуючи правило обчислення похідної від добутку:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_V \rho UV) = V \left(\rho U \frac{\partial \alpha_V}{\partial t} + \alpha_V U \frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha_V \rho \frac{\partial U}{\partial t} \right).$$

Для конвективних членів (другий член в лівій і четвертий в правій частині (7.89)) по аналогії з рівнянням збереження маси застосовується донорна апроксимація. Інтенсивність теплопередачі через міжфазну поверхню Q_i апроксимується неявно, але при цьому виконується лінеаризація. Для подання ентальпії h_i приймаються значення, отримані на старому кроці за часом. Члени D_s і R записуються явним чином, тобто з використанням значень, отриманих на старому кроці за часом.

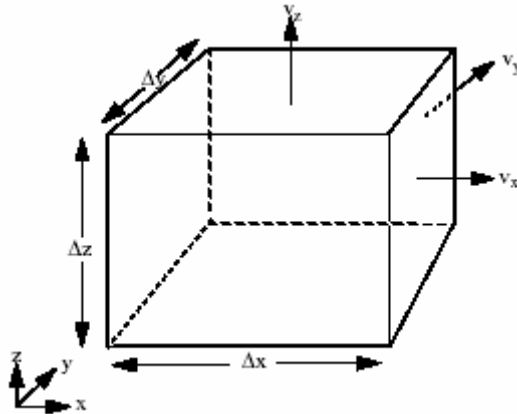


Рис. 7.8. Контрольний об'єм в декартових координатах.

В декартових координатах об'єм V (рис.7.8) подається таким чином:

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dy dz = \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (7.90)$$

Площі окремих граней цього об'єму даються виразами:

$$A_x = \Delta y \Delta z, \quad A_y = \Delta x \Delta z, \quad A_z = \Delta x \Delta y.$$

(7.91)

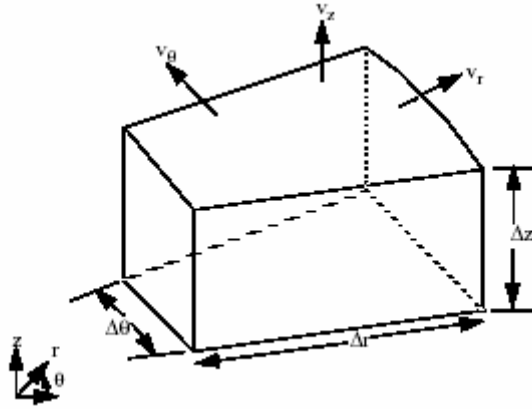


Рис.7.9. Контрольний об'єм в циліндричній системі координат.

В циліндричній системі координат об'єм V (рис.7.9) виражається таким чином:

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta dr dz = r_m \Delta r \Delta \theta \Delta z,$$

(7.92)

де $r_m = \frac{r_2 + r_1}{2}.$

Площі окремих граней цього об'єму даються виразами:

$$A_r = r \Delta \theta \Delta z, \quad A_\theta = \Delta r \Delta z, \quad A_z = r_m \Delta r \Delta \theta..$$

(7.93)

Приведені вирази використовуються під час запису скінченно-різницевих форм рівнянь збереження маси та енергії. В алгоритмах чисельного розв'язання вимагається, щоб об'єм дорівнював добутку площі поперечного перерізу, через який тече фаза, на довжину об'єму в напрямку відповідної координати.

7.6.4 Тривимірні рівняння збереження кількості руху.

Для кожної фази рівняння збереження кількості руху в векторній формі записується таким чином [10]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{\sigma} + \rho \vec{f}, \quad (7.94)$$

де $\vec{\sigma}$ – сила в'язкого тертя в одиниці об'єму, зайнятого фазою (об'ємна дія поверхневих сил), $\vec{f}$ – рівнодійна масових і міжфазних сил, прикладених до фази в одиниці об'єму.

Покоординатний запис конвективних членів (7.94) наведений нижче.

В декартових координатах:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, & \text{проекція на вісь } Ox, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, & \text{проекція на вісь } Oy, \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \text{проекція на вісь } Oz. \end{cases} \quad (7.95)$$

В циліндричних координатах:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \begin{cases} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}, & \text{проекція на вісь } r, \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, & \text{проекція на вісь } \theta, \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \text{проекція на вісь } z. \end{cases} \quad (7.96)$$

7.6.5 Рівняння збереження кількості руху для контрольного об'єму.

З метою отримання рівнянь збереження кількості руху, записаних для скінченного контрольного об'єму, виконаємо інтегрування (7.94) по об'єму $V_f(t)$. При цьому використаємо співвідношення (теорема про середнє):

$$\int_{V_f(t)} \varphi dV = \bar{\varphi} V_f = \alpha_V \bar{\varphi} V, \quad (7.97)$$

де $\bar{\varphi}$ – середнє значення величини φ в контрольному об'ємі. В подальшому, з метою спрощення, позначення “-” над φ використовуватися не буде. В результаті інтегрування отримаємо:

$$\alpha_V \rho V \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\alpha_V V \vec{\nabla} P + \int_{V_f(t)} \vec{\sigma} dV + \alpha_V \rho \vec{f} V. \quad (7.98)$$

Теорема про середнє не може бути застосована до другого доданку в правій частині (7.98), оскільки цей член ураховує внесок напружень поверхневих сил різної природи: 1) в'язких напружень, що діють на частині поверхні S_c , зайнятій теплоносієм (ці напруження є, як правило, дуже малими); 2) в'язких напружень, що діють на частині S_c , яка є твердими стінками (ці напруження

враховуються звичайним членом, що описує тертя на стінці); 3) в'язких напружень, що діють на поверхні $S_i(t)$ (враховується звичайним членом, що описує міжфазне тертя).

7.6.6 Дискретна форма рівнянь збереження кількості руху.

Скінченно-різницева апроксимація конвективних членів рівнянь збереження кількості руху має такий вигляд.

В декартових координатах:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \begin{cases} v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} + v_y \frac{\Delta v_x}{\Delta y} + v_z \frac{\Delta v_x}{\Delta z}, \\ v_x \frac{\Delta v_y}{\Delta x} + v_y \frac{\Delta v_y}{\Delta y} + v_z \frac{\Delta v_y}{\Delta z}, \\ v_x \frac{\Delta v_z}{\Delta x} + v_y \frac{\Delta v_z}{\Delta y} + v_z \frac{\Delta v_z}{\Delta z}. \end{cases} \quad (7.99)$$

В циліндричних координатах (прирости координат r, θ, z подаються, відповідно, виразами $\Delta r, r_m \Delta \theta$ і Δz):

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \begin{cases} v_r \frac{\Delta v_r}{\Delta r} + \frac{v_\theta}{r_m} \frac{\Delta v_r}{\Delta \theta} - \frac{v_\theta^2}{r_m} + v_z \frac{\Delta v_r}{\Delta z}, \\ v_r \frac{\Delta v_\theta}{\Delta r} + \frac{v_\theta}{r_m} \frac{\Delta v_\theta}{\Delta \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r_m} + v_z \frac{\Delta v_\theta}{\Delta z}, \\ v_r \frac{\Delta v_z}{\Delta r} + \frac{v_\theta}{r_m} \frac{\Delta v_z}{\Delta \theta} + v_z \frac{\Delta v_z}{\Delta z}. \end{cases} \quad (7.100)$$

7.6.7 Модель “мілкої” води.

При невеликих швидкостях за рахунок дії архімедових сил, що виникають внаслідок різниці густин фаз, може реалізовуватися горизонтально розшарований режим двофазного потоку. Для розшарованого потоку модель рівного тиску у фазах буде давати великі похибки внаслідок неоднорідного розподілу фаз по перерізу труби. Як відзначалося в підрозд. 4.3.7, для коректного врахування відмінностей тисків в фазах від середнього значення у випадку одновимірного потоку необхідно вводити додаткові члени в рівняння збереження кількості руху. В даному підрозділі описується модифікація цих членів у тривимірному випадку. Застосування цієї моделі особливо важливе для опису течії “мілкої” води, коли реалізується розшарований режим.

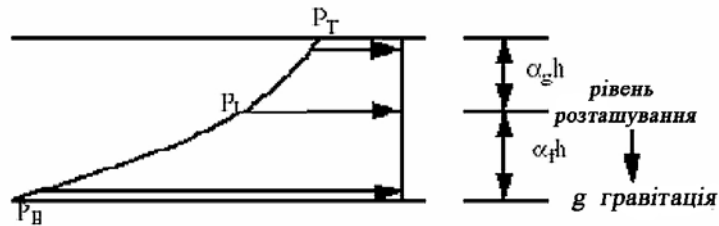


Рис.7.10. Профіль тиску у горизонтально розшарованому потоці.

На рис. 7.10. приведено профіль тиску для горизонтально розшарованого потоку. Тиски P_T , що діє на поверхні, яка обмежує потік зверху, P_B , що діє на нижній поверхні та P_I , що діє на міжфазній поверхні, пов'язані такими співвідношеннями:

$$P_I = P_T + \alpha_g \rho_g h g, \quad P_B = P_I + \alpha_f \rho_f h g. \quad (7.101)$$

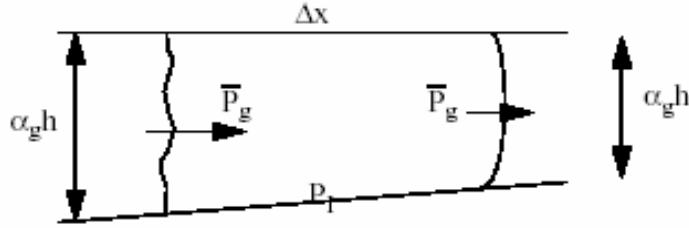


Рис. 7.11. Сили гідродинамічного тиску, що діють на газоподібну фазу.

На рис. 7.11. показані сили тиску, що діють на виділений скінченний об'єм газоподібної фази у розширеному потоці. Величини цих сил подаються такими виразами:

$$-\left(h\alpha_g \bar{P}_g\right)_{x+\Delta x} + \left(h\alpha_g \bar{P}_g\right)_x + P_I \left(\alpha_g h|_{x+\Delta x} - \alpha_g h|_x\right), \quad (7.102)$$

де перші два доданки являють собою сили, що діють на кінцях об'єму, а третій доданок – аксіальну силу, пов'язану зі зміною площі поперечного перерізу об'єму внаслідок зміни об'ємного вмісту пари (газу) і відповідного нахилу міжфазної поверхні; $\bar{P}_g$ - середній по відповідній частині поверхні тиск:

$$\bar{P}_g = \frac{P_T + P_I}{2}. \quad (7.103)$$

Переходячи в виразі (7.102) до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ і покладаючи, без обмеження загальності, постійну величину h рівною одиниці, отримаємо вираз для сили тиску F_{Pg} , що діє на газоподібну фазу:

$$F_{Pg} = -\frac{\partial(\alpha_g \bar{P}_g)}{\partial x} + P_I \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = -\alpha_g \frac{\partial \bar{P}_g}{\partial x} + (P_I - \bar{P}_g) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}.$$

(7.104)

Виразимо тиск $\bar{P}_g$ через тиск на міжфазній поверхні P_I .

Використовуючи рівняння (7.101) і (7.103), будемо мати:

$$\bar{P}_g = \frac{(P_I - \alpha_g \rho_g hg) + P_I}{2} = P_I - \frac{\alpha_g \rho_g hg}{2}.$$

Підставляючи цей вираз замість $\bar{P}_g$ у (7.104) остаточно дістанемо:

$$F_{Pg} = -\alpha_g \left(\frac{\partial P_I}{\partial x} - \frac{\rho_g hg}{2} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_g \rho_g hg}{2} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x},$$

або

$$F_{Pg} = -\alpha_g \frac{\partial P_I}{\partial x} + \alpha_g \rho_g hg \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}. \quad (7.105)$$

По аналогії, для сили тиску, що діє на рідку фазу, будемо мати:

$$F_{Pf} = -\alpha_f \frac{\partial P_I}{\partial x} + \alpha_f \rho_f hg \frac{\partial \alpha_f}{\partial x}. \quad (7.106)$$

Залишається визначити яким чином тиск P_I (P_T або P_B) пов'язаний з середнім тиском у контрольному об'ємі P , що розраховується кодом. Розрахунок теплогідрравлічних параметрів кодом RELAP 5 виконується виходячи з припущення, що в контрольному об'ємі фази рівномірно перемішані. Розрахунок тиску при цьому здійснюється, вважаючи, що градієнт тиску у вертикальному напрямку врівноважуються гравітаційними силами, як це справедливо у випадку статичної рівноваги рідини. Якщо додати проекції рівнянь збереження кількості руху на вісь z , отримаємо:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \alpha_g \rho_g g + \alpha_f \rho_f g. \quad (7.107)$$

Інтегруючи це рівняння в напрямку осі z в межах контрольного об'єму, дістанемо:

$$P_B = P_T + \alpha_g \rho_g gh + \alpha_f \rho_f gh. \quad (7.108)$$

Відзначимо, що різниця $P_B - P_T$, отримана з формули (7.108), буде цілком аналогічною до отриманої за формулами (7.101), тобто розшарованість потоку не впливає на перепад тиску в вертикальному напрямку, а здійснює вплив лише на форму профілю тиску.

Якщо використати звичайну модель, що застосовується кодом RELAP 5 для розрахунку середнього тиску P (див. (4.36)), тобто:

$$P = \alpha_g \bar{P}_g + \alpha_f \bar{P}_f, \quad (7.109)$$

то на основі (7.103) будемо мати:

$$P = \alpha_g \left(\frac{P_T + P_I}{2} \right) + \alpha_f \left(\frac{P_I + P_B}{2} \right). \quad (7.110)$$

Звідси, використовуючи рівняння (7.101), дістанемо остаточний вираз для середнього в межах контрольному об'єму значення тиску:

$$P = P_I - \frac{\alpha_g^2 \rho_g hg}{2} + \frac{\alpha_f^2 \rho_f hg}{2}. \quad (7.111)$$

Виражаючи з (7.111) P_I і підставляючи результат до (7.105) отримаємо такий вираз для сили тиску, що діє на газоподібну фазу F_{Pg} :

$$\begin{aligned}
F_{Pg} &= -\alpha_g \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_g^2 \rho_g hg}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_f^2 \rho_f hg}{2} \right) \right] + \alpha_g \rho_g hg \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = \\
&= -\alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha_f \alpha_g (\rho_g - \rho_f) hg \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{7.112}$$

Аналогічний вираз для сили тиску, що діє на рідку фазу, має вигляд:

$$\begin{aligned}
F_{Pf} &= -\alpha_f \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_g^2 \rho_g hg}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_f^2 \rho_f hg}{2} \right) \right] + \alpha_f \rho_f hg \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} = \\
&= -\alpha_f \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha_f \alpha_g (\rho_g - \rho_f) hg \frac{\partial \alpha_f}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{7.113}$$

Сили F_{Pg} і F_{Pf} дають представлення проекцій на вісь x градієнтів тиску в відповідній проекції рівняння (7.98), записаного для газоподібної та рідкої фази за умов горизонтальної розшарованості потоку. Аналогічні вирази можуть бути отримані для проекції на вісь y в декартових або на вісі r і θ в циліндричних координатах.

7.6.8 Тривимірні рівняння збереження кількості руху в декартових координатах.

В даному підрозділі описано алгоритм скінченно-різницевої апроксимації конвективних членів рівнянь збереження кількості руху і використання цієї апроксимації в напівнеявній схемі чисельного розв'язання. Увага приділяється лише конвективним членам внаслідок того, що в рамках моделі коду RELAP 5 3D відмінність від одновимірного випадку полягає лише в записах цих членів (див.(7.99)). Відзначимо, що напівнеявна і майже неявна стратегії чисельного розв'язання, описані вище для одновимірного випадку, застосовуються і для розрахунку параметрів тривимірного потоку. В коді RELAP 5 3D моделювання просторових ефектів

здійснюється за допомогою компонента MULTID. Багатовимірний компонент MULTID визначає одно-, дво-, або тривимірний масив об'ємів, пов'язаних внутрішніми з'єднаннями. Таким чином, у порівнянні з одновимірним випадком, новими є і питання подання швидкостей фаз і потоків кількості руху на внутрішніх межах між об'ємами всередині компонента MULTID, а також питання запису граничних умов на зовнішніх межах цього компонента.

Спочатку розглянемо способи подання конвективних членів для внутрішніх об'ємів компонента MULTID. Індексація, що використовується при скінченно-різницевій апроксимації конвективних членів, показана на рис.7.12 для площини xu і на рис.7.13 для площини xz .

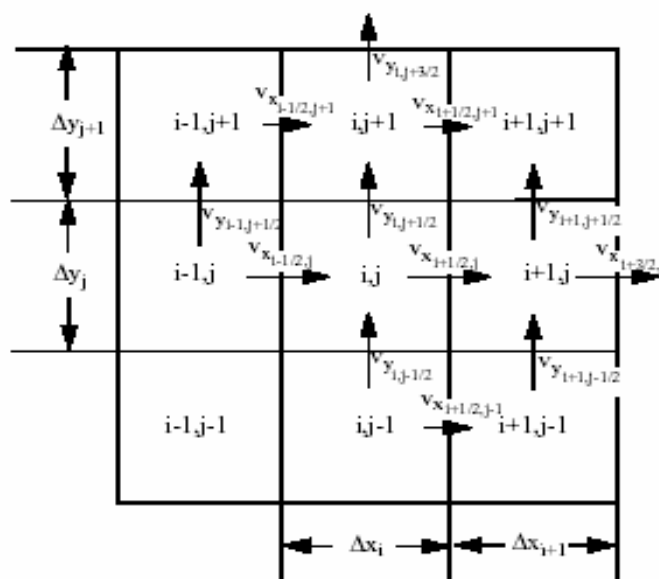


Рис.7.12. Проекції внутрішніх контрольних об'ємів компонента MULTID на площину xu .

Для всіх швидкостей на межах комірок, показаних на рис.7.12, індекс " k ", що характеризує зміну в напрямку осі z , буде однаковим,

бо всі вони розташовані в одній площині, паралельній осі z . Аналогічно, однаковий індекс “ j ” розуміється для швидкостей на рис.7.13.

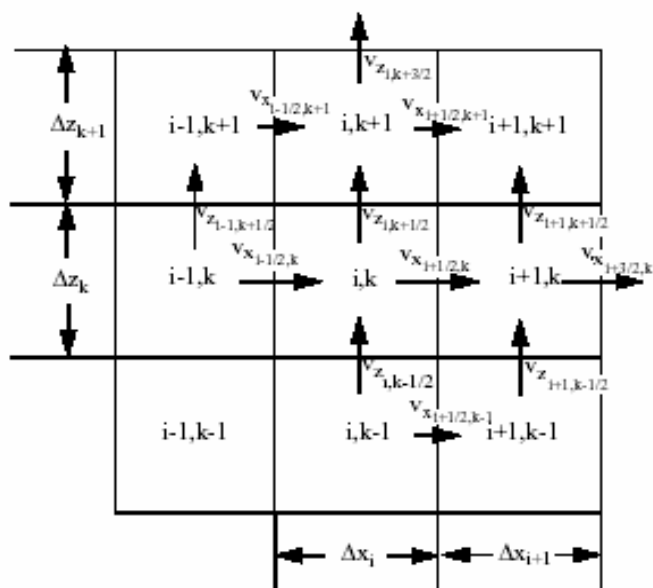


Рис.7.13. Проекції внутрішніх контрольних об’ємів компоненту MULTID на площину xz .

Контрольний об’єм для кількості руху, що використовується для скінченно-різницевої апроксимації проекції потоку кількості руху на вісь x показаний на рис.7.14.

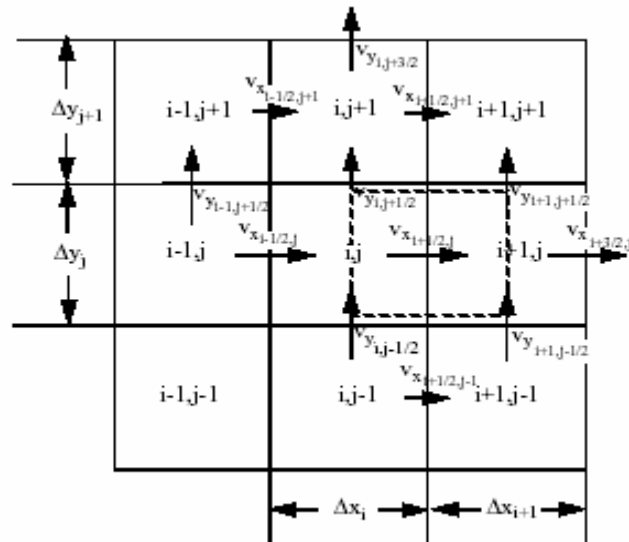


Рис.7.14. Контрольний об'єм для апроксимації проекції потоку кількості руху на вісь x .

Проекція потоку кількості руху на вісь x має вигляд:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (7.114)$$

Представимо кожен доданок в цьому виразі в скінченно-різницевій формі, використовуючи для запису градієнтних членів донорну апроксимацію, згідно з якою ці члени відносяться до тієї сторони контрольного об'єму, яка розташована вверх за потоком, зважаючи на напрям швидкості, що відіграє роль коефіцієнта при відповідному градієнтному члені. Будемо мати:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} v_{x_{i+1/2,j,k}}^n \left(\frac{v_{x_{i+1/2,j,k}}^n - v_{x_{i-1/2,j,k}}^n}{\Delta x_{i,j,k}} \right), & v_{x_{i+1/2,j,k}}^n \geq 0, \\ v_{x_{i+1/2,j,k}}^n \left(\frac{v_{x_{i+3/2,j,k}}^n - v_{x_{i+1/2,j,k}}^n}{\Delta x_{i+1,j,k}} \right), & v_{x_{i+1/2,j,k}}^n < 0, \end{cases} \quad (7.115)$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_{y_{i+1/2,j,k}}^n \left(\frac{v_{x_{i+1/2,j,k}}^n - v_{x_{i+1/2,j-1,k}}^n}{\frac{1}{2}(\Delta y_{i,j,k} + \Delta y_{i,j-1,k})} \right), & \bar{v}_{y_{i+1/2,j,k}}^n \geq 0, \\ \bar{v}_{y_{i+1/2,j,k}}^n \left(\frac{v_{x_{i+1/2,j,k+1}}^n - v_{x_{i+1/2,j,k}}^n}{\frac{1}{2}(\Delta y_{i,j,k+1} + \Delta y_{i,j,k})} \right), & \bar{v}_{y_{i+1/2,j,k}}^n < 0, \end{cases} \quad (7.116)$$

$$v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_{z_{i+1/2,j,k}}^n \left(\frac{v_{x_{i+1/2,j,k}}^n - v_{x_{i+1/2,j,k-1}}^n}{\frac{1}{2}(\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k-1})} \right), & \bar{v}_{z_{i+1/2,j,k}}^n \geq 0, \\ \bar{v}_{z_{i+1/2,j,k}}^n \left(\frac{v_{x_{i+1/2,j,k+1}}^n - v_{x_{i+1/2,j,k}}^n}{\frac{1}{2}(\Delta z_{i,j,k+1} + \Delta z_{i,j,k})} \right), & \bar{v}_{z_{i+1/2,j,k}}^n < 0. \end{cases} \quad (7.117)$$

В рівняннях (7.116) і (7.117) позначені зверху рискою швидкості не відносяться до площини з'єднання “ $i + 1/2$ ”, а представляють

собою значення, осереднені по чотирьох з'єднаннях, що оточують дане. Вирази для цих величин мають вигляд:

$$\bar{v}_{y_{i+1/2,j,k}}^n = \frac{1}{4} \left(v_{y_{i,j-1/2,k}}^n + v_{y_{i,j+1/2,k}}^n + v_{y_{i+1,j-1/2,k}}^n + v_{y_{i+1,j+1/2,k}}^n \right), \quad (7.118)$$

$$\bar{v}_{z_{i+1/2,j,k}}^n = \frac{1}{4} \left(v_{z_{i,j,k-1/2}}^n + v_{z_{i,j,k+1/2}}^n + v_{z_{i+1,j,k-1/2}}^n + v_{z_{i+1,j,k+1/2}}^n \right). \quad (7.119)$$

Аналогічним чином апроксимуються і члени, що входять до проєкцій потоку кількості руху на вісі y і z .

7.6.9 Граничні умови на твердих стінках для компоненту MULTID.

В кодї RELAP 5 3D при апроксимації рівнянь збереження кількості руху вводяться спеціальні способи подання конвективних потоків кількості руху у з'єднаннях, нормальних і дотичних по відношенню до проєкції потоку кількості руху, що апроксимується за допомогою даного контрольного об'єму. На твердих стінках, що являють собою межі компоненту MULTID, задаються умови вільного ковзання, типові для моделі нев'язкої рідини. Такий підхід є коректним з огляду на те, що в моделі коду RELAP 5 сили внутрішнього тертя моделюються не за допомогою застосування узагальненого закону Ньютона (що приводить до нестійких при великих числах Рейнольдса рівнянь Нав'є-Стокса), а шляхом введення розглянутих у розд. 6 спеціальних моделей, які базуються на коефіцієнтах тертя. З огляду на цей факт, в кодї використовуються такі граничні умови на твердих стінках.

(а) Умова безвіддривності обтікання:

$$v_n|_w = 0, \quad (7.120)$$

де v_n - проєкція вектора швидкості на нормаль до стінки.

(б) Умова рівності нулю дотичних напружень на твердих стінках. Для дотичного напруження σ_{xy} , що діє по площадці з нормаллю, паралельній осі x , в напрямку осі y , ця умова матиме вигляд:

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0, \quad (7.121)$$

де μ - динамічний коефіцієнт в'язкості.

Для площадки з нормаллю, паралельною осі x з граничної умови

(а) отримаємо $v_x = 0$, отже і $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$. Тоді на основі умови (б)

прийдемо до висновку, що на стінці виконується умова $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$.

Таким чином, граничні умови, яким задовольняють компоненти вектора швидкості на стінці, мають вигляд:

$$v_x|_w = 0, \quad (7.122)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_w = 0. \quad (7.123)$$

Для того, щоб задати ці граничні умови, кожен компонент MULTID оточується спеціальними фіктивними контрольними об'ємами, розташованими в твердих стінках. Фіктивні контрольні об'єми містять таку ж інформацію, що і звичайні об'єми, розташовані всередині компоненту MULTID, але вони не використовуються при розрахунках потоків кількості руху. Введення фіктивних контрольних об'ємів являє собою зручний спосіб задання граничних умов на твердих стінках. На рис.7.15 зображені проекції контрольних об'ємів на площину xy . Вони

аналогічні показаним на рис.7.12, за виключенням того, що межують з твердими стінками.

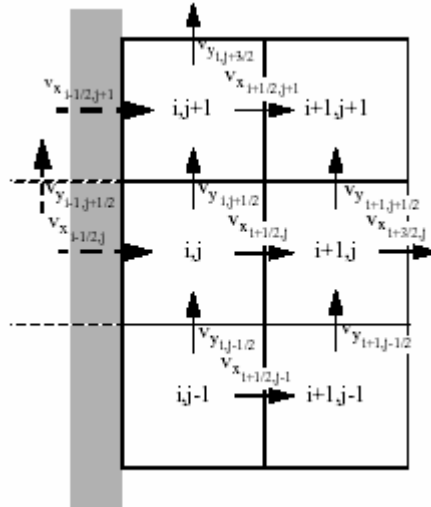


Рис. 7.15. Проекції контрольних об'ємів, що межують з твердими стінками, на площину xu .

Звичайні швидкості у внутрішніх з'єднаннях компоненту MULTID позначені на рис.7.15 суцільними стрілками, в той час як швидкості, що визначаються з граничних умов і характеризують фіктивні потоки кількості руху, позначені штриховими стрілками.

Опишемо скінченно-різницеві рівняння, побудовані для визначення швидкостей $v_{x_{i+1/2,j}}$ і $v_{y_{i,j+1/2}}$, які відносяться до з'єднань, пов'язаних з контрольним об'ємом, що межує з твердою стінкою. При побудові цих рівнянь, як впливає з (7.115)-(7.117) і аналогічних виразів для складових проекції потоку кількості руху на вісь y , потрібні значення швидкостей в звичайних з'єднаннях і значення швидкостей, задані на твердих стінках, що характеризують фіктивні потоки кількості руху.

Враховуючи вигляд граничних умов (7.122), (7.123), нормальні до твердих стінок компоненти швидкостей на стінках необхідно

покласти рівними нулю, в той час як дотичні компоненти треба обрати рівними відповідним компонентам у найближчому з'єднанні, що відноситься до даного контрольного об'єму. Таким чином, будемо мати:

$$v_{x_{i-1/2,j}}^n = 0, \quad v_{x_{i-1/2,j+1}}^n = 0, \quad (7.124)$$

і

$$v_{y_{i-1,j+1/2}}^n = v_{y_{i,j+1/2}}^n. \quad (7.125)$$

Виконання умов (7.124), (7.125), побудованих на основі граничних умов (7.122), (7.123), забезпечує коректність застосування виразів (7.115)-(7.117) для складових проекції потоку кількості руху на вісь x і аналогічних виразів, які можуть бути побудовані для проекції потоку кількості руху на вісь y .

Більш складною буде постановка граничних умов для кутових контрольних об'ємів, дві сторони яких межують з твердими стінками. На рис.7.16 показані швидкості у з'єднаннях, які мають розраховуватися за скінченно-різницевиими рівняннями для внутрішніх об'ємів (індекс “ i ”), для бічних об'ємів (індекс “ s ”) та

кутових об'ємів (індекс "с").

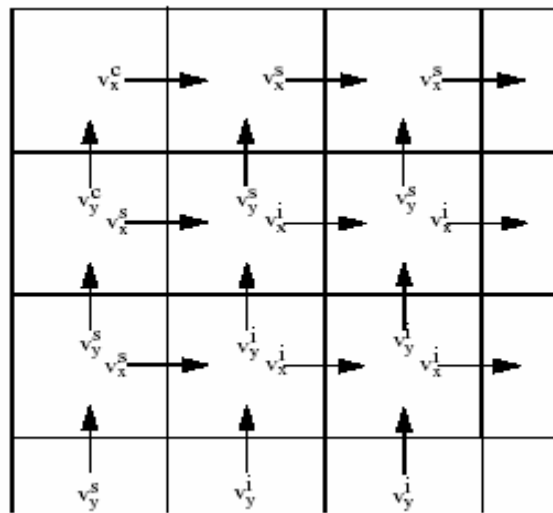


Рис.7.16. Швидкості у з'єднаннях, що відносяться до внутрішніх, бічних та кутових об'ємів.

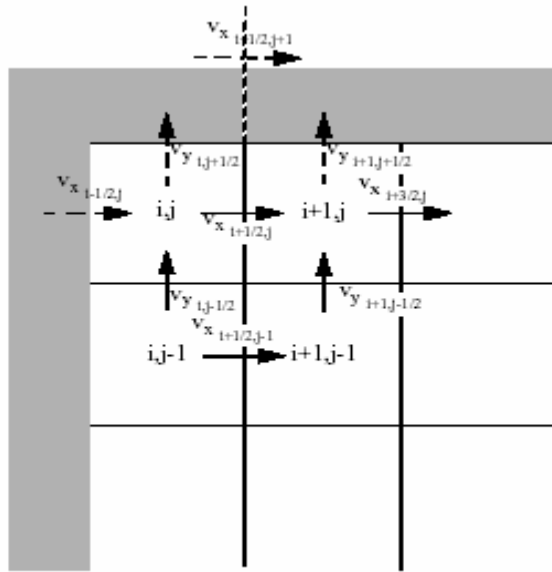


Рис.7.17. Швидкості у з'єднаннях проекції кутового контрольного об'єму на площину xu .

На рис.7.17 швидкості у внутрішніх, бічних і кутових з'єднаннях подані вже в звичайній індексній формі, наприклад $v_{x_{i+1/2,j}}$ відповідає v_x^c з рис.7.16. На рис.7.17 показані всі швидкості, необхідні для обчислення невідомої швидкості $v_{x_{i+1/2,j}}$ у внутрішньому з'єднанні за скінченно-різницевою схемою. По аналогії з попереднім необхідно прийняти такі значення швидкостей на твердих стінках:

$$v_{x_{i-1/2,j}}^n = 0, v_{x_{i+1/2,j+1}}^n = v_{x_{i+1/2,j}}^n, v_{y_{i,j+1/2}}^n = 0, v_{y_{i+1,j+1/2}}^n = 0. \quad (7.126)$$

Граничні умови, необхідні для побудови скінченно-різницевої апроксимації проекцій потоку кількості руху на вісь Y для кутових контрольних об'ємів задаються аналогічно (7.126). Такий спосіб задання граничних умов дозволяє використовувати вирази (7.115)-(7.117) для складових проекції потоку кількості руху на вісь X і їх аналоги для проекції на вісь Y . Описана методика, справедлива для апроксимації конвективних членів рівнянь збереження кількості руху на площині XU , розповсюджується на загальний тривимірний випадок використовуючи міркування, цілком аналогічні до наведених вище.

7.6.10 Вирази для конвективних членів у з'єднаннях одновимірних і тривимірних компонентів.

На практиці можуть зустрітися випадки, коли одновимірні компоненти з'єднуються з великими тривимірними компонентами, нодалізація яких проведена досить грубо. Прикладом може служити з'єднання холодних і гарячих ниток з об'ємом всередині корпусу реактора, у випадку коли модель цього об'єму містить лише 3-4 вертикально розташованих кільця. У випадку грубої нодалізації тривимірного компоненту неможливо коректно врахувати розширення одновимірного потоку (у випадку коли теплоносії надходить до тривимірного компонента) і наступне його перемішування з потоком всередині 3D-компонента. Якщо з тих або інших причин урахувати зміну профіля швидкості в районі з'єднання одновимірного і тривимірного компонентів не вдається, єдине, що можна зробити – це врахувати втрати тиску, пов'язані з проходженням відповідного 1D-3D з'єднання.

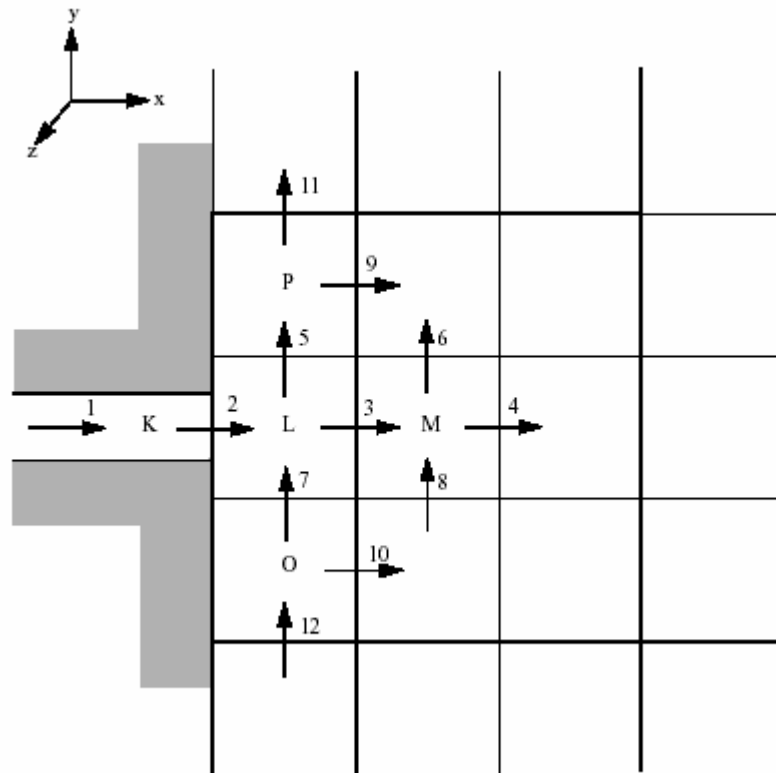


Рис.7.18. З'єднання 1D- і 3D-компонентів.

Для типового 1D-3D з'єднання, показаного на рис.7.18, припускається, що:

- з'єднання 4,6,8 є звичайними з'єднаннями між контрольними об'ємами всередині тривимірного компонента;
- з'єднання 11 і 12 є звичайними з'єднаннями для бічних контрольних об'ємів, тобто для них застосовуються розглянуті вище умови вільного ковзання на твердих стінках;

- для з'єднань 9, 10 також застосовуються умови вільного ковзання;
- 1 є звичайним одновимірним з'єднанням.

Розглянемо рівняння збереження кількості руху для з'єднань 2,3,5,7. Відмітимо, що моделювання з'єднань 1 і 3D-компонентів завжди повинно проводитися за умови, що площа поперечного перерізу одновимірного компонента менша або рівна площі відповідної бічної сторони компонента тривимірного.

Враховуючи великі розміри ноди L , з'єднання 2 може розглядатися як одновимірне з'єднання, що займає об'єм від центра об'єму K до центра об'єму L . При цьому під час розрахунку втрат тиску площа на виході зі з'єднання може вважатися нескінченною. Як відзначається в [10], такий підхід інколи приводить до досить серйозних похибок при розрахунку втрат у 1D-3D з'єднаннях і вимагає подальшого дослідження.

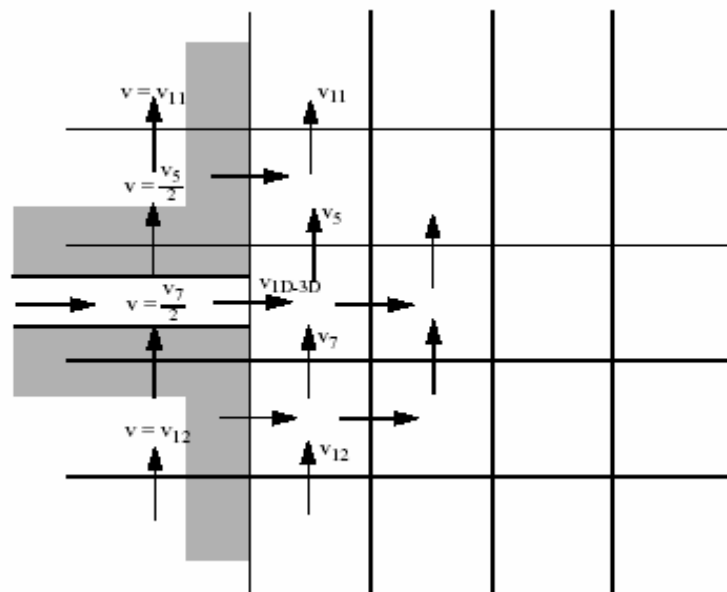


Рис.7.19. Швидкості, необхідні для апроксимації потоків кількості руху у з'єднаннях 3,5,7.

Для з'єднання 2 члени, пов'язані із тертям, враховують лише внесок об'єму К. Крім того, враховуючи, що в об'ємі L, потік кількості руху в аксіальному для об'єму К напрямку набагато менший, ніж в об'ємі К, під час запису рівнянь збереження кількості руху ним можна знехтувати, так само, як це робиться у моделі поперечного з'єднання (див. розд. 8). Отже, члени рівнянь збереження кількості руху, пов'язані з дією інерційних сил і сил тертя, повинні враховувати внесок тільки об'єму К. Розрахунок гравітаційних втрат базується на різниці висот центрів об'ємів К та L. В усьому іншому розрахунок параметрів потоку у з'єднанні 2 проводиться так само, як і для звичайного одновимірного з'єднання.

Для з'єднань 3,5 і 7 використовуються звичайні рівняння для внутрішніх з'єднань. Таким чином, необхідно задати об'єм з'єднання V_{1D-3D} та граничні умови вільного ковзання на твердих стінках. Швидкості, необхідні для запису скінченно-різницевого рівнянь збереження кількості руху у цих з'єднаннях, показані на рис.7.19. Якщо прийняти концепцію вільного ковзання, дотичні до твердих стінок швидкості, мали б бути прийняті рівними v_5 і v_7 , а не $v_5/2$ і $v_7/2$. Причиною прийняття значень $v_5/2$ і $v_7/2$ є те, що лише половина з'єднань 5 і 7 дотикається стінок, в той час, як інша половина межує з отвором труби і отже дотичні компоненти векторів швидкості для цієї половини дорівнюють нулеві.

Швидкість v_{1D-3D} являє собою зведене значення швидкості у з'єднанні 2, v_{j2} (рис.7.18):

$$v_{1D-3D} = v_{j2} \cdot \frac{A_{j2}}{\Delta y_L \cdot \Delta z_L}, \quad (7.127)$$

де A_{j2} – площа поперечного перерізу з'єднання 2, а $\Delta y_L, \Delta z_L$ – розміри контрольного об'єму L в напрямках відповідних осей координат.

Такими є основні особливості побудови скінченно-різницевих рівнянь для 1D-3D з'єднань.

7.6.11 . Підсумки

В підрозділі 7.6 було розглянуто основні характерні особливості моделі тривимірного гетерогенного двофазного потоку коду RELAP 5 3D, проаналізовано алгоритми побудови скінченно-різницевих рівнянь збереження кількості руху, а також задання граничних умов в прямокутній декартовій системі координат. Алгоритми побудови цих рівнянь в циліндричній системі координат базуються на описаних вище підходах і розглянуті в [10].

Відмінність тривимірної моделі від одновимірної полягає лише в представленні конвективних членів і в способах задання граничних умов для швидкості. Всі члени рівнянь збереження кількості руху, пов'язані з силами, що діють всередині потоку і на твердих стінках, лишаються без змін. Так само, як і в одновимірній моделі, в моделі тривимірного потоку нехтують силами в'язкого тертя всередині потоку. Це дозволяє використовувати диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку і, за рахунок цього, значно спростити алгоритми чисельного розв'язання та підвищити стійкість відповідних скінченно-різницевих схем. В'язкість враховується тільки в спеціальних членах, що представляють сили тертя на стінках. Окреслені вище особливості моделі тривимірного потоку дозволяють використовувати розглянуті вище напівнеявну і майже неявну стратегії чисельного розв'язання задач теплогідравліки і для тривимірного випадку. Відмінності від одновимірного випадку полягають лише в алгоритмі обчислення швидкостей на кожному кроці по часу.

8 Спеціальні моделі процесів, що використовуються RELAP5

8.1 Запирання потоку.

Розглянемо одно- або двофазний потік в каналі довільної геометрії, що сполучає два резервуари. Припустимо, що розміри резервуару високого тиску, з якого витікає потік, є настільки великими, що стан рідини в цьому резервуарі можна вважати незмінним. Витрата рідини з першого резервуару називається *критичною*, якщо вона є максимальною для даних умов при зниженні тиску в другому резервуарі. В умовах критичної течії спостерігається така особливість – жодні збурення параметрів рідини в резервуарі низького тиску не впливають на розподіл параметрів вгору по потоку. Подібна ситуація має назву *запирання потоку*.

Розуміння природи критичних течій є надзвичайно важливим з точки зору аналізу безпеки ядерних реакторів, враховуючи те значення, яке має розрахунок витрат під час розгляду аварій з втратою теплоносія.

Явище запирання потоку може мати місце у розривах, отворах в тракці теплоносія, а також, за деяких обставин, і у внутрішніх системах тракту. Виникнення запирання потоку веде до зміни граничних умов в області течії, а також вимагає окремого методу для розрахунку критичної витрати теплоносія.

Для того щоб з'ясувати суть явища запирання потоку, розглянемо класичну задачу про нестационарну баротропну течію ідеального газу, досліджену Ріманом.

Рівняння руху записуються з використанням функції тиску Π :

$$\Pi = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho(P)a(P)}, \quad (8.1)$$

де $a^2 = \frac{dP}{d\rho}$ – місцева швидкість звуку, і мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + a \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial t} + a \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Почленним додаванням та відніманням рівнянь ця система перетворюється до вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Pi + v_x) + (v_x + a) \frac{\partial}{\partial x}(\Pi + v_x) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\Pi - v_x) + (v_x - a) \frac{\partial}{\partial x}(\Pi - v_x) = 0. \end{cases}\tag{8.3}$$

У лівих частинах стоять індивідуальні (повні) похідні по часу: у першому рівнянні від величини $\Pi + v_x$, пов'язаної з точкою, що рухається вздовж осі Ox зі швидкістю $v_x + a$, у другому рівнянні – від величини $\Pi - v_x$, пов'язаної з точкою, що рухається зі швидкістю $v_x - a$. Рівність цих похідних нулеві говорить про збереження величини $\Pi + v_x$ у точці, що рухається зі швидкістю $v_x + a$ і величини $\Pi - v_x$ у точці, що рухається зі швидкістю $v_x - a$.

Величини

$$r = \Pi + v_x, \quad s = \Pi - v_x\tag{8.4}$$

називаються *інваріантами Рімана*.

Інваріанти Рімана можуть інтерпретуватися як дві сім'ї плоских хвиль, що розповсюджуються вздовж осі Ox . Абсолютна швидкість розповсюдження хвиль першої сім'ї:

$$\frac{dx}{dt} = v_x + a, \quad (8.5)$$

а другої сім'ї:

$$\frac{dx}{dt} = v_x - a. \quad (8.6)$$

Звідси, припускаючи $v_x > 0$, випливає, що хвилі першої сім'ї у своєму відносному русі по газу розповсюджуються у той самий бік, що і газ (вниз за потоком), а другої сім'ї – навпаки, вгору за потоком. Відносна швидкість розповсюдження хвиль першої та другої сім'ї по газу становить $\pm a$, відповідно. Розглянемо процес витікання газу через отвір, що супроводжується зниженням тиску на виході.

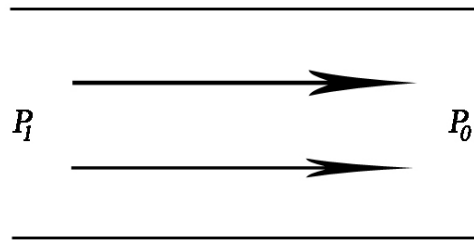


Рис.8.1. До визначення явища запирання потоку.

Така ситуація може виникнути, наприклад, внаслідок розриву трубопроводу. Якщо різниця тисків $P_1 - P_0$ збільшується внаслідок зниження P_0 , масова витрата газу зростає. Це є наслідком того, що збурення, які виникають під час зниження P_0 , передаються разом із хвилями другої сім'ї вгору за потоком з абсолютною швидкістю $v_x - a$. Якщо швидкість потоку збільшиться до значення місцевої швидкості звуку $v_x = a$, ці збурення не будуть надходити до області, розташованої вище вихідного перерізу, бо абсолютна

швидкість руху хвиль другої сім'ї буде нульовою, а отже виникне запирання потоку. Подальше зниження тиску на виході не буде впливати на параметри вгору за потоком.

Таким чином, фундаментальною причиною запирання є нерозповсюдження збурень тиску вгору за потоком, що відбувається, коли місцева швидкість звуку не перевищує швидкості потоку.

Модель запирання потоку коду RELAP5 базується на математичному визначенні явища, що впливає з характеристичного аналізу системи рівнянь теплогідравліки.

Розглянемо квазілінійну систему з n диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку:

$$A(\vec{U}) \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + B(\vec{U}) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + C(\vec{U}) = 0, \quad (8.7)$$

де $\vec{U}$ – вектор невідомих функцій, A, B – матриці коефіцієнтів, C – вектор правих частин.

Характеристичні напрями (характеристичні швидкості) цієї системи співпадають з коренями характеристичного многочлена:

$$|B - \lambda A| = 0 \quad (8.8)$$

Для коренів цього рівняння $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ одержимо рівняння характеристик, аналогічні (8.5) та (8.6):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad (8.9)$$

Для гіперболічної системи, яка характеризується тим, що всі λ_i дійсні, збурення розповсюджується тільки вздовж характеристик – кривих, диференціальні рівняння яких мають вигляд (8.9). Це накладає обмеження на кількість граничних умов, що задаються у точках границі області розв'язання задачі: у точці на границі

потрібно задати стільки граничних умов, скільки є характеристик, що проходять через цю точку і йдуть всередину області розв'язання. Вигляд граничних умов повинен забезпечувати визначення відповідних інваріантів Рімана.

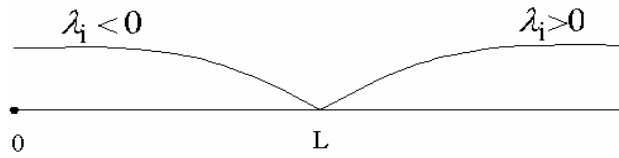


Рис. 8.2 Характеристики, що виходять з точок границі області розв'язання.

Як приклад розглянемо систему (8.7) в області $0 \leq x \leq L$ (рис.8.2) і проаналізуємо граничні умови при $x = L$. Якщо система гіперболічна і існують значення $\lambda_i < 0$, то існують характеристики, що виходять з точки $x = L$ і направлені всередину області, отже при $x = L$ потрібно задати стільки умов, скільки значень $\lambda_i < 0$.

Якщо ж всі $\lambda_i \geq 0$, в точці $x = L$ граничні умови задавати не треба, оскільки вони не вплинуть на розв'язок в області $0 \leq x \leq L$.

Запирання існує тоді, коли жодна інформація не може розповсюдитися в область розв'язання з областей вниз за потоком. Для $x = L$ ця умова виражається так:

$$\lambda_j = 0 \quad \text{для деякого } j \leq n,$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{для всіх } i \neq j.$$

(8.10)

Умови запирання або умови критичності потоку (8.10) являють собою математичні умови, виконання яких для рівнянь руху свідчить про припинення впливу зниження тиску у перерізі вниз за потоком на масову витрату.

У випадках двофазних потоків дослідження явища запирання значно ускладнюється, однак ґрунтується на викладеному вище підході. Спрощення аналізу умов критичності може бути досягнуто

за рахунок зменшення порядку системи рівнянь моделі. При цьому можливі два різних припущення: а) фази знаходяться в термодинамічній рівновазі, б) фази не взаємодіють між собою (“заморожений” потік). Як стверджується в [10], припущення про термодинамічну рівновагу фаз дає результати, що краще узгоджуються з експериментальними даними. Отже, модель запирання потоку коду RELAP5 базується на припущенні про термодинамічну рівновагу фаз.

8.1.1 Критерій запирання для негетерогенного рівноважного двофазного потоку.

Система рівнянь, що описує потік у стані термодинамічної рівноваги ($T_g = T_f = T^s$), складається з загального рівняння нерозривності, двох рівнянь збереження кількості руху, та рівняння ентропії суміші:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\alpha_g \rho_g + \alpha_f \rho_f)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g + \alpha_f \rho_f v_f)}{\partial x} = 0, \\
& \alpha_g \rho_g \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) + \alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} + \\
& + C \alpha_g \alpha_f \rho \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial v_f}{\partial t} - v_g \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) = 0, \\
& \alpha_f \rho_f \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) + \alpha_f \frac{\partial P}{\partial x} + \\
& + C \alpha_f \alpha_g \rho \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_g \frac{\partial v_f}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial t} - v_f \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(\alpha_g \rho_g S_g + \alpha_f \rho_f S_f)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g S_g v_g + \alpha_f \rho_f S_f v_f)}{\partial x} = 0.
\end{aligned}
\tag{8.11}$$

Рівняння збереження кількості руху (8.11) включають сили, пов'язані з ефектом приєднаних мас, оскільки відповідні члени визначаються похідними від швидкості, а отже, по аналогії з (8.2), відповідають за розповсюдження малих збурень. Рівняння енергії виражає умову збереження ентропії суміші для адіабатичної течії (дисипацією енергії нехтують). Оскільки вектор правих частин ($C(\vec{U})$ у (8.7)) не бере участі у характеристичному аналізі, в (8.11) опущені члени, пов'язані з міжфазним тертям, тертям на стінці, теплообміном. Відмітимо, що форма (8.11) збігається з (8.7).

У випадку термодинамічної рівноваги густини і ентропії фаз ρ_g, ρ_f, S_g, S_f є відомими функціями тиску, оскільки газ та рідина

знаходяться на лінії насичення. Позначимо похідні цих величин зірочками:

$$\rho_f^* = \frac{\partial \rho_f^s}{\partial P}, \quad \rho_g^* = \frac{\partial \rho_g^s}{\partial P}, \quad S_f^* = \frac{\partial S_f^s}{\partial P}, \quad S_g^* = \frac{\partial S_g^s}{\partial P} \quad (8.12)$$

Таким чином, в систему (8.11) входять чотири незалежних невідомих величини: α_g, P, v_g, v_f . Записавши систему (8.11) у вигляді (8.7) і розв'язавши характеристичне рівняння (8.8) (рівняння четвертого порядку відносно λ) знайдемо чотири корені характеристичного многочлена. Перші два можуть бути подані у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & \left(\left(\alpha_f \rho_g + \frac{\rho C}{2} \pm \left[\left(\frac{\rho C}{2} \right)^2 - \alpha_g \alpha_f \rho_g \rho_f \right]^{\frac{1}{2}} \right) v_g + \right. \\ & \left. + \left(\alpha_g \rho_f + \frac{\rho C}{2} \mp \left[\left(\frac{\rho C}{2} \right)^2 - \alpha_g \alpha_f \rho_g \rho_f \right]^{\frac{1}{2}} \right) v_f \right) \\ & + \frac{\quad}{\left(\alpha_f \rho_g + \frac{\rho C}{2} \right) + \left(\alpha_g \rho_f + \frac{\rho C}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Ці два значення є наближеними, одержаними після відкидання членів 4-ого порядку відносно $(\lambda - v_f)$ і $(\lambda - v_g)$ у порівнянні з другими степенями цих різниць. Два перших характеристичних напрямки визначаються конвективним переносом тепла у двофазному потоці. Як випливає з (8.13) абсолютні значення $\lambda_{1,2}$

мають порядок v_g і v_f . Значення $\lambda_{1,2}$ можуть бути дійсними або комплексними, в залежності від знаку

$$\frac{\rho C}{2} \pm \left[\left(\frac{\rho C}{2} \right)^2 - \alpha_g \alpha_f \rho_g \rho_f \right].$$

Два корені, що залишилися, визначаються також наближено, нехтуючи членами 2-го і вищих порядків відносно різниці $(v_g - v_f)$ і мають вигляд:

$$\lambda_{3,4} = v + D(v_g - v_f) \pm a, \quad (8.14)$$

де

$$v = \frac{\alpha_g \rho_g v_g + \alpha_f \rho_f v_f}{\rho}, \quad a = a_{HE} \left[\frac{C \rho^2 + \rho(\alpha_g \rho_f + \alpha_f \rho_g)}{C \rho^2 + \rho_f \rho_g} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$D = 0.5 \left[\frac{(\alpha_g \rho_f - \alpha_f \rho_g)}{(\rho C + \alpha_f \rho_g + \alpha_g \rho_f)} + \frac{\rho_g \rho_f (\alpha_f \rho_f - \alpha_g \rho_g)}{\rho(\rho_g \rho_f + C \rho^2)} - \right.$$

$$\left. - a_{HE}^2 \frac{\rho(\alpha_g \rho_g^2 S_g^* + \alpha_f \rho_f^2 S_f^*)}{\rho_g \rho_f (S_g - S_f)} \right]. \quad (8.15)$$

В формулах (8.15) a_{HE} являє собою швидкість звуку, визначену для гомогенного рівноважного потоку. Корені $\lambda_{3,4}$ можуть бути лише дійсними.

Як було з'ясовано раніше, швидкість розповсюдження малих збурень пов'язана зі значеннями характеристичних коренів. У

загальному випадку швидкість розповсюдження визначається дійсною частиною кореня, а інтенсивність зростання або згасання збурень – уявною частиною. Запирання потоку відбувається тоді, коли збурення, що розповсюджується з максимальною швидкістю відносно двофазної рідини в напрямку вгору за потоком має нульову абсолютну швидкість розповсюдження. Вказана умова запирання потоку може бути записана у вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_j^R &= 0 \quad \text{для деякого } j \leq 4, \\ \lambda_i^R &\geq 0 \quad \text{для всіх } i \neq j.\end{aligned}\tag{8.16}$$

Існування комплексних коренів $\lambda_{1,2}$ робить задачу некоректною, оскільки система втрачає гіперболічність. Перехід гіперболічної нестационарної системи диференціальних рівнянь до еліптичної, означає, що теперешній стан системи залежить від майбутнього. З точки зору математики, поява комплексних характеристичних коренів призводить до необмеженого зростання конвективних збурень, а отже до нестійкості системи і некоректності постановки задачі Коші. Ця проблема усувається за допомогою додавання будь-якого, як завгодно малого члена другого порядку, пов'язаного з ефектом в'язкості. Додавання в'язких членів призводить до виникнення необмежених характеристичних швидкостей. Однак, можна показати [10], що лише незначна частина інформації розповсюджується вздовж цих характеристик, в той час, як розповсюдження основної її частини визначається характеристиками системи 1-го порядку. Таким чином, некоректність задачі Коші для системи (8.11) може бути усунена за допомогою додавання малого члена 2-го порядку, а критерій запирання може бути одержаний з аналізу (8.16). Зауважимо, що для гіперболічних систем (8.11) справедливо $v_f < \lambda_{1,2} < v_g$ або $v_g < \lambda_{1,2} < v_f$, отже, ці корені не можуть бути відповідальні за

запирання, тому разом з (8.16) слід аналізувати $\lambda_{3,4}$. Критерій запирання, таким чином, має вигляд:

$$v + D(v_g - v_f) = \pm a. \quad (8.17)$$

Критерій (8.18) можна переписати у термінах середнього та відносного чисел Маха:

$$M_v + DM_r = \pm 1, \quad (8.18)$$

$$M_v = \frac{v}{a}, \quad M_r = \frac{v_g - v_f}{a}. \quad (8.19)$$

В критерій запирання входять два параметри: D та a . З дослідження впливу інших параметрів двофазного потоку на D та a випливає важливий висновок про значний вплив значення коефіцієнту приєднаних мас C на умови реалізації явища запирання потоку у двофазній рідині [10]. Значення коефіцієнту приєднаних мас суттєво залежить від режиму потоку, так для стратифікованої рівноважної течії $C = 0$, для дисперсної рівноважної течії $C = 0.5$, і $C = \infty$ для гомогенного рівноважного потоку. Тому в коді RELAP5 в якості критерія запирання виступає модифікована умова (8.18), отримана після виконання граничних переходів $C \rightarrow 0$ (стратифікована рівноважна течія) в лівій частині (8.18) і $C \rightarrow \infty$ (гомогенна рівноважна течія) в правій частині. Модифікований критерій, правомочність використання якого підтверджена численними розрахунками, має вигляд:

$$\frac{\alpha_g \rho_f v_g + \alpha_f \rho_g v_f}{\alpha_g \rho_f + \alpha_f \rho_g} = \pm a_{HE}. \quad (8.20)$$

8.1.2 Критерій запирання для недогрітої рідини.

В рамках проведеного вище аналізу припускалося, що скрізь у області, що досліджується, потік теплоносія є двофазним. Однак на ранніх стадіях розвитку аварії, пов'язаної з витіком теплоносія, потік, що досягає місця розриву, утворює недогріта рідина. Для більшості умов, що мають практичний інтерес, потік стає двофазним саме у місці витіку. При цьому перехід від однофазної до двофазної течії супроводжується стрибкоподібною зміною всіх основних параметрів потоку, включаючи і швидкість звуку, яка при переході від потоку рідини до двофазного потоку при тиску 600 КПа зменшується приблизно у 340 разів (при переході від потоку газу до двофазного потоку відношення швидкостей звуку має порядок одиниці) [10].

Розглянемо течію через профільоване сопло, з'єднане з баком з недогрітою рідиною під високим тиском. Для проведення аналізу використаємо модель рівноважного гомогенного потоку.

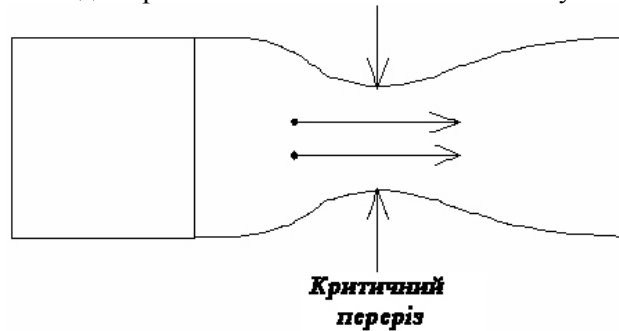


Рис.8.3 Витікання недогрітої рідини через сопло.

Якщо тиск на виході з сопла ненабагато нижчий за тиск на вході, режим однофазної течії недогрітої рідини займає все сопло (тобто фазового переходу не відбувається). З рівняння Бернуллі випливає, що тиск буде мінімальним у тому перерізі, де максимальна швидкість, тобто у *критичному перерізі*. В процесі зниження тиску на виході тиск у критичному перерізі також буде знижуватися і, в решті решт, прийме значення тиску насичення, P_{sat} . При

подальшому зниженні тиску на виході у критичному перерізі починається пароутворення. При цьому відбувається різке зниження швидкості звуку в потоці. Однак з міркувань неперервності впливає, що у точці зародження парової фази (дуже малий об'ємний вміст пари), швидкість двофазної суміші v_t (індекс “t” позначає параметри, які відносяться до критичного перерізу) дуже слабо відрізняється від швидкості недогрітої рідини трохи вище критичного перерізу. Звідси приходимо до висновку, що у рамках прийнятої моделі v_t для недогрітої рідини буде менше швидкості звуку, в той час як для двофазної рідини v_t може бути вже більше відповідної швидкості звуку, внаслідок її стрімкого зменшення. Таким чином, потік недогрітої однофазної рідини характеризується поблизу критичного перерізу числом Маха меншим 1 ($M < 1$), в той час, як двофазний потік буде мати число Маха, більше за одиницю ($M > 1$).

За таких умов збурення тиску на виході вже не будуть розповсюджуватися вгору за потоком, тобто виникне запирання потоку (рис. 8.4 випадок (a)). Зауважимо, що на відміну від однофазного потоку, для розглянутого випадку початку пароутворення у критичному перерізі не існує точки, де $M = 1$, що пов'язано із стрибкоподібною зміною швидкості звуку у рамках гомогенної рівноважної моделі.

Масова витрата, що відповідає запиранню потоку, визначається з рівняння Бернуллі: $\frac{1}{2} \rho (v_t^2 - v_{up}^2) = P_{up} - P_{sat}$. При подальшому зменшенні тиску на виході не відбувається зростання швидкості в критичному перерізі v_t , якщо умови на вході незмінні.

Тепер розглянемо процес, у якому вже відбулося запирання потоку недогрітої рідини (при дуже низькому тиску на виході) і тиск на вході P_{up} знижується (рис. 8.4., випадки (b) і (c)). На першому етапі зниження тиску на вході, тиск у критичному перерізі буде лишатися рівним тиску насичення, отже з рівняння Бернуллі ми

будемо отримувати менші значення v_t . В процесі зниження тиску на вході P_{up} настане момент, коли швидкість двофазної суміші у критичному перерізі знизиться до гомогенної рівноважної швидкості звуку $v_t = a_{HE}$ і $M = 1$ (критичний переріз відноситься до області двофазного потоку, вище від нього за потоком, в області недогрітої рідини, число Маха набагато менше одиниці, див. рис. 8.4.(b)).

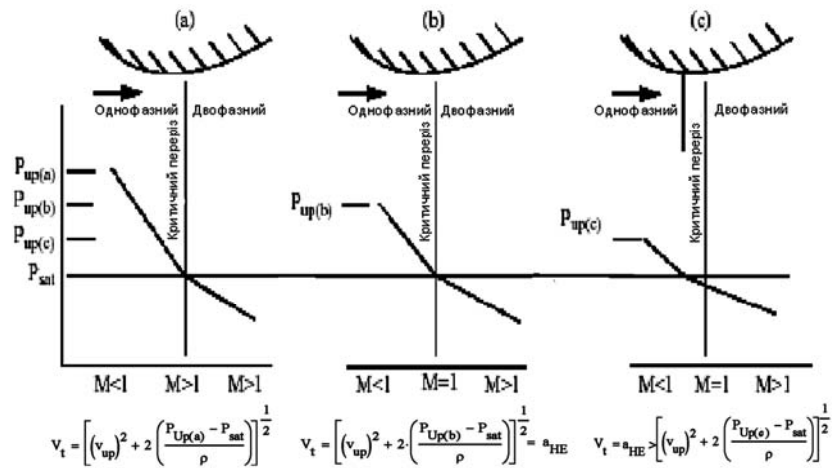


Рис. 8.4. Запирання потоку недогрітої рідини.

Подальше зниження тиску на вході призведе до руху точки, де тиск рівний тиску насичення $P = P_{sat}$, вгору за потоком. Дійсно, швидкість у перерізі, де відбувається фазовий перехід буде

дорівнювати $\left[v_{up}^2 + 2 \frac{P_{up} - P_{sat}}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}$ і якщо у випадку (b), вона

була рівна швидкості звуку, то при подальшому зниженні P_{up} буде менше швидкості звуку, тобто точка фазового переходу буде

рухатись вгору за потоком. При цьому, у перерізі з $P = P_{sat}$ швидкість нагрітої рідини менше швидкості звуку двофазного потоку і течія дозвукова, отже в області двофазного потоку, між перерізом, що характеризується тиском насичення $P = P_{sat}$ і критичним перерізом, двофазний потік буде дозвуковим (рис. 8.4, випадок (с), перехід через швидкість звуку відбувається у критичному перерізі). При подальшому зниженні P_{up} , точка P_{sat} буде рухатись вище доти, доки течія не стане повністю двофазною.

Така схема фазового переходу, що дається гомогенною рівноважною моделлю, добре описує реальні процеси. Проте, нерівноважність потоку може привести до появи в критичному перерізі перегрітої рідини, що знаходиться під тиском P_t , набагато меншим за тиск насичення P_{sat} . У цьому випадку початок пароутворення хоча і відбувається у критичному перерізі, але при тиску, меншому за тиск насичення: $P_t < P_{sat}$.

Для визначення тиску P_t вскипання теплоносія в нерівноважних умовах в коді RELAP5 прийнято кореляцію:

$$P_{sat} - P_t = \max(\Delta P, 0), \quad (8.21)$$

де

$$\Delta P = 0.258 \sigma^{\frac{3}{2}} T_R^{13.76} \frac{\left(1 + 13.25 R \Sigma'^{0.8}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(k_B T_c\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{V_f}{V_g}\right)} - 0.069984 \left(\frac{A_t}{A}\right)^2 \left(\rho v_c^2\right). \quad (8.22)$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу, k_B – постійна Больцмана, R – радіус труби, $T_R = \frac{T}{T_c}$, T_c – критична температура теплоносія, v_c - критична швидкість, Σ' – швидкість спадання тиску, яка має такий вигляд:

$$\Sigma' = \frac{\rho v_c}{A_t} \left(\frac{dA}{dx} \right)_t, \quad (8.23)$$

де $\left(\frac{dA}{dx} \right)_t$ - швидкість зміни площі поперечного перерізу в аксіальному напрямі, яка оцінюється за рахунок осереднення між центром об'єму, розташованого вгору за потоком та критичним перерізом. Перший доданок (8.22) пов'язаний з спаданням тиску, другий враховує турбулентні ефекти.

Таким чином, можемо стверджувати, що фазовий перехід відбувається у критичному перерізі або вище нього за потоком і відповідає певному мінімальному перепаду тиску (різному для трьох розглянутих випадків):

$$\Delta P_{\min} = P_{up} - P_t, \quad (8.24)$$

де P_t - тиск у критичному перерізі, що визначається з (8.22). Умова запирання потоку недогрітої рідини має вигляд:

$$\Delta P > \Delta P_{\min}. \quad (8.25)$$

Умову (8.25) можна переписати в термінах критичної швидкості v_c . Для цього використаємо рівняння Бернуллі, яке за умов нестисливості рідини і відсутності сил тертя має вигляд:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho (v_t^2 - v_{up}^2),$$

де v_t - швидкість в критичному перерізі, v_{up} - швидкість в об'ємі, розташованому вище за потоком по відношенню до з'єднання, для якого перевіряється умова запирання.

Умова запирання потоку записується таким чином:

$$v_t > v_c,$$

де

$$v_c = \left[v_{up}^2 + 2 \left(\frac{P_{up} - P_t}{\rho} \right) \right], \quad (8.26)$$

P_t визначається за (8.21)-(8.22).

Критичну швидкість (8.26) слід розглядати як мінімальну швидкість у критичному перерізі, що відповідає запиранню потоку. У випадку (а) вона буде більше швидкості звука, тоді як у випадках (в) та (с) дорівнюватиме їй:

$$v_c = a_{HE}. \quad (8.27)$$

Для визначення ситуації, яка реалізується, використовується максимум з (8.26), (8.27). Таким чином, критична швидкість, що визначає умову запирання потоку недогрітої рідини, має вигляд:

$$v_c = \max \left\{ \left[v_{up}^2 + 2 \left(\frac{P_{up} - P_t}{\rho} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, a_{HE} \right\}, \quad (8.28)$$

Рівноважна гомогенна швидкість звуку a_{HE} обчислюється за термодинамічними параметрами потоку у критичному перерізі (див. розділ 9).

8.1.3 Реалізація моделі запирання потоку в коді RELAP 5

При дослідженні явища запирання для двофазного потоку вважається, що запирання відбувається у найвужчому перерізі каналу, який зветься критичним. Встановлення можливості запирання в коді RELAP5 здійснюється за двома тестами: тестом по швидкості (рівняння (8.20)), завдяки якому з'ясовується, чи призводять гідродинамічні умови до виникнення запирання, та тестом по тиску, в якому, виходячи з рівнянь збереження кількості руху, визначається перепад тиску між центром об'єму вгору за потоком і критичним перерізом і з'ясовується, чи достатній він для підтримання умов запирання (умова (8.25)). Хоча з теоретичної точки зору для виникнення запирання необхідно, щоб швидкість потоку перевищувала швидкість звуку, а падіння тиску перевищувало мінімально допустиме, в RELAP5 умова запирання фіксується при позитивній відповіді за будь-яким з двох тестів. Це робиться для того, щоб уникнути коливання чисельного розв'язку на межі між дозвуковою і надзвуковою течією.

Критерій запирання перевіряється на кожному кроці за часом і для кожного з'єднання, де існує двофазна течія. Для обчислення швидкості звуку в (8.20) застосовується така апроксимація:

$$a_{HE,j}^{n+1} = a_{HE,j}^n + \left(\frac{\partial a_{HE}}{\partial P} \right)_j^n (P_K^{n+1} - P_K^n), \quad (8.29)$$

де індекс "К" характеризує об'єм, розташований за потоком вище, ніж дане з'єднання, індекс "j" характеризує параметри у з'єднанні.

У випадку запирання потоку градієнт тиску не здійснює впливу на витрату теплоносія через з'єднання. Натомість значення швидкостей фаз у з'єднанні пов'язані залежністю (8.20), в якій як швидкість звуку використовується або критична швидкість v_c (8.26)

(для недогрітої рідини), або, гомогенна рівноважна швидкість звуку (a_{HE}). Таким чином, замість рівняння суми збереження кількості руху, до якого входить градієнт тиску, разом з рівнянням різниці кількості руху для обчислення швидкостей фаз у з'єднанні використовується рівняння (8.20).

Оскільки існує істотна відмінність між критичною швидкістю для недогрітої рідини ($\dot{\alpha}_{g,j} < 10^{-5}$) і для двофазної рідини ($\dot{\alpha}_{g,j} > 0.1$), щоб уникнути суттєвого зменшення кроку за часом при переході від течії недогрітої рідини до двофазної течії, вводиться перехідний режим, що характерний вмістом пари $10^{-5} \leq \dot{\alpha}_{g,j} \leq 0.10$, на якому відбувається інтерполяція між двома основними режимами. Критична швидкість для потоку недогрітої рідини обчислюється за (8.26), використовуючи $\alpha_g = 1.0 \times 10^{-5}$, в той час, як критична швидкість в двофазному потоці (швидкість звуку) обчислюється на основі термодинамічних співвідношень, записаних для гомогенної рівноважної моделі при $\alpha_g = 0.10$.

Якщо запирання відбулося і потік є критичним, рівняння (8.20), (8.29) використовуються разом зі скінченно-різницевою формою рівняння різниці збереження кількості руху для визначення швидкостей $v_{g,j}^{n+1}, v_{f,j}^{n+1}$ через тиск P_K^{n+1} , отже рівняння (8.20) заміщує рівняння суми збереження кількості руху. Такий підхід дозволяє забезпечити коректність розрахунку масової витрати теплоносія через з'єднання, в якому відбулося запирання потоку.

8.2 Модель просочування газу або протікання рідини через отвір у стінці труби при розшарованій течії.

Як впливає з проведеного в розділі 7 розгляду алгоритмів чисельного розв'язання задач теплогідравліки, у межах кожного контрольного об'єму рідина вважається гомогенно перемішаною.

Специфіка течії та взаємодія фаз враховуються у замикаючих співвідношеннях. Це припущення призводить до невірної розрахунку об'ємного вмісту пари і, як наслідок, інших властивостей потоку, при витіканні теплоносія через невеликий отвір або відвід у стінці труби з розшарованою течією.

Розглянемо велику горизонтальну трубу з розшарованим потоком. В умовах горизонтально розшарованого потоку об'ємний вміст пари у малому відводі (що моделюється як з'єднання) може відрізнятись від середнього об'ємного вмісту пари у об'ємі, розташованому вгору за потоком, тому звичайна донорна схема обчислення вмісту пари у з'єднанні вже неприйнятна. Властивості потоку теплоносія через відвід залежать від положення рівня розшарування у трубі по відношенню до положення отвору у стінці.

А. Відвід в нижній частині труби



В. Відвід в верхній частині труби



С. Відвід на бічній поверхні труби

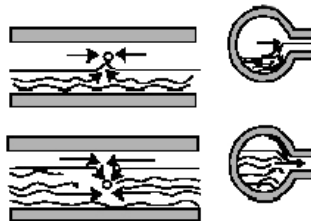


Рис.8.5. Просочування газу або протікання рідини через малі отвори при розшарованій течії

Якщо відвід розташований в нижній частині труби (рис.8.5А), через нього буде витікати тільки рідина доти, доки рівень не знизиться настільки, що до отвору почне просочуватись газ, що відобразиться на вмісті пари в потоці, який витікає через відвід. Якщо проігнорувати розшарування, то буде вважатися, що газ потрапляє до відводу завжди, незалежно від положення рівня розшарування. Аналогічно, у випадку розташування отвору в

верхній частині труби (рис. 8.5В), через нього буде витікати тільки газ, до тих пір, поки рівень рідини не підніметься настільки, що до відводу буде потрапляти і рідина. Якщо знову проігнорувати розшарування, буде вважатися, що рідина потрапляє туди завжди незалежно від положення рівня розшарування. Нарешті, якщо відвід розташований на бічній поверхні труби (рис.8.5С), відбувається той самий процес в залежності від положення рівня розшарування по відношенню до отвору.

Модель просочування газу або протікання рідини через малі отвори в трубах при розширеній течії враховує явище розшарування потоку та обчислює потік маси та енергії через отвір у випадку розшарування. В результаті проведення експериментів було встановлено [10], що максимальна відстань між отвором та рівнем розшарування, при якій починається просочування газу або протікання рідини визначається формулою:

$$h_b = \frac{KW_k^{0.4}}{\left[g\rho_k(\rho_f - \rho_g) \right]^{0.2}}, \quad (8.30)$$

де h_b – відстань між рівнем розшарування потоку та отвором, при якій починається явище просочування газу або протікання рідини, W_k – масова витрата неперервної фази k (тобто тієї фази, яка витікала до початку просочування іншої) через отвір, ρ_k – густина неперервної фази в отворі, K – константа, що визначається таким чином: для отвору, розташованого в верхній частині труби $K=1.67$, для отвору, розташованого в нижній частині $K=1.50$, для отвору, розташованого на бічній поверхні, у випадку просочування газу (неперервна фаза – рідина) $K=0.75$, у випадку протікання рідини (неперервна фаза – газ) $K=0.69$.

Якщо рівень розшарування потоку віддалений від отвору менше ніж на h_b , застосовується такий набір кореляцій для обчислення масового вмісту пари X .

Для отвору, розташованого в верхній частині труби:

$$X = R^{3.25(1-R)^2}, \quad (8.31)$$

де $R = \frac{h}{h_b}$; h – відстань від рівня розшарування до отвору.

Для отвору, розташованого в нижній частині труби:

$$X = X_0^{2.5R} \left[1 - 0.5R(1+R)X_0^{1-R} \right]^{0.5}, \quad (8.32)$$

$$X_0 = 1.15 / \left(1 + \left(\frac{\rho_f}{\rho_g} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (8.33)$$

Для отвору, розташованого на бічній поверхні труби:

$$X = X_0^{1+CR} \left[1 - 0.5R(1+R)X_0^{1-R} \right]^{0.5}, \quad (8.34)$$

де X_0 дається формулою (8.33), $C = 1.09$ для просочування газу, і $C = 1.00$ для протікання рідини.

Для вертикальних об'ємів з отворами на бічній поверхні труби застосовуються ті самі кореляції, що і для горизонтальних, лише основна координата X змінює горизонтальний напрям на вертикальний. Позначення з'єднання, для якого підключається дана модель, має вигляд "side offtake".

8.3 Різка зміна площі поперечного перерізу каналу

В рівняння суми та різниці збереження кількості руху входять члени HLOSSF і HLOSSG, пов'язані з втратами тиску в ділянках складної геометрії. Вказані втрати визначаються двома коефіцієнтами (інша назва яких – *місцеві або гідравлічні опори*): коефіцієнтом втрат, що вводиться користувачем і коефіцієнтом

втратах, що виникають в ділянках з різкою зміною площі поперечного перерізу каналу. Останній коефіцієнт розраховується автоматично кодом RELAP5 на основі моделі, що описана нижче.

8.3.1 Гіпотези, покладені в основу моделі.

Основним припущенням, що використовується для розрахунку нестационарного потоку з точками різкої зміни площі поперечного перерізу є можливість апроксимації нестационарного процесу проходження теплоносія через ділянку різкого звуження (розширення) квазістационарним процесом, якому в кожен момент часу задовольняють умови вгору і вниз за потоком по відношенню до точки різкої зміни площі поперечного перерізу. Однак течія вгору і вниз за потоком від вказаної ділянки вважається повністю нестационарною. Існує кілька підстав для такого припущення. По-перше, кореляції, що служать для визначення втрат тиску, пов'язаних із проходженням ділянки з різкою зміною площі поперечного перерізу, оснований на даних, отриманих для стаціонарних процесів, в той же час, як стверджується в [10], вони придатні і для опису процесів нестационарних. По-друге, об'єм рідини на ділянці різкої зміни площі досить малий у порівнянні з відповідними об'ємами вгору та вниз за потоком, тому ефекти нестационарності зміни маси, енергії, а також впливу сил інерції доцільно зосередити у об'ємах вгору та вниз за потоком.

Відзначимо, що для стаціонарного потоку однофазної нестисливої рідини втрати при різкій зміні площі поперечного перерізу моделюються внесенням до рівняння Бернуллі відповідних втрат динамічного напору h_L :

$$\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right)_1 = \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right)_2 + h_L,$$

$$h_L = \frac{1}{2} K v^2.$$

(8.35)

8.3.1.1 Різке розширення поперечного перерізу каналу для однофазного потоку

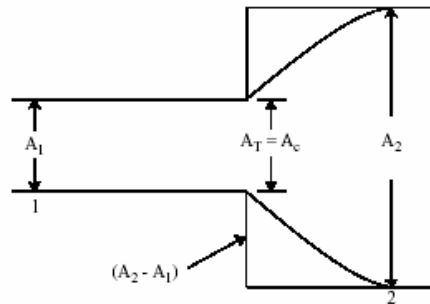


Рис. 8.6. Випадок різкого розширення поперечного перерізу каналу. Однофазний потік.

Розглянемо стаціонарний потік нестисливої рідини при різкому розширенні площі поперечного перерізу (рис.8.6). Реальна конфігурація каналу відповідає прямолінійним границям. Припускається, що рідина тече зліва направо, індекс 1 відноситься до умов вгору за потоком, індекс 2 – вниз за потоком. Різке розширення потоку призводить до того, що течія з одновимірної стає двовимірною внаслідок виникнення поперечних струменів, які затухають при віддаленні від точки різкої зміни поперечного перерізу. Умови вгору та вниз за потоком записуються досить далеко від точки розширення, тобто там, де течію можна вважати одновимірною. Проте, при моделюванні втрат гідродинамічного тиску зміна параметрів потоку при проходженні через ділянку різкого розширення виражається умовами стрибка (типу (8.35)), в яких перерізи, позначені індексами 1 і 2, вважаються розташованими зразу ж вгору і вниз за потоком від точки розширення. При цьому, приймаючи припущення, що в області, позначеній на рис. 8.6 як $(A_2 - A_1)$ діє тиск P_1 , з умов збереження кількості руху і моделі Борда-Карно отримують такий вираз для h_L [10]:

$$h_L = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right)^2 v_2^2. \quad (8.36)$$

Використовуючи позначення $\varepsilon = \frac{A_2}{A_1}$, втрати гідродинамічного тиску, пов'язані з різким розширенням каналу, виражаються таким чином:

$$\Delta P_f = \rho h_L = \frac{1}{2} \rho (1 - \varepsilon)^2 v_2^2. \quad (8.37)$$

8.3.1.2 Різде звуження поперечного перерізу каналу для однофазного потоку

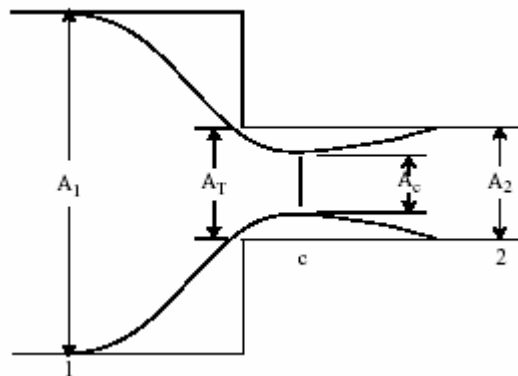


Рис.8.7. Випадок різкого звуження поперечного перерізу каналу. Однофазний потік.

Розглянемо течію з різким звуженням поперечного перерізу каналу (рис.8.7). Як впливає з експерименту, після проходження ділянки різкого звуження, рідина продовжує звужуватися далі в

процесі так званої течії у “вени”. Мінімальна площа перерізу “вени” на рис. 8.7 позначена A_c .

Швидкість у мінімальному перерізі “вени” v_c , як це впливає з умов збереження кількості руху і моделі Борда-Карно, визначає втрати тиску, тобто:

$$\Delta P_f = \frac{1}{2} \rho \left(1 - \frac{A_c}{A_2} \right)^2 v_c^2. \quad (8.38)$$

Рівняння (8.38) не враховує втрати, пов’язані безпосередньо із звуженням від перерізу вгору по потоку A_1 до мінімального перерізу “вени” A_c (за даними [10] вони складають не більше 24% загальних втрат). Отже, в (8.38) враховані лише втрати, пов’язані з розширенням від A_c до перерізу вгору за потоком A_2 . Швидкість v_c визначається з рівняння неперервності в інтегральній формі, яке для одновимірної течії нестисливої рідини матиме вигляд:

$$v_c = \frac{A_2 v_2}{A_c}. \quad (8.39)$$

Ступінь розширення $\frac{A_c}{A_2}$, природньо, є функцією $\frac{A_2}{A_1}$, яка часто задається таблично. В коді RELAP5 прийнята апроксимація табличних даних рівнянням:

$$\frac{A_c}{A_2} = 0.62 + 0.38 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^3.$$

Об’єднуючи (8.38) та (8.39) одержимо вираз для повних втрат тиску при різкому звуженні поперечного перерізу каналу:

$$\Delta P_f = \frac{1}{2} \rho \left(1 - \frac{A_2}{A_c} \right)^2 v_2^2. \quad (8.40)$$

Перевага (8.40) над (8.38) полягає в тому, що при чисельному розв'язанні визначаються значення швидкостей v_1 і v_2 , а значення v_c - ні.

8.3.1.3 Різка зміна площі поперечного перерізу з отвором.

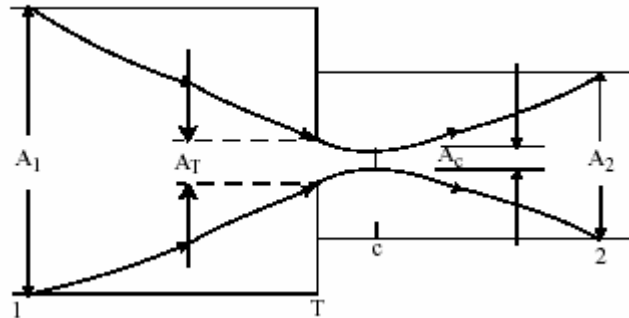


Рис. 8.8. Випадок різкого звуження каналу з отвором.
Однофазний потік.

Розглянемо найбільш загальний випадок різкої зміни площі поперечного перерізу каналу – звуження каналу з отвором (рис.8.8). Умови у критичному перерізі (отворі) позначаються індексом “Т”, його площа A_T . В моделі використовуються три відношення площ: $\varepsilon_c = \frac{A_c}{A_T}$, $\varepsilon_T = \frac{A_T}{A_1}$, $\varepsilon = \frac{A_2}{A_1}$. Так само як і у випадку простого звуження, втрати на звуження до мінімального перерізу

“вени” A_c не враховуються. Втрати, пов’язані з розширенням від A_c до A_2 даються виразом:

$$\Delta P_f = \frac{1}{2} \rho \left(1 - \frac{A_c}{A_2} \right)^2 v_c^2. \quad (8.41)$$

Використовуючи рівняння неперервності отримаємо такі співвідношення між швидкостями та відношеннями площ:

$$v_c = \frac{A_T v_T}{A_c} = \frac{v_T}{\varepsilon_c}, \quad v_T = \frac{A_2 v_2}{A_T} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_T} v_2.$$

За допомогою цих співвідношень перепишемо (8.41) у вигляді:

$$\Delta P_f = \frac{1}{2} \rho \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c \varepsilon_T} \right)^2 v_2^2. \quad (8.42)$$

При цьому відношення ε_c є функцією ε_T :

$$\varepsilon_c = 0.62 + 0.38(\varepsilon_T)^3. \quad (8.43)$$

Зауважимо, що співвідношення (8.42) узагальнює розглянуті вище випадки: для чистого розширення $\varepsilon_T = 1$, $\varepsilon_c = 1$, $\varepsilon > 1$ і для чистого звуження $\varepsilon_T = \varepsilon < 1$ і $\varepsilon_c < 1$.

8.3.2 Моделювання втрат тиску при різкій зміні площі поперечного перерізу для двофазного потоку

Втрати у двофазному потоці моделюються шляхом відповідної модифікації основного рівняння (8.42).

Течія у точках різкої зміни площі припускається квазістаціонарною, а рідина нестисливою. Крім того, у рівняннях руху опускають члени, пов’язані з дією масових сил, тертям на стінці та масообміном. Члени, що відповідають за міжфазне тертя,

зберігаються, оскільки градієнт відносної швидкості фаз в області різкої зміни площі може бути значним.

Для рівнянь збереження кількості руху фаз при вказаних припущеннях та плавній зміні площі поперечного перерізу можуть бути одержані такі інтеграли типу Бернуллі:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \rho_f v_f^2 + P \right)_1 &= \left(\frac{1}{2} \rho_f v_f^2 + P \right)_2 + \left(\frac{FI'}{\alpha_f} \right)_1 (v_{f1} - v_{g1}) L_1 + \\ &+ \left(\frac{FI'}{\alpha_f} \right)_2 (v_{f2} - v_{g2}) L_2 \end{aligned} \quad (8.44)$$

та

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \rho_g v_g^2 + P \right)_1 &= \left(\frac{1}{2} \rho_g v_g^2 + P \right)_2 + \left(\frac{FI'}{\alpha_g} \right)_1 (v_{g1} - v_{f1}) L_1 + \\ &+ \left(\frac{FI'}{\alpha_g} \right)_2 (v_{g2} - v_{f2}) L_2 \end{aligned} \quad (8.45)$$

де L_1, L_2 – відповідно, відстані від перерізу, де задаються умови вгору за потоком, до критичного перерізу та від критичного перерізу до перерізу, де задаються умови вниз за потоком, $FI' = \alpha_f \alpha_g \rho_f \rho_g FI$. Під критичним перерізом у даному випадку слід розуміти просто деякий проміжний переріз між перерізами 1 та 2. Таким чином, міжфазне тертя розподіляється на дві частини, які пов'язані з областями вгору і вниз за потоком від критичного перерізу.

8.3.2.1 Загальна модель

Розглянемо застосування рівнянь (8.44), (8.45) до розрахунку втрат тиску у потоці двофазної рідини з найбільш загальним характером різкої зміни площі поперечного перерізу (різке звуження з отвором, рис.8.9). На рис.8.9 A_T – площа критичного перерізу, що дорівнює площі отвору. При моделюванні втрат тиску припускається, що фази не перемішуються (за міжфазну взаємодію відповідають сили міжфазного тертя) і окремо проходять через ділянку різкої зміни площі при відповідній зміні площі поперечного перерізу від $\alpha_{g1}A_1$ до $\alpha_{g2}A_2$ для газоподібної фази і від $\alpha_{f1}A_1$ до $\alpha_{f2}A_2$ для рідкої фази

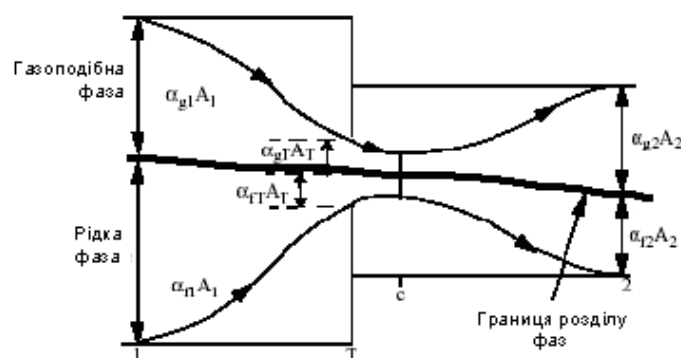


Рис.8.9 Модельна схема двофазної течії в ділянці з різкою зміною площі поперечного перерізу

Тобто загальні втрати тиску дорівнюють сумі втрат, що виникли б у випадку окремого проходження рідкої фази через ділянку від $\alpha_{f1}A_1$ до $\alpha_{f2}A_2$ та газоподібної фази через ділянку від $\alpha_{g1}A_1$

до $\alpha_{g2} A_2$. Втрати, пов'язані з відповідними змінами площ даються (8.42) і додаються до (8.44), (8.45):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \rho_f v_f^2 + P \right)_1 &= \left(\frac{1}{2} \rho_f v_f^2 + P \right)_2 + \frac{1}{2} \rho_f \left(1 - \frac{\alpha_{f2} \varepsilon}{\alpha_{f1} \varepsilon_{fc} \varepsilon_T} \right)^2 (v_{f2})^2 + \\ &+ \left(\frac{FI'}{\alpha_f} \right)_1 (v_{f1} - v_{g1}) L_1 + \left(\frac{FI'}{\alpha_f} \right)_2 (v_{f2} - v_{g2}) L_2, \end{aligned} \quad (8.46)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \rho_g v_g^2 + P \right)_1 &= \left(\frac{1}{2} \rho_g v_g^2 + P \right)_2 + \frac{1}{2} \rho_g \left(1 - \frac{\alpha_{g2} \varepsilon}{\alpha_{g1} \varepsilon_{gc} \varepsilon_T} \right)^2 (v_{g2})^2 + \\ &+ \left(\frac{FI'}{\alpha_g} \right)_1 (v_{g1} - v_{f1}) L_1 + \left(\frac{FI'}{\alpha_g} \right)_2 (v_{g2} - v_{f2}) L_2, \end{aligned} \quad (8.47)$$

де $\varepsilon_{fc}, \varepsilon_{gc}$ - функції відношення площ, зайнятих відповідною фазою у критичному перерізі і у перерізі вгору за потоком, вигляд яких аналогічний (8.43). При цьому замість ε_T використовуються, відповідно, такі відношення площ:

$$\varepsilon_{fT} = \frac{\alpha_{fT}}{\alpha_{f1}} \varepsilon_T, \quad \varepsilon_{gT} = \frac{\alpha_{gT}}{\alpha_{g1}} \varepsilon_T.$$

Відношення площ $\varepsilon = \frac{A_2}{A_1}$, $\varepsilon_T = \frac{A_T}{A_1}$, аналогічні однофазному випадку.

Як вказувалося вище, модель втрат тиску при різкій зміні площі поперечного перерізу каналу застосовується під час визначення

втрат тиску в ділянках складної форми. Введені у скінченно-різницевих рівняннях збереження кількості руху члени $HLOSSG_j^n$, $HLOSSF_j^n$, що відповідають таким втратам, мають вигляд:

$$\begin{aligned} HLOSSG_j^n &= \frac{1}{2}(K_g^n + K_{in})|v_{g,j}^n|, \\ HLOSSF_j^n &= \frac{1}{2}(K_f^n + K_{in})|v_{f,j}^n|, \end{aligned} \quad (8.48)$$

де коефіцієнти K_g, K_f визначаються з рівнянь (8.46)-(8.47) як коефіцієнти при квадратах швидкостей $(v_{g2})^2$, і $(v_{f2})^2$ відповідно:

$$K_g = \left(1 - \frac{\alpha_{g2}\varepsilon}{\alpha_{gT}\varepsilon_{gc}\varepsilon_T}\right)^2, \quad K_f = \left(1 - \frac{\alpha_{f2}\varepsilon}{\alpha_{fT}\varepsilon_{fc}\varepsilon_T}\right)^2.$$

Розрахунок коефіцієнту втрат, що вводиться користувачем K_{in} , обговорюється у підрозділі 8.4.

Урахування ефектів міжфазного тертя є важливим. Якщо члени, що характеризують міжфазне тертя в (8.46)-(8.47), будуть опущені, відносний рух фаз (ковзання) буде розрахований в припущенні чистої роздільної течії, що дасть невірні результати для дисперсних режимів.

8.3.3 Застосування моделі.

У випадку однофазного руху умови вниз за потоком (v_2, P_2) могли бути визначеними, використовуючи рівняння Бернуллі (8.35) та рівняння неперервності. У випадку двофазної течії аналогічним чином використовуються рівняння (8.46)-(8.47) і два рівняння неперервності для фаз. При цьому в двофазному випадку з'являється

додаткове невідоме α_{g2} , що являє собою об'ємний вміст газоподібної фази в перерізі вниз за потоком.

8.3.3.1 Різке розширення.

У цьому випадку справедливі співвідношення $\alpha_{fT} = \alpha_{f1}$, $\alpha_{gT} = \alpha_{g1}$, $\varepsilon > 1$, $\varepsilon_T = 1$,

$\varepsilon_{fc} = \varepsilon_{gc} = 1$, $FI'_1 = 0$, $L_1 = 0$. За таких умов рівняння (8.46)-(8.47) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \rho_f v_f^2 + P \right)_1 &= \left(\frac{1}{2} \rho_f v_f^2 + P \right)_2 + \frac{1}{2} \rho_f \left(1 - \frac{\alpha_{f2} \varepsilon}{\alpha_{f1}} \right)^2 (v_{f2})^2 + \\ &+ \left(\frac{FI'}{\alpha_f} \right)_2 (v_{f2} - v_{g2}) L_2, \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \rho_g v_g^2 + P \right)_1 &= \left(\frac{1}{2} \rho_g v_g^2 + P \right)_2 + \frac{1}{2} \rho_g \left(1 - \frac{\alpha_{g2} \varepsilon}{\alpha_{g1}} \right)^2 (v_{g2})^2 + \\ &+ \left(\frac{FI'}{\alpha_g} \right)_2 (v_{g2} - v_{f2}) L_2. \end{aligned} \quad (8.50)$$

До цих рівнянь потрібно додати рівняння неперервності:

$$\alpha_{f1} v_{f1} A_1 = \alpha_{f2} v_{f2} A_2, \alpha_{g1} v_{g1} A_1 = \alpha_{g2} v_{g2} A_2, \quad (8.51)$$

щоб отримати систему з 4-х рівнянь відносно 4-х невідомих: α_{f2} , v_{f2} , v_{g2} та P_2 (умови вгору за потоком вважаються заданими). У порівнянні з однофазним випадком з'являється додаткове невідоме α_{g2} , що визначається сумісно з

іншими невідомими при розв'язанні системи (8.49)-(8.51) без притягнення додаткових гіпотез. Альтернативним підходом є використання лише рівнянь збереження кількості руху, однак при цьому доводиться вводити додаткові припущення для визначення α_{g2} .

8.3.3.2 Різке звуження.

Розглянемо спочатку процедуру визначення параметрів у критичному перерізі $\alpha_{fT}, v_{fT}, v_{gT}$ та P_T . Для цього служать 4 рівняння:

$$\left(\frac{1}{2}\rho_f v_f^2 + P\right)_1 = \left(\frac{1}{2}\rho_f v_f^2 + P\right)_T + \left(\frac{FI'}{\alpha_f}\right)_1 (v_{f1} - v_{g1})L_1, \quad (8.52)$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho_g v_g^2 + P\right)_1 = \left(\frac{1}{2}\rho_g v_g^2 + P\right)_T + \left(\frac{FI'}{\alpha_g}\right)_1 (v_{g1} - v_{f1})L_1, \quad (8.53)$$

$$\alpha_{f1}v_{f1}A_1 = \alpha_{fT}v_{fT}A_T, \quad \alpha_{g1}v_{g1}A_1 = \alpha_{gT}v_{gT}A_T. \quad (8.54)$$

Умови у критичному перерізі (перерізі мінімальної геометричної площі) дозволяють знайти умови у мінімальному перерізі “вени” A_c , припускаючи $\alpha_{gc} = \alpha_{gT}$ і використовуючи такі залежності для відношень площ (аналогічні (8.43)):

$$\varepsilon_{fc} = 0.62 + 0.38(\varepsilon_{fT}^3), \quad \varepsilon_{gc} = 0.62 + 0.38(\varepsilon_{gT}^3).$$

Для визначення умов вниз за потоком можуть використовуватись загальні рівняння (8.46)–(8.47), при їх застосуванні прямо від перерізу 1 до перерізу 2. Також можуть використовуватись рівняння розширення (8.49)–(8.51), вважаючи початковим перерізом мінімальний переріз “вени”. Зауважимо, що в [10] допущена неточність, оскільки вказано, що при використанні рівнянь (8.49)–

(8.51) початковим перерізом є критичний переріз. Враховуючи описаний розподіл схеми обчислення втрат при звуженні на два етапи, ця схема застосовується точно у такому ж вигляді при обчисленні втрат при різкій зміні площі з отвором.

8.3.3.3 *Моделювання зустрічного потоку*

Попередні результати відносилися до моделювання супутнього потоку. Для зустрічного потоку (противоток), коли фази рухаються в різних напрямках, також застосовуються рівняння (8.46)-(8.47), однак початкові перерізи вгору за потоком (індекс 1) для відповідних фаз розташовані по різні боки від точки різкої зміни площі поперечного перерізу. Визначення параметрів у критичному перерізі відбувається за формулами, аналогічними (8.52)-(8.54), з відповідним записом умов вгору за потоком. Ці чотири рівняння дозволяють визначити невідомі $\alpha_{fT}(\alpha_{gT}), v_{fT}, v_{gT}, P_T$. Далі, визначаючи об'ємні вмісти фаз вниз за потоком, як одиниця мінус об'ємний вміст протилежної фази у тому ж перерізі (для протилежної фази – перерізі вгору за потоком), можемо застосувати рівняння (8.46)-(8.47) з метою визначення втрат тиску для кожної фази.

8.4 Коефіцієнти втрат, що вводяться користувачем.

В коді RELAP 5 втрати тиску, пов'язані з тертям на стінках каналу, обчислюються використовуючи об'ємні вмісти фаз. Такий підхід не завжди дає точні результати. Особливо це стосується ділянок складної геометрії, де втрати, в першу чергу, зумовлені складним неоднорівномірним характером течії. Для забезпечення належної точності розрахунків в коді RELAP 5 для користувача передбачена можливість введення власних коефіцієнтів втрат, або коефіцієнтів гідравлічного опору.

За означенням коефіцієнт гідравлічного опору K вводиться як коефіцієнт пропорційності у співвідношенні між втратами тиску

ΔP та швидкісним напором $\frac{\rho v^2}{2}$:

$$\Delta P = K \frac{\rho v^2}{2}.$$

Коефіцієнти втрат, що вводяться користувачем K_{in} , входять до членів $HLOSSF$ та $HLOSSG$ скінченно-різницевого рівняння збереження кількості руху:

$$HLOSSG_j^n = \frac{1}{2}(K_g^n + K_{in})|v_{g,j}^n|, \quad HLOSSF_j^n = \frac{1}{2}(K_f^n + K_{in})|v_{f,j}^n|$$

Коефіцієнт K_{in} можна задати або як коефіцієнт гідравлічного опору для прямої течії K_F , або як коефіцієнт гідравлічного опору для оберненої течії K_R , в залежності від напрямку швидкості фази. У багатьох випадках коефіцієнт гідравлічного опору є функцією числа Рейнольдса, тому в коді RELAP 5 пропонується така форма для визначення цих коефіцієнтів:

$$K_F = A_F + B_F \text{Re}^{-C_F}; \quad K_R = A_R + B_R \text{Re}^{-C_R} \quad (8.55)$$

де $A_F, B_F, C_F, A_R, B_R, C_R$ – константи, що задаються користувачем; Re – число Рейнольдса для суміші: $\text{Re} = \frac{\rho_m v_m D}{\mu_m}$.

В коді RELAP5 прийнято такий спосіб визначення в'язкості суміші μ_m :

$$\mu_m = X \mu_g + (1 - X) \mu_f, \quad (8.56)$$

де X – витратний масовий вміст пари.

8.5 Модель поперечного з'єднання потоку.

Базова скінченно-різницева схема коду RELAP 5 застосовує одновимірну апроксимацію рівнянь руху. У випадках коли рухом у напрямках, відмінних від основного (поперечних напрямках), знехтувати не можна, використовуються одновимірні рівняння, записані для цих напрямків. При цьому виникає необхідність коректного моделювання перенесення кількості руху від одного контрольного об'єму до іншого в поперечному напрямку. Модель поперечного з'єднання потоку введена в код саме з такою метою.

Дана модель застосовується у 3-х випадках. *Перший випадок* – поперечна течія малої інтенсивності між двома паралельними потоками. Така ситуація є типовою для активної зони ядерного реактора і парогенератора (для двоконтурних ЯЕУ), де геометрія компонентів забезпечує великий опір для поперечних і малий опір для аксіальних потоків (чим більший опір, тим менша витрата). *Другий випадок* – моделювання течії у Т-подібних з'єднаннях трубопроводів. У цьому випадку потік, що надходить з бокового розгалуження припускається перпендикулярним до основного потоку. Отже, потік кількості руху основної течії не здійснює внеску в баланс кількості руху для поперечного з'єднання. *Третій випадок* – моделювання параметрів у теплоносії, що переноситься з одного каналу до іншого за рахунок виникнення малих течей. Для невеликих течей перенесення кількості руху є незначним, а течія обумовлена, в першу чергу, дією градієнта тиску, гравітаційних сил і сил тертя, порядок яких більший порядку інерційних сил.

Розглянемо скінченно-різницеве рівняння збереження кількості руху газоподібної фази:

$$\begin{aligned}
& (\alpha_g \rho_g)_j^n (v_g^{n+1} - v_g^n)_j \Delta x_j + \\
& + \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n \left[(v_g^2)_L^n - (v_g^2)_K^n \right] \Delta t + \\
& + \text{VISCOUS TERMS} = -\alpha_{g,j}^n (P_L^{n+1} - P_K^{n+1}) \Delta t - \\
& - (\alpha_g \rho_g)_j^n (FWG_j^n \Delta x_j + HLOSSG_j^n) v_{g,j}^{n+1} \Delta t - \\
& - (\alpha_g \rho_g)_j^n FLG_j^n (v_{g,j}^{n+1} - v_{f,j}^{n+1}) \Delta x_j \Delta t + (\alpha_g \rho_g)_j^n B_x \Delta x_j \Delta t + \\
& + \text{ADDED MASS} + \text{MASS TRANSFER MOMENTUM} + \\
& + \text{STRATIFIED PRESSURE GRADIENT EFFECT}.
\end{aligned}
\tag{8.57}$$

де індексом “К” позначені параметри контрольного об’єму К, розташованого вище за потоком ніж з’єднання j, а індексом “L” – параметри розташованого нижче об’єму L,

$$\Delta x_j = \frac{1}{2} (\Delta x_K + \Delta x_L), \quad \text{VISCOUS TERMS} - \text{члени штучної}$$

в’язкості, ADDED MASS – член, пов’язаний з ефектом приєднаних мас, MASS TRANSFER MOMENTUM – член, що визначає зміну кількості руху за рахунок масообміну, STRATIFIED PRESSURE GRADIENT EFFECT – члени, пов’язані з наявністю градієнтів тиску.

Аналогічне рівняння записується для рідкої фази. Рівняння (8.57) виражає збереження кількості руху для об’єму, що утворюється як сума половини об’єму К та половини об’єму L. Напрямок x в (8.57) – це напрям потоку у з’єднанні. Так само як і при моделюванні потоків у звичайних з’єднаннях, переносом x – компоненти кількості руху, обумовленим поперечним по відношенню до напрямку x рухом, нехтують.

Перший випадок. Розглянемо випадок невеликого поперечного з’єднання двох паралельних потоків. Всі необхідні геометричні

параметри, що вводяться при побудові основної розрахункової моделі коду RELAP5 (площі, довжина, зміна по висоті) для обох об'ємів відносяться до осевого напрямку (основного напрямку потоку). Площа поперечного з'єднання, а також його характерна довжина, можуть або вводитися користувачем, або обчислюватися автоматично. В останньому випадку припускається, що з'єднання є циліндричною трубою і використовуються відповідні значення площі поперечного перерізу і характерної довжини. При використанні значень, що вводяться користувачем, необхідно задати площу поперечного перерізу з'єднання та його характерну довжину у файлі вхідних даних. Характерна довжина може обчислюватися як відношення об'єму до площі перерізу поперечного з'єднання.

Оскільки у з'єднаних об'ємах К та L течія припускається аксіальною, потоком кількості руху у поперечному з'єднанні (пов'язаним з аксіальним рухом по основних об'ємах К та L) можна знехтувати, як і відповідними членами штучної в'язкості. Можливість подібного спрощення пояснюється малим відносним внеском сил інерції (конвективних членів) в баланс кількості руху для поперечного з'єднання.

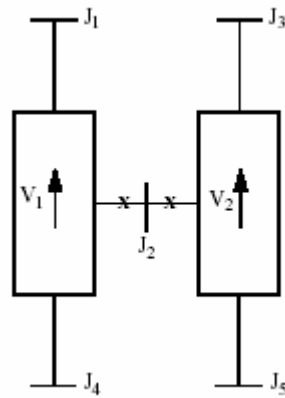


Рис. 8.10. Поперечне з'єднання двох паралельних потоків.

На рис.8.10. об'ємом К буде об'єм V_1 , якщо рух рідини відбувається з об'єму V_1 до об'єму V_2 , і об'єм V_2 , якщо рух відбувається в протилежному напрямку.

В результаті отримаємо спрощене рівняння збереження кількості руху газоподібної фази для поперечного з'єднання двох паралельних потоків (рис.8.10):

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_g \rho_g \right)_j^n \left(v_g^{n+1} - v_g^n \right)_j \Delta x_j = - \alpha_{g,j}^n \left(P_L - P_k \right)^{n+1} \Delta t - \\ & - \left(\alpha_g \rho_g \right)_j^n HLOSSG_j^n v_{g,j}^{n+1} \Delta t - \\ & - \left(\alpha_g \rho_g \right)_j^n FIG_j^n \left(v_{g,j}^{n+1} - v_{f,j}^{n+1} \right) \Delta x_j \Delta t + \left(\alpha_g \rho_g \right)_j^n B_x \Delta x_j \Delta t + \\ & + ADDED\ MASS + MASS\ TRANSFER\ MOMENTUM + \\ & + STRATIFIED\ PRESSURE\ GRADIENT\ EFFECT. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Аналогічне рівняння записується і для рідкої фази. Член Δx_j , необхідний для врахування довжини інерції з'єднання, у випадку використання параметрів за угодою, обчислюється за формулою:

$$\Delta x_j = \frac{1}{2} [D(K) + D(L)],$$

де $D(K)$ і $D(L)$ – діаметри відповідних об'ємів. Користувач може вказати власні довжини, що використовуються замість $D(K)$ та $D(L)$.

Другий випадок. Для другого випадку, Т – подібного з'єднання (рис.8.11), як і раніше, для розрахунку параметрів у поперечному з'єднанні використовується умова балансу кількості руху для об'єму, утвореного половиною об'єму К та половиною об'єму L.

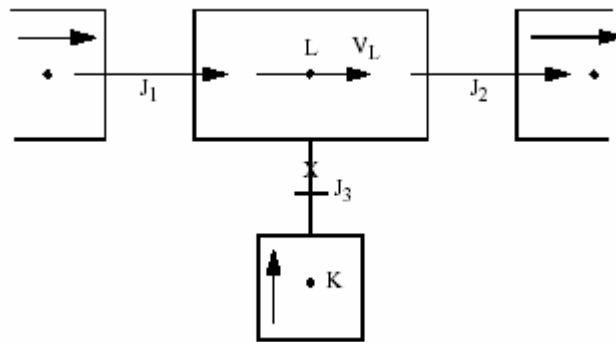


Рис.8.11. Т-подібне з'єднання.

Проте, якщо для об'єму L , по аналогії з першим випадком, можна знехтувати конвективними членами (силами інерції), то для об'єму K перенесення кількості руху записується у формі, прийнятій для звичайного з'єднання, тобто з урахуванням конвективних членів. Таким чином, рівняння збереження кількості руху газоподібної фази для поперечного Т-подібного з'єднання прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
& (\alpha_g \rho_g)_j^n (v_g^{n+1} - v_g^n)_j \Delta x_j + \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_g \dot{\rho}_g)_j^n \left[- (v_g^2)_K^n \right] \Delta t + \\
& (VISCOUS TERM)_K = -\alpha_{g,j}^n (P_L^{n+1} - P_K^{n+1}) \Delta t - \\
& - (\alpha_g \rho_g)_j^n \left[FWG_j^n \Delta x_j + HLOSSG_j^n \right] v_{g,j}^{n+1} \Delta t - \\
& - (\alpha_g \rho_g)_j^n FLG_j^n (v_{g,j}^{n+1} - v_{f,j}^{n+1}) \Delta x_j \Delta t + \\
& + (\alpha_g \rho_g)_j^n B_x \Delta x_j \Delta t + ADDED MASS + \\
& + MASS TRANSFER MOMENTUM + \\
& + STRATIFIED PRESSURE GRADIENT EFFECT.
\end{aligned}
\tag{8.59}$$

Аналогічне рівняння записується і для рідкої фази. Для Δx_j справедливо:

$$\Delta x_j = \frac{1}{2} [\Delta x_K + D(L)],
\tag{8.60}$$

в разі використання параметрів за угодою, або ж замість $D(L)$ використовується характерна довжина об'єму L , що вводиться користувачем.

Третій випадок. Розглянемо випадок, пов'язаний з моделюванням течії теплоносія, розташованої між двома об'ємами K та L (рис.8.12). З'єднання J_3 – звичайне з'єднання. З'єднання J_1 і J_2 , а також об'єм M моделюють потік через течу, або другорядний тракт. З'єднання J_1 і J_2 , що забезпечують зв'язок тракту течії з об'ємами K та L , моделюються як розглянуті раніше T – подібні з'єднання.

Насправді, приток рідини відбувається в одному місці, розташованому між центрами об'ємів К та L, однак коректне урахування впливу гравітації, тобто різниці висот об'ємів К та L у скінченно-різницевій схемі вимагає моделювання течії з використанням допоміжного об'єму М. Теча може моделюватися і як поперечне з'єднання між двома об'ємами, але для цього необхідно, щоб їх центри мали однакову висоту.

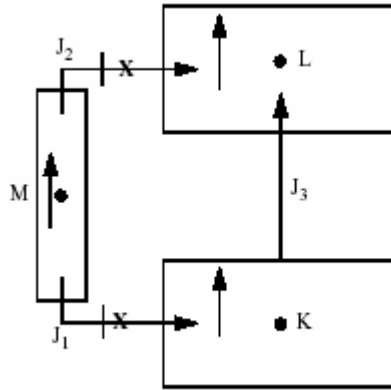


Рис.8.12. Моделювання течії за допомогою поперечних з'єднань.

Залишається відмітити, що використання форм рівнянь збереження кількості руху вигляду (8.58), (8.59) забезпечується за допомогою надання різних значень спеціальній позначці “s” поперечного з'єднання у файлі вхідних даних.

8.6 Послаблення ефекту «пакування» води за рахунок стисливості.

Застосування чисельних методів скінченних різниць, аналогічних тим, що використовуються в коді RELAP 5, при розв'язанні задач теплогідравліки іноді приводить до нефізичних, фіктивних сплесків тиску. В схемах коду RELAP 5 це пов'язано зі зникненням парової фази, коли вода заповнює весь контрольний об'єм. Така ситуація називається “пакуванням” води. Причиною появи аномальних

сплесків тиску є стрибкоподібна зміна стисливості теплоносія, що спостерігається при переході від двофазної рідини з малим вмістом пари до чистої однофазної рідини. Ці проблеми виникають як при застосуванні двошвидкісної гетерогенної моделі течії, так і при застосуванні гомогенної моделі.

Розглянемо гомогенний рівноважний потік у контрольному об'ємі, майже повністю заповненому рідиною. Припустимо, що в цей об'єм надходить тільки рідина, тобто приток газоподібної фази відсутній. Співвідношення між густиною та тиском, що використовується для обчислення значень тиску на новому кроці за часом, базується на значеннях параметрів стану та їх похідних, що розраховані на попередньому кроці. За результатами розрахунків на попередньому кроці теплоносій представлявся двофазною, у високій мірі стислою, рідиною. Для такої рідини можливі значні зміни об'єму при незначних змінах тиску. Висока стисливість теплоносія може дозволити значний приток рідини до об'єму без помітного зростання тиску. В деяких випадках об'єм чистої рідини, що за розрахунками надходить до контрольного об'єму протягом кроку за часом, може перевищити початковий об'єм газоподібної фази. Таким чином, на наступному кроці за часом в чисельному алгоритмі буде вважатися, що об'єм заповнений чистою рідиною з значною кількістю руху. Оскільки рідина є майже нестислою, значний приток кількості руху може компенсуватися лише за рахунок суттєвого збільшення тиску. Отже, на буде спостерігається стрибкоподібний, нефізичний сплеск тиску. Сплески тиску призводять до суттєвого зменшення кроків за часом на основі умови Куранта і, отже, значно збільшують час обчислень.

Модель “пакування” води використовується для послаблення цих ефектів і складається з алгоритму виявлення ефекту сплеску тиску та алгоритму його послаблення. Розглянемо ситуацію, показану на рис.8.13

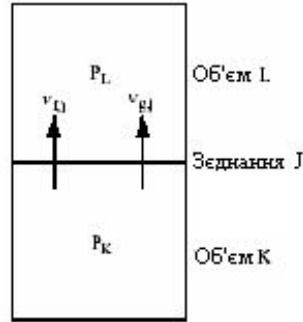


Рис.8.13. Пакування води

Припустимо, що об'єм К майже повністю заповнений водою ($\alpha_g \leq 0.12$), температура води менша температури насичення $T_f \leq T^s$ і об'єм відмічений, як такий, що має вертикальне розшарування. Об'єм L, що знаходиться вище, має високий вміст пари. У відповідності до моделі коду RELAP 5 явище сплеску тиску в об'ємі К має місце, якщо

$$P_K^{n+1} \geq P_K^n + 0.0023 P_K^n. \quad (8.61)$$

Виконання умови (8.61) означає, що обчислення тиску необхідно повторити, базуючись на модифікованому рівнянні збереження кількості руху. Основне рівняння може бути записане у вигляді:

$$v_{f,j}^{n+1} = v_{f,j}^{n,\text{exp}} - (VFDP)_j^n \left[\left(P_L^{n+1} - P_L^n \right) - \left(P_K^{n+1} - P_K^n \right) \right], \quad (8.62)$$

де $v_{f,j}^{n,\text{exp}}$ містить всі члени, обчислені на попереньому кроці за часом, а $(VFDP)_j^n$ - члени, що домножаються на тиск. Модифікація (8.62) в моделі "пакування" води полягає у

прирівнюванні $v_{f,j}^{n,\text{exp}} = 0.01 \text{ м/с}$ щоб гарантувати течію рідини з об'єму К до об'єму L, та у множенні $(P_K^{n+1} - P_K^n)$ на множник *FACTOR*, що має велике значення і залежить від тиску. Це призводить до незначного відхилення P_K^{n+1} від P_K^n . Таким чином, модифіковане рівняння збереження кількості руху, що використовується у моделі, має вигляд:

$$v_{f,j}^{n+1} = 0.01 - (VFDP)_j^n (P_L^{n+1} - P_L^n) + (VFDP)_j^n (FACTOR) (P_K^{n+1} - P_K^n). \quad (8.63)$$

Відмітимо, що модель може застосовуватися і при «гідравлічному ударі» - різкому заповненні об'єму L, зайнятого спочатку газом, чистою рідиною.

8.7 Модель захлинання потоку

Для дисперсно-кільцевого режиму двофазного потоку у вертикальних трубах типовою є ситуація, коли в ядрі потоку знизу вгору рухається газ, а по стінках стікає вниз плівка рідини. В такому випадку на поверхні плівки виникають дотичні напруження, що прагнуть затримати її рух. При невеликих значеннях витрати газоподібної фази рідка плівка порівняно гладка та стійка, а дотичні напруження малі. Однак, починаючи з деякого значення витрати газу при заданій витраті рідини, внаслідок зростання дотичних напружень, на поверхні розділу фаз виникають великі і нестійкі хвилі, течія в цілому стає хаотичною, градієнт тиску газоподібної фази помітно зростає і рідина змінює напрям руху, починаючи рухатись догори. Таке явище відоме як «захлинання» потоку. Воно обумовлене раптовим та різким виникненням нестійкої течії, що супроводжується збільшенням градієнту тиску на порядок (рис.8.14). Явище «захлинання» потоку не враховується в основних алгоритмах чисельного розв'язання задач теплогідравліки коду

RELAP 5, що призводить до помилок під час розрахунку вмісту пари (газу) і, відповідно, потребує використання окремої моделі.

Рівняння, які виражають зв'язок між масовими витратами рідини та газу, що відповідають “захлинанню” потоку, були одержані емпірично Уоллісом й Кутателадзе. Підхід Уолліса було розглянуто в підрозд. 3.4.

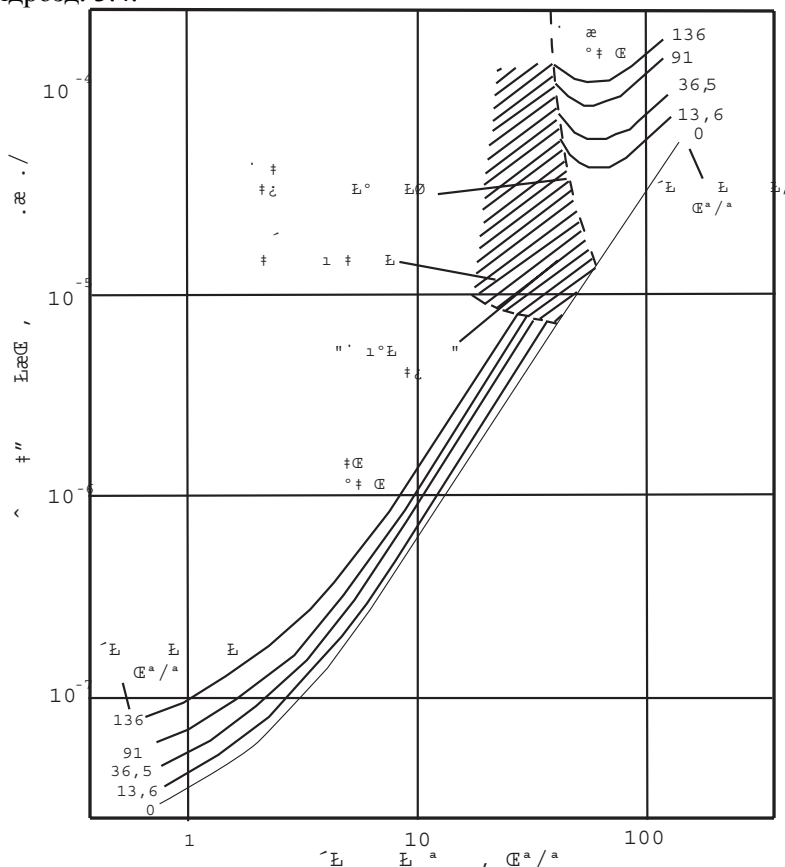


Рис.8.14. Характеристики течії поблизу зони “захлинання” потоку.

У випадку домінування гравітаційних сил над силами в'язкого тертя протилежний рух газової та рідкої фаз підтримується підйнятною силою, обумовленою різницею густин газу та рідини. Витрати фаз можна пов'язати з товщиною плівки, використовуючи рівняння руху, в яких можна знехтувати всіма членами у порівнянні з силами міжфазного тертя та підйнятною силою. Використовуючи спрощені рівняння вдається знайти шуканий зв'язок між витратами, що описує процес захлинання [10]:

$$H_g^{1/2} + mH_f^{1/2} = C, \quad (8.63)$$

де

$$H_g = j_g \left[\frac{\rho_g}{gw(\rho_f - \rho_g)} \right]^{1/2}, H_f = j_f \left[\frac{\rho_f}{gw(\rho_f - \rho_g)} \right]^{1/2}. \quad (8.64)$$

H_g, H_f - безрозмірні зведені швидкості; w - масштаб довжини, що визначається формулою:

$$w = D_j^{1-\beta} L^\beta. \quad (8.65)$$

де D_j - гідравлічний діаметр з'єднання, $L = \left[\frac{\sigma}{g(\rho_f - \rho_g)} \right]^{1/2}$,

σ - коефіцієнт поверхневого натягу.

Степень β у (8.65) - константа, що в коді RELAP 5 вводиться користувачем. Для $\beta=0$ отримуємо рівняння Уолліса, $\beta=1$ - рівняння Кутателадзе. При $0 < \beta < 1$ - проміжне рівняння Бенкова. Зауважимо, що як рівняння Уолліса, так і рівняння Кутателадзе

добре описують експериментальні дані й тому немає яких-небудь абсолютно чітких рекомендацій по пріоритетності їх застосування. Разом з тим в керівництві з RELAP5 [10] вказується на переваги використання рівняння Уолліса для ділянок з малим, а рівняння Кутателадзе – для ділянок з великим гідравлічним діаметром.

Співвідношення (8.63) проілюстроване на рис. 8.15. Параметр C являє собою значення $H_g^{1/2}$ при $H_f = 0$. Параметр

$$m = \frac{H_g^{1/2}(H_f = 0)}{H_f^{1/2}(H_g = 0)}$$

характеризує нахил прямої на рис. 8.15 і з цієї

причини називається кутом нахилу. Як випливає з рис. 8.15 і співвідношення (8.63), в потоці не можуть реалізовуватися довільні швидкості рідкої та газоподібної фази. При фіксованій швидкості однієї фази існує певний відрізок (всередині трикутника на рис. 8.15) допустимих значень швидкості іншої фази, причому гіпотенуза трикутника відповідає явищу захлинання.



Рис.8.15. Залежність між безвимірними приведеними швидкостями фаз при захлинанні потоку

В RELAP5 за угодою прийняті такі значення для параметрів m та C : $m=1, C=1$. В разі необхідності користувач має змогу ввести власні значення цих параметрів.

Розглянемо рекомендації стосовно визначення параметрів моделі захлинання потоку, наведені в [2,8]. Розрізняють два випадки:

1. Турбулентний режим течії у рідкій плівці при переважному впливові гравітаційних сил:
 $m=1, C=0.725$ (для труб з гострою кромкою);
 $0.88 < C < 1$ (для труб з заокругленою кромкою, тобто у випадку, коли впливом кінців труби можна знехтувати).
2. В'язкий (ламінарний) режим течії у рідкій плівці. Параметри m і C є функціями числа Грасгофа (див. 8.16). Число Грасгофа N_f обчислюється як:

$$N_f = \left[\frac{\rho_f g D_j^3 (\rho_f - \rho_g)}{\mu_f^2} \right]^{1/2} . \quad (8.66)$$

Нагадаємо, що число Грасгофа характеризує відношення гравітаційних сил до сил в'язкого тертя.

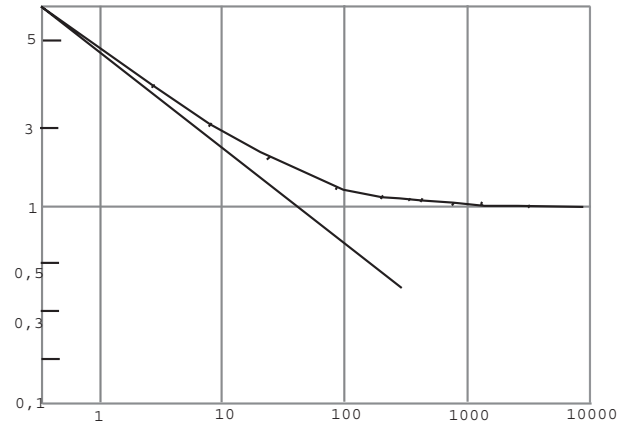


Рис.8.16а. Коефіцієнт m в рівнянні 8.63 в залежності від числа Грасгофа N_f

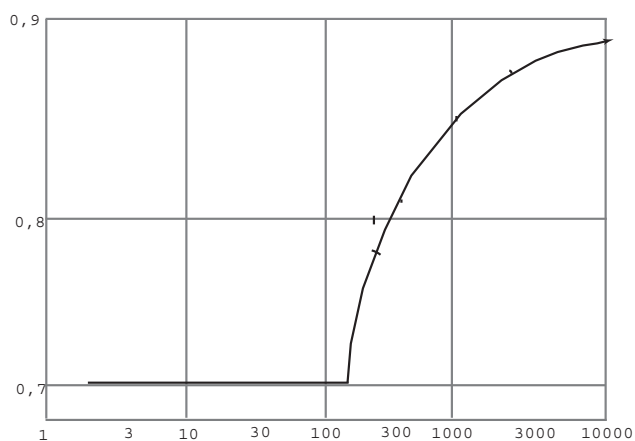


Рис.8.16b. Коэффициент c в рівнянні 8.63 в залежності від числа Грасгофа Nf

Нижче розглянуто приклад застосування моделі захливання потоку.

Приклад. Повітря і вода рухаються в вертикальній трубі діаметром 50.8мм в режимі протитечії. Знайти максимально припустиму витрату рідини, якщо масова витрата газу становить

$$G_g = 91 \frac{\text{кг}}{\text{год}}, \quad \text{густини} \quad \text{фаз}$$

$$\rho_g = 1.6 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_f = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \text{в'язкість} \quad \text{рідини}$$

$$\mu_f = 3.72 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Розв'язок. Площа поперечного перерізу труби дорівнює:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 2,04 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Обчислимо зведену швидкість газу:

$$j_g = \frac{G_g}{A\rho_g} = 7.75 \text{ м/с}.$$

Приймемо модель Уолліса і підрахуємо безрозмірну зведену швидкість газу:

$$H_g = j_g \left[\frac{\rho_g}{gD(\rho_f - \rho_g)} \right]^{1/2} = 0.43.$$

Нехтуючи впливом течії на кінцях труби, приймемо $C=1$. Тоді для добутку $mH_f^{1/2}$ знайдемо:

$$mH_f^{1/2} = C - H_g^{1/2} = 0.345.$$

Тепер треба визначити параметр m . Для цього розрахуємо число Грасгофа. З (8.67) отримаємо:

$$N_f = 3,5 \cdot 10^4,$$

таким чином, з рис.8.16а будемо мати: $m=1$. Тоді

$$H_f = 0,345^2 = 0,119,$$

$$j_{f,\max} = H_f \left[\frac{gD_j(\rho_f - \rho_g)}{\rho_f} \right]^{1/2} = 0.0845 \text{ м/с}.$$

Максимальна масова витрата рідини становитиме:

$$G_{f,\max} = j_{f,\max} \rho_f A = 615 \text{ кг/год}.$$

При запиті користувача код RELAP5 перевіряє умови захливання (8.63). У випадку, коли ці умови виконуються, рівняння різниці збереження кількості руху замінюється критерієм захливання, оскільки ефект захливання є альтернативою міжфазного тертя, і використовується система з рівняння суми збереження кількості

руху та рівняння захливання (8.63). Відмітимо, що аналогічний підхід застосовувався при моделюванні запирання потоку: рівняння суми замінювалося на умову запирання. При такому підході фазові швидкості знову визначаються з рівняння суми, тобто з врахуванням градієнту тиску і гравітації. Скінченно-різницева форма рівняння

(8.63) одержується після розв'язання (8.63) відносно $mH_f^{1/2}$ та піднесення до квадрату:

$$m^2 C_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1} = C^2 - 2C(C_{g,j}^n)^{1/2} (v_{g,j}^{n+1})^{1/2} + C_{g,j}^n v_{g,j}^{n+1}, \quad (8.67)$$

$$\text{де } C_g = \frac{H_g}{v_g}; C_f = \frac{H_f}{v_f}.$$

Лінеаризуючи у (8.67) член $(v_{g,j}^{n+1})^{1/2}$ одержимо:

$$(v_{g,j}^{n+1})^{1/2} = (v_{g,j}^n)^{1/2} + \frac{1}{2} (v_{g,j}^n)^{-1/2} (v_{g,j}^{n+1} - v_{g,j}^n), \quad (8.68)$$

отже, скінченно-різницева форма рівняння захливання набуде вигляду:

$$\begin{aligned} m^2 C_{f,j}^n v_{f,j}^{n+1} + \left[C(C_{g,j}^n)^{1/2} (v_{g,j}^n)^{-1/2} - C_{g,j}^n \right] v_{g,j}^{n+1} = \\ = C^2 - C(C_{g,j}^n)^{1/2} (v_{g,j}^n)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.69)$$

8.8 Модель визначення руху рівня змішаності.

Виправити схему 8.2. (на Чи вже існує *рівень...*). Виправити помарки на схемах 8.3, 8.4: τ замінити на s . В кінці міститься перелік умовних позначень. Його слід розмістити на початку посібника

Під рівнем змішаності будемо розуміти *переріз труби, де відбувається різка зміна вмісту пари (газу), що супроводжується зміною режиму потоку.*

Скінченно-різницева схема чисельного розв'язання задач теплогідравліки коду RELAP5 припускає, що в межах кожного контрольного об'єму вміст пари (газу) постійний і визначається деяким середнім значенням. Звідси випливає, що для коректного врахування стрибкоподібної зміни вмісту пари (газу) слід дуже детально проводити нодалізацію при побудові моделі тракту теплоносія. Щоб зменшити час обчислень і дозволити використання достатньо грубих нодалізаційних схем в RELAP5 введено модель визначення руху рівня змішаності.

Модель визначення руху рівня змішаності призначена для моделювання ситуацій, в яких об'ємний вміст пари (газу) α_g зростає у вертикальному напрямі (вертикально вгору). У місцях, де присутні геометричні обмеження потоку, наприклад, дистанціюючі ґратки, рідина може накопичуватися над конструкційними обмеженнями, що призводить до обернення профілю розподілу об'ємного вмісту пари (газу) (α_g зменшується у вертикальному напрямі) і виникнення рівня змішаності. Модель також застосовується у випадках упорскування газу нижче поверхні охолодженого об'єму, щоб урахувати ефект конденсації пари під час її підйому під дією термогравітаційних сил. Для врахування виникнення кількох рівнів змішаності та обернених α -профілів у вхідних файлах коду RELAP5 відрізки вертикальної течії розбиваються на так звані “стеки рівнів”. В межах кожного стека можливе існування лише одного рівня. Вказані стеки будуються під час обробки вхідних даних. Вони визначаються як послідовність

однозв'язних об'ємів, розташованих у вертикальному напрямі, така, що не містить жодних обмежень течії у з'єднаннях між об'ємами. Модель руху рівнів змішаності ігнорує множинні з'єднання, що пов'язані з боковими поверхнями об'ємів. Код визначає верхівку стека, рухаючись від одного об'єму до іншого до тих пір, поки не буде знайдено об'єм, що не має вертикального з'єднання, пов'язаного з його верхнім кінцем, або має так зване "негладке з'єднання" (різка зміна площі поперечного перерізу), або має на верхньому кінці з'єднання, в якому модель відключається користувачем у вхідних даних. Якщо об'єм має кілька з'єднань (множинні з'єднання), підключених до його верхнього або нижнього боку, це трактується як відключення моделі руху рівня змішаності. Множинні вертикальні з'єднання не можуть розглядатися в рамках цієї моделі, оскільки під час визначення виникнення рівня досліджується розподіл об'ємного вмісту пари (газу) у трьох послідовних вертикальних об'ємах з метою визначення положення стрибкоподібної зміни вмісту пари (газу). Тому, по відношенню до кожного об'єму всередині стека код повинен чітко розпізнавати верхній і нижній об'єми. Пошук положення рівня починається з верхівки стека і продовжується поки це положення не буде знайдено або поки не буде досягнуто кінця стека. Якщо в стеці буде знайдено рівень, код буде розраховувати його рух по об'ємах в рамках стека у відповідності до умов потоку. При цьому в межах даного стека виключено виникнення іншого рівня до тих пір, поки вихідний рівень не зникне зі стека. Зникнення рівня зі стека можливе лише внаслідок його переміщення через верхній або нижній кінець стека. Якщо рівень в стеці не було знайдено, його пошук виконується на кожному кроці за часом.

Модель складається з п'яти частин:

1. Визначення виникнення рівнів змішаності.
2. Обчислення параметрів, необхідних для опису рівня, таких як положення та швидкість рівня, об'ємні вмісти пари (газу) над і під рівнем.
3. Опис руху рівня від об'єму до об'єму.
4. Зміна рівнянь збереження маси, енергії, кількості руху.
5. Зміна обчислення параметрів теплообміну.

8.8.1 Визначення виникнення рівня змішаності

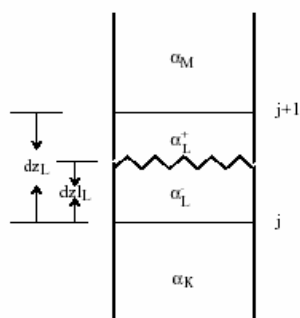


Рис.8.17

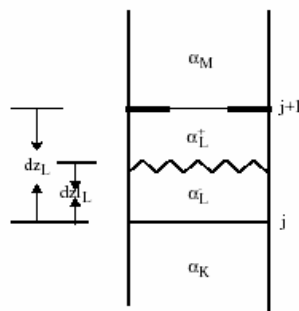


Рис.8.18

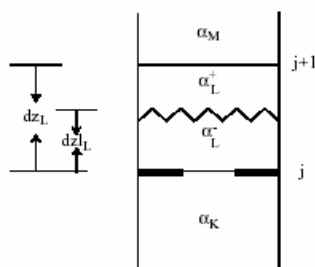


Рис.8.19

Рис.8.17. Рівень змішаності при нормальному α – профілі

Рис.8.18. Рівень змішаності в об'ємі, розташованому нижче обернення α – профілю.

Рис.8.19. Рівень змішаності в об'ємі, розташованому вище обернення α – профілю.

Рівень змішаності характеризується різкою зміною об'ємного вмісту пари, що супроводжується зміною режиму потоку. Розрізняють два типи рівнів змішаності: нормальний та обернений.

При нормальному рівні змішаності (нормальний α -профіль) об'ємний вміст пари $\alpha_g(\alpha)$ зростає у напрямі вертикально вгору, в той час як при оберненому – спадає. Ці ситуації проілюстровані на рис.8.17-8.19.

Рис. 8.17 ілюструє нормальний α – профіль, що виникає під час руху по вертикальній трубі, що нагрівається, або при розгерметизації вертикальної ділянки тракту теплоносія. На рис 8.18,8.19 показані обернені α – профілі, що виникають при накопиченні рідини під або над обмеженням потоку.

Умови фіксації наявності рівня змішаності для нормального α – профілю мають вигляд:

$$\alpha_M - \alpha_L > \delta\alpha_C \text{ (за угодою } \delta\alpha_C = 0.2 \text{)} \quad (8.70)$$

або

$$\alpha_L - \alpha_K > \delta\alpha_C \text{ (за угодою } \delta\alpha_C = 0.2 \text{)} \quad (8.71)$$

та

$$\alpha_M > \alpha_C \text{ (за угодою } \alpha_C = 0.7 \text{)} \quad (8.72)$$

де α_C – мінімально допустиме значення α_g в контрольному об'ємі, розташованому вище нормального рівню змішаності, $\delta\alpha_C$ – мінімальна зміна вмісту пари (газу), що свідчить про наявність нормального рівня змішаності.

Для оберненого α -профіля умови залежать від того, де (вище або нижче обернення профіля) розташований контрольний об'єм. Рівень змішаності визначається як такий, що знаходиться нижче точки обернення профіля (рис.8.18) якщо:

$$\alpha_L - \alpha_M > \delta\alpha_j \text{ (за угодою } \delta\alpha_j = 0.1 \text{)}.$$

(8.73)

Критерій існування рівню вище точки обернення профіля (рис.8.19) має вигляд:

$$\alpha_K - \alpha_L > \delta\alpha_j \text{ (за угодою } \delta\alpha_j = 0.1 \text{)}.$$

(8.74)

Логіку визначення виникнення рівня змішаності і застосування умов (8.70)-(8.74) пояснено на приведених нижче схемах.

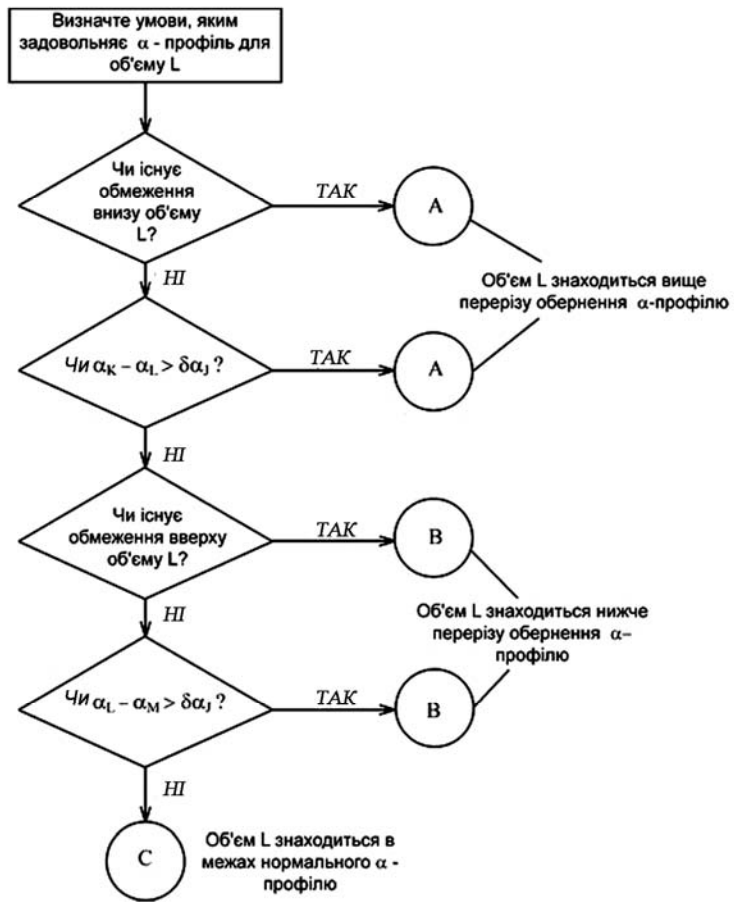


Схема 8.1. Логіка визначення рівню змішаності

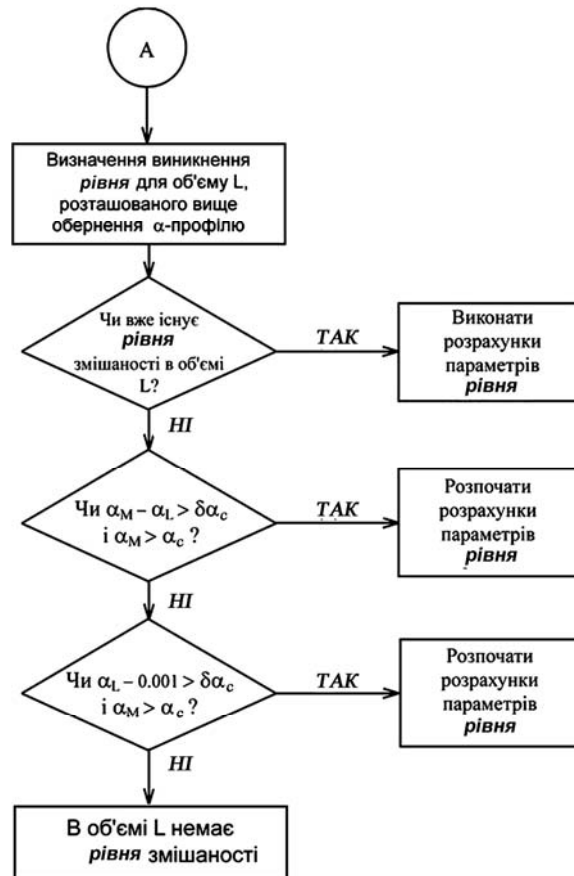


Схема 8.2. Логіка визначення рівню змішаності для об'єму L , розташованого вище обернення α — профілю

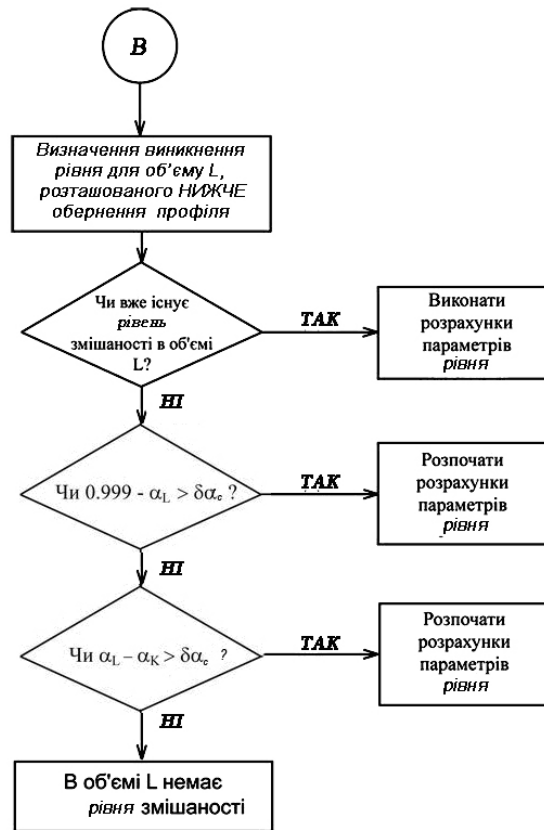


Схема 8.3. . Логіка визначення рівню змішаності для об'єму L, розташованого нижче обернення α — профілю

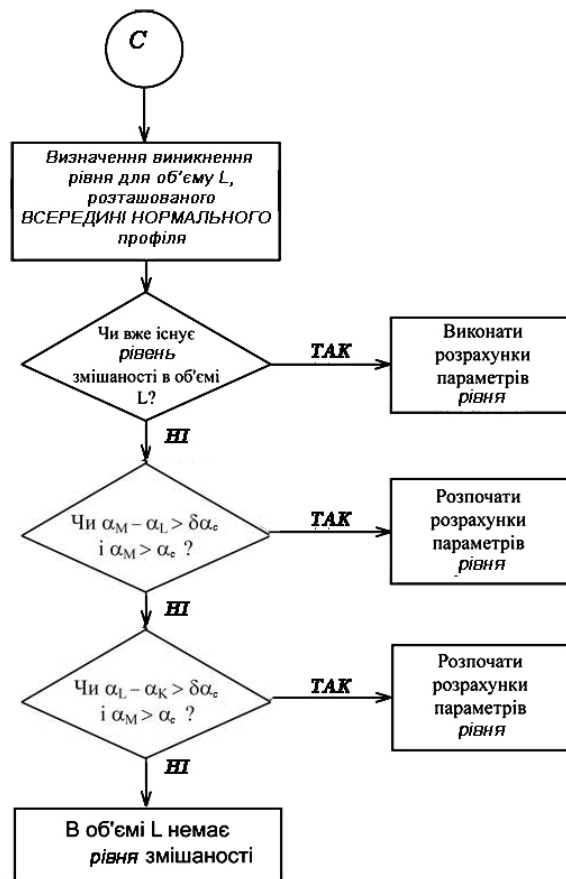


Схема 8.4. . Логіка визначення рівню змішаності для об'єму L, розташованого всередині нормального α — профілю

8.8.2 Обчислення параметрів рівня

Параметрами, що характеризують рівень змішаності, є:

1. Об'ємні вмісти пари (газу) вище та нижче рівня α_L^+, α_L^- .
2. Розташування рівня в об'ємі L (відстань від нижнього краю об'єму d_{zl}) (див. рис.8.17-8.19).
3. Швидкість руху рівня (v_{lev}).

8.8.2.1 Визначення об'ємних вмістів пари (газу).

Визначення α_L^+, α_L^- відбувається за допомогою кореляцій, що відрізняються для кожного з трьох випадків: 1) нормальний профіль; 2) обернення α -профіля вище об'єму L або обмеження течії у верхньому кінці об'єму L; 3) обернення α -профіля нижче об'єму L або обмеження течії у нижньому кінці об'єму L.

Випадок 1. Нормальний α -профіль.

У цьому випадку припускається:

$$\alpha_L^- = \alpha_K, \quad (8.75)$$

тобто α_L^- дорівнює вмісту пари (газу) в об'ємі K, що розташований нижче об'єму L. Вміст пари α_L^+ визначається переносом рідини з області, розташованої нижче рівня змішаності. У випадку відсутності переносу рідини з цієї області:

$$\alpha_L^+ = \alpha_M. \quad (8.76)$$

Якщо швидкість у з'єднанні направлена вгору, тобто перенос існує, α_L^+ визначається через масовий потік рідини, що переноситься через з'єднання, такою кореляцією:

$$\alpha_L^+ = 1 - \frac{G_{lent}}{\rho_f v_f},$$

$$v_f = v_{f,j+1} \left(\frac{A_{j+1}}{A_L} \right),$$

(8.77)

де $v_{f,j+1}$ - швидкість рідкої фази у з'єднанні, A_{j+1} - площа поперечного перерізу з'єднання, A_L - середня площа поперечного перерізу контрольного об'єму L, G_{lent} - так званий масовий потік переносу рідини, що визначається співвідношеннями:

$$G_{lent} = \left[3.0 * 10^{-5} \left(CK^{0.5} + 530 * CK^{2.1} \right) \left(\frac{\rho_f - \rho_g}{\rho_f} \right)^{0.5} \right] j_g \rho_g,$$

$$CK = \frac{2.0 * DMAX * j_g}{\left[VCRIT * g * \left(\frac{\sigma}{\rho_f - \rho_g} \right)^{0.5} \right]},$$

$$VCRIT = 2.0 \left[\frac{\sigma g (\rho_f - \rho_g)}{\rho_g^2} \right]^{0.25}, DMAX = 0.3375 \left[\frac{\rho_g v_g^2}{g (\rho_f - \rho_g)} \right].$$

(8.78)

В якості ρ_g і ρ_f беруться донорні значення, а для σ - середнє значення за об'ємом L. Зведена швидкість j_g визначається таким чином:

$$j_g = \alpha_M v_g,$$

(8.79)

$$v_g = v_{g,j+1} \left(\frac{A_{j+1}}{A_L} \right). \quad (8.80)$$

Якщо яка-небудь із швидкостей $v_{f,j+1}$, $v_{g,j+1}$ від'ємна, справедливо:

$$\alpha_L^+ = \alpha_M. \quad (8.81)$$

Випадок 2. Обернення профіля вище об'єму L або обмеження течії у верхньому кінці L.

Об'ємні вмісти пари α_L^+, α_L^- обчислюються аналогічно випадку 1, за виключенням: у рівняннях (8.78) використовується зведена швидкість:

$$j_g = 0.999 v_g \text{ і } \alpha_L^+ = 0.999, \text{ якщо } v_{g,j+1} < 0,$$

Випадок 3. Обернення профіля нижче об'єму L або обмеження течії у нижньому кінці L.

Якщо рівень змішаності розташовано вище перерізу, де відбувається обернення α -профіля, або у нижньому кінці об'єму є обмеження потоку, для обчислення α_L^- застосовується апроксимація потоку дрейфа:

$$\alpha_L^- = \frac{j_g^-}{C_0 j^- + v_{gj}}, \quad (8.82)$$

де

$$v_{gj} = 1.41 \left[\frac{\sigma g (\rho_f - \rho_g)}{\rho_f^2} \right]^{1/4}, C_0 = C_\infty - (C_\infty - 1) \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_f}},$$

$$C_\infty = 1.0 + 0.2 \left[\frac{\rho_f (g D_h)^{1/2}}{|\alpha_g \rho_g v_g| + |\alpha_f \rho_f v_f|} \right]^{1/2}.$$

(8.83)

Зведені швидкості j_g^-, j_f^- обчислюються використовуючи донорні значення швидкостей у з'єднаннях та об'ємні вмісти пари α_K або α_L^- в залежності від знаку фазових швидкостей, ρ_f, ρ_g, σ - значення, осереднені за об'ємом L.

$$j_g^- = \frac{1}{2} v_{g,j}' \left[(\alpha_{g,K} + \alpha_L^-) + \operatorname{sgn}(v_{g,j}') (\alpha_{g,K} - \alpha_L^-) \right],$$

$$j_f^- = \frac{1}{2} v_{f,j}' \left\{ \left[\alpha_{f,K} + (1 - \alpha_L^-) \right] + \operatorname{sgn}(v_{f,j}') \left[\alpha_{f,K} - (1 - \alpha_L^-) \right] \right\},$$

$$j^- = j_f^- + j_g^-, v_{f,j}' = v_{f,j} \left(\frac{A_j}{A_L} \right); v_{g,j}' = v_{g,j} \left(\frac{A_j}{A_L} \right).$$

(8.84)

Значення α_L^+ обчислюється аналогічно випадку 1 (нормальний профіль).

Зауважимо, що v_{gj} в (8.83) являє собою швидкість вільного підйому бульбашки у бульбашковій течії при нехтуванні силами в'язкості та поверхневого натягу у порівнянні з силами інерції,

$\alpha_L v_{gj}$ – зведена швидкість такого руху. Отже, визначення α_L^- (8.82) базується на таких міркуваннях. При накопиченні рідини над пластиною з отвором основний потік через отвір j^- приходиться на рідку фазу, перенос газу моделюється як впливання окремих бульбашок із швидкістю v_{gj} , тобто у знаменнику (8.82) стоїть аналог повної зведеної швидкості у даному випадку.

8.8.2.2 Положення рівня змішаності.

Якщо довжина контрольного об'єму дорівнює dz_L (рис.8.17-8.19), то положення рівня dzl_L дається співвідношенням:

$$dzl_L = dz_L \left(\frac{\alpha_L^+ - \alpha_L^-}{\alpha_L^+ - \alpha_L^-} \right), \quad (8.85)$$

яке отримується з такого рівняння, що визначає об'єм газу в контрольному об'ємі:

$$dzl_L \alpha_L^- + (dz_L - dzl_L) \alpha_L^+ = dz_L \alpha_L.$$

8.8.2.3 Швидкість руху рівня змішаності

Швидкість руху рівня змішаності одержується диференціюванням (8.85) за часом:

$$v_{lev} = \frac{dz_L \frac{d\alpha_L}{dt} - dzl_L \frac{d\alpha_L^+}{dt} - (dz_L - dzl_L) \frac{d\alpha_L^-}{dt}}{\alpha_L^+ - \alpha_L^-}. \quad (8.86)$$

8.8.3 Рух рівня змішаності від об'єму до об'єму

Після визначення положення та швидкості руху рівня потрібно визначити його положення у кінці кроку за часом. Основою

алгоритму оцінювання положення рівня служить така ідея. Якщо, у відповідності з розрахунками, рух суміші такий, що теплоносії зі стрибкоподібною зміною вмісту пари (газу) повинен залишити об'єм, рівень пересувається у відповідний наступний об'єм ще до виконання кроку за часом. Це є наслідком бажання запобігти розривності характеристик потоку при проходженні рівня через відповідне з'єднання, що пов'язано зі зміною режиму потоку в з'єднанні.

Алгоритм розрахунку руху рівня з одного об'єму до іншого розроблено в університеті штату Пенсильванія для коду TRAC. Він складається з трьох частин:

1. Розрахунок (передбачення) положення рівня змішаності у кінці кроку за часом.
2. Визначення параметрів рівня у новому положенні.
3. Обчислення швидкостей фаз у з'єднанні, через яке проходить рівень змішаності у своєму русі від одного об'єму до іншого.

8.8.3.1 Передбачення положення рівня

Передбачення положення рівня виконується за рахунок екстраполяції швидкості його руху на весь крок за часом:

$$dzl_j^{n+1} = dzl_j^n + v_{lev,j}^n * dt^n \quad (8.87)$$

Якщо отримане значення є від'ємним, рівень потрапляє до об'єму К, розташованого нижче поточного об'єму L, в тому випадку, коли об'єм К знаходиться в межах того ж стека або об'єм К є верхівкою сусіднього стека, в якому не існує рівня. Якщо ж $dzl_j^{n+1} > dz_L^n$, рівень пересувається до об'єму, розташованого вище поточного (до об'єму М), в тому випадку, коли об'єм М, розташований вище об'єму L, знаходиться в межах того ж стека або об'єм М є нижнім кінцем сусіднього стека, в якому не існує рівня.

8.8.3.2 Обчислення параметрів рівня у новому положенні

Якщо виявлено, що рівень переходить до нового об'єму, потрібно розрахувати нові параметри у двох об'ємах, щоб правильно

відобразити нове розташування рівня. Параметри, які повинні обчислюватися для нового положення рівня, це: положення рівня у новому об'ємі, об'ємні вмісти пари (газу) вище та нижче рівня та швидкість рівня у новому об'ємі. Як положення рівню у новому об'ємі, приймається або верхня, або нижня границя об'єму, в залежності від того, звідки перемістився рівень до об'єму. Об'ємний вміст пари (газу) в об'ємі, що містить рівень, встановлюється таким чином, щоб гарантувалась наявність рівню змішаності. При цьому деяка частина "мінорної" фази ("мінорною" буде газоподібна фаза, якщо рівень знаходиться в верхній частині об'єму і рідка фаза, якщо рівень знаходиться в нижній частині) може передаватися до об'єму, куди потрапляє рівень, з об'єму, звідки він рухається. Рівняння для визначення вмісту пари (газу) у випадку руху рівня з об'єму L вниз до об'єму K мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} dzl_K^n &= dz_K; v_{lev,K}^n = v_{lev,L}^n; \\ \alpha_K^n &= \alpha_K^n + \varepsilon_\alpha, \\ \alpha_L^n &= \alpha_L^n - \frac{V_K(\rho_f - \rho_g)_K}{V_L(\rho_f - \rho_g)_L} \varepsilon_\alpha, \end{aligned} \right\} \text{якщо } \alpha_K^n < \varepsilon_\alpha;$$

$$\alpha_K^+ = \alpha_L^+,$$

$$\alpha_K^- = \alpha_K^n.$$

(8.88)

Вигляд рівнянь (8.88) пояснюється такими міркуваннями. Рівень змішаності фіксується при наявності певного стрибка вмісту пари (газу) і, щоб забезпечити цей стрибок, вводиться добавка ε_α . Співвідношення у фігурних дужках моделюють ситуацію, коли при нестачі газоподібної фази в об'ємі K, необхідна кількість передається з об'єму L до об'єму K. З точки зору моделювання руху

рівня по стеку, рівняння (8.88) дають умови підбору (не розрахунку) α_g .

8.8.3.3 Підбір швидкостей фаз у з'єднанні.

Пройходження рівня через з'єднання пов'язане зі зміною режиму потоку у з'єднанні. Так, якщо рівень розташований у об'ємі над з'єднанням, у з'єднанні реалізується бульбашковий режим при низьких вмістах пари (газу). Якщо ж рівень розташований у об'ємі під з'єднанням, у з'єднанні реалізується дисперсно-кільцевий або дисперсний режим з високим вмістом пари (газу). Якщо не перерахувати фазові швидкості так, щоб вони відповідали новому режиму потоку, чисельна реалізація приведе до сплесків тиску та інших нефізичних ефектів, оскільки сили міжфазного тертя для вказаних режимів сильно відрізняються. Алгоритм обчислення такий. Швидкість превалюючої фази (газ для дисперсних режимів, рідина для бульбашкового режиму) обчислюється зі стаціонарних рівнянь збереження маси (нехтуючи процесом міжфазного масообміну), записаних для того об'єму, з якого рухався рівень. Швидкість іншої фази прирівнюється до швидкості першої. При цьому для з'єднання виставляється спеціальна позначка, що запобігає сумісному осередненню двох режимів потоку (тобто режимів до і після проходження рівня через з'єднання), що принципово відрізняються.

8.8.4 Зміни у рівняннях теплогідравліки.

При моделюванні проходження рівня змішаності до рівнянь теплогідравліки вносяться такі зміни:

1. У рівняннях для представлення конвективних членів використовуються донорні об'ємні вмісти газу (пари), обчислені по об'ємних вмістах пари (газу) вище та нижче рівня (див. Таб.8.1).
2. Рівняння збереження кількості руху змінюються так, щоб у з'єднанні для якого записується баланс кількості руху, реалізовувався тільки один режим потоку.

Таб.8.1. Значення швидкостей та об'ємних вмістів фаз у з'єднаннях вище та нижче об'єму з рівнем змішаності.

З'єднання	v_g	$\dot{\alpha}_g$	v_f	$\dot{\alpha}_f$
$j + 1$ вище рівня	>0	α_L^+	>0	$1 - \alpha_L^+$
$j + 1$ вище рівня	<0	α_M	<0	$1 - \alpha_M$
j нижче рівня	>0	α_K	>0	$1 - \alpha_K$
j нижче рівня	<0	α_L^-	<0	$1 - \alpha_L^-$

Рівняння збереження кількості руху змінюються за рахунок переносу положення рівня змішаності до центру найближчого до нього об'єму з двох об'ємів, що утворюють контрольний об'єм для кількості руху (з'єднання). Тобто якщо для двох розташованих вертикально об'ємів К та L, між центрами яких розташоване з'єднання, рівень розміщений у верхній частині об'єму К, він переноситься до центру К, якщо рівень розташований у нижній частині L, він переноситься до центру L. В обох випадках в усьому з'єднанні (від центру К до центру L) реалізується один і той самий режим потоку. Формули перерахунку членів рівнянь наведені у керівництві з коду RELAP5 [10].

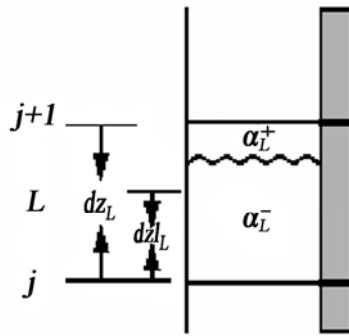


Рис.8.20. Гідродинамічний об'єм з тепловою структурою

8.8.5 Зміна виразів для обчислення теплових потоків до фаз:

У випадках коли до об'єму з рівнем змішаності приєднана теплова структура, (рис.8.20) для теплових потоків від стінки до фаз прийняті такі співвідношення:

$$q_{wg} = h_{wg} (T_w - T_g) \left(1 - \frac{dz_L}{dz_L} \right)$$

$$q_{wf} = h_{wf} (T_w - T_f) \left(\frac{dz_L}{dz_L} \right)$$

(8.89)

З формул (8.89) випливає, що над рівнем змішаності нехтують потоком тепла до рідкої, а під ним – до газоподібної фази, що пояснюється вказаними вище особливостями зміни режимів потоку при проходженні рівня змішаності.

8.9 Модель термічного розшарування.

Модель термічного розшарування необхідна для підвищення точності чисельних розв'язків у випадках, коли над шаром холодної рідини у вертикальному стеці об'ємів з'являється тепла рідина. В таких випадках існує різкий тепловий фронт між двома шарами рідини, зумовлений різницею густин.

Особливості скінченно-різницевої схеми розв'язання задач теплогідравліки коду RELAP 5 такі, що її застосування характеризується сильним штучним перемішуванням теплої та холодної рідини, чого насправді не відбувається. Тому до складу RELAP5 включена модель термічного розшарування, що має такі характерні риси:

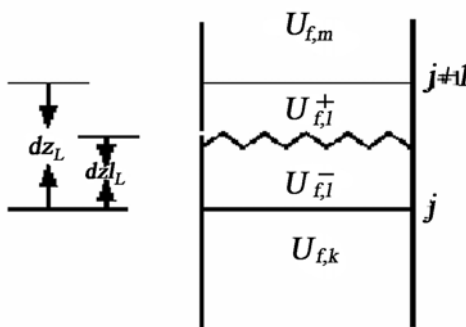


Рис.8.21. Тепловий фронт

1. Явище термічного розшарування характеризується наявністю контрастного температурного профіля, що відокремлює гарячу рідину від холодної.
2. В моделі приділено увагу коректному застосуванню донорних значень внутрішньої енергії рідкої фази у з'єднаннях для контрольних об'ємів, в яких відбувається термічне розшарування.
3. У контрольному об'ємі, що містить тепловий фронт, припускається закипання тільки гарячої рідини.

Модель термічного розшарування може застосовуватися разом з моделлю руху рівня змішаності. Таке її використання дає належну точність результатів.

Модель термічного розшарування схожа з моделлю руху рівня змішаності. Вона складається з чотирьох частин:

1. Виявлення виникнення (зникнення) теплового фронту.
2. Обчислення параметрів теплового фронту, таких як його положення, швидкість, значення температури вище та нижче фронту.
3. Зміна значень внутрішньої енергії рідини у з'єднаннях з метою опису конвекції внутрішньої енергії через фронт.
4. Зміна алгоритмів обчислення теплових потоків, а також швидкості утворення пари.

8.9.1 Виявлення виникнення (зникнення) теплового фронту.

Тепловий фронт являє собою переріз каналу, де відбувається різка зміна температури рідкої фази. Різниця густин гарячої та холодної рідини як правило перевищує 3%. Однак в RELAP5 прийняті такі умови, при виконанні яких констатується наявність термічного розшарування:

$$\frac{|\rho_M - \rho_L|}{\rho_L} > 0.01 \text{ або } \frac{|\rho_K - \rho_L|}{\rho_L} > 0.01,$$

(8.90)

де ρ_M, ρ_L, ρ_K – густини рідкої фази, осереднені, відповідно, по об'ємах M, L, K. При цьому припускається, що внутрішня енергія рідини монотонно зростає від об'єму K до об'єму L і до об'єму M. Відносно об'ємів M та K припускається, що в них немає теплових фронтів. Логічна схема визначення наявності теплового фронту в об'ємі L наведена на схемі 8.5.

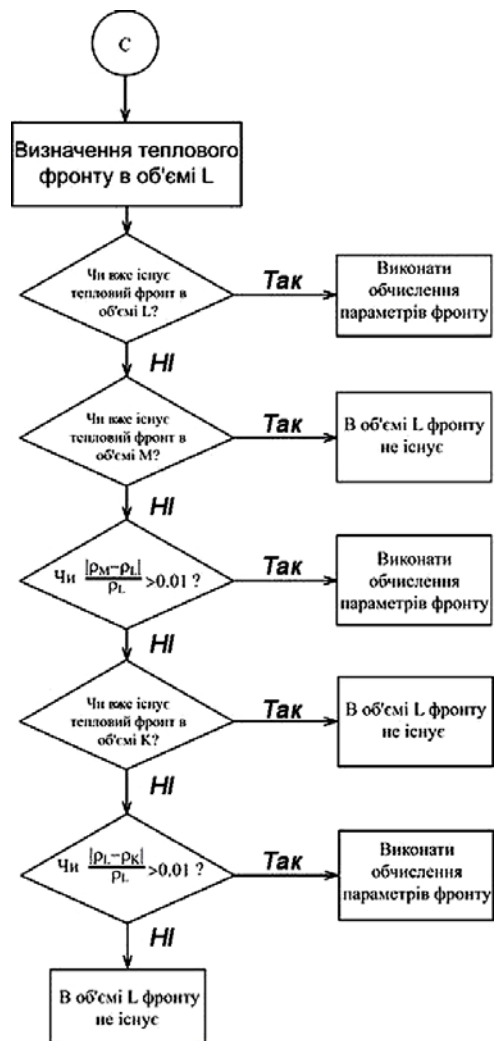


Схема 8.5. Логіка визначення наявності теплового фронту

8.9.2 Обчислення параметрів фронту.

Якщо встановлено (див. підрозд.8.9.1), що в даному об'ємі існує тепловий фронт, необхідно обчислити параметри, що його описують, а саме: внутрішні енергії рідини вище та нижче фронту U_{fL}^+ й U_{fL}^- , положення фронту dzl_L , швидкість фронту v_{front} (див. рис. 8.21).

Для внутрішніх енергій рідини прийняті такі визначення:

$$U_{fL}^- = U_{f,K}, \quad U_{fL}^+ = U_{f,M}. \quad (8.91)$$

Положення фронту в об'ємі L довжиною dz_L дається формулою:

$$dzl_L = dz_L \left(\frac{U_{fL}^+ - U_{fL}^-}{U_{fL}^+ - U_{fL}^-} \right). \quad (8.92)$$

Формула (8.92) одержується за допомогою визначення середньої внутрішньої енергії рідини в об'ємі L:

$$U_{fL} = \frac{dzl_L U_{fL}^- + (dz_L - dzl_L) U_{fL}^+}{dz_L}.$$

Зауважимо, що обчислення за формулою (8.92) виконуються тільки у випадках монотонного зростання внутрішньої енергії рідини в вертикальному напрямку: $U_{fL}^+ > U_{fL} > U_{fL}^-$. Це гарантує коректність розрахунку положення фронту: $0 < dzl_L < dz_L$.

Швидкість розповсюдження теплового фронту обчислюється за формулою:

$$v_{front} = \frac{dzl_L^n - dzl_L^{n-1}}{\Delta t}.$$

(8.93)

8.9.3 Критерій визначення виходу теплового фронту за межі контрольного об'єму

Розглянемо умови, за яких фіксується вихід температурного фронту за межі об'єму при виконанні даного кроку за часом.

Для фронту, що сходить угору, $v_{front} > 0$:

$$\frac{|\rho_L - \rho_L^-|}{\rho_L} < 0.001, \quad (8.94)$$

або

$$\frac{dz_L}{dz_L} \geq 0.98. \quad (8.95)$$

Умови (8.94) та (8.95) говорять про те, що майже весь об'єм зайнятий холодною рідиною з внутрішньою енергією $U_{fL}^- = U_{fK}$.

Для фронту, що сходить униз, $v_{front} < 0$, ці умови мають вигляд:

$$\frac{|\rho_L^+ - \rho_L|}{\rho_L} < 0.001, \quad (8.96)$$

або

$$\frac{dz_L}{dz_L} \leq 0.02. \quad (8.97)$$

Дані умови описують випадок, коли положення фронту дуже близьке до нижнього кінця об'єму і, отже, осереднена густина рідини в частині об'єму, розташованій вище фронту, ρ_L^+ майже не

відрізняється від густини рідини, осередненої за всім об'ємом L , ρ_L . Зауважимо, що в разі виконання якого-небудь з критеріїв виходу, параметри фронту в об'ємі L приймаються рівними нулю, так само, як і в разі невиконання умов термічної розшарованості.

8.9.4 Модифікація рівнянь теплогідравліки

У випадку визначення існування теплового фронту в об'ємі L , у рівняння теплогідравліки вносяться такі зміни:

1. Зміна обчислень донорних значень внутрішньої енергії рідини.
2. Температура рідини у контрольному об'ємі, що містить фронт, змінюється при обчисленні масо- та енергообміну таким чином, щоб фазовий перехід міг мати місце лише для гарячої рідини.
3. Коефіцієнт міжфазного теплообміну для рідини у контрольному об'ємі, що містить тепловий фронт змінюється таким чином, щоб лише гаряча рідина у контрольному об'ємі могла зазнати фазового переходу (закипіти).

Донорні значення внутрішньої енергії рідини, що використовуються в $j+1$ -ому та j -ому з'єднаннях наведені в Таб.8.2:

Таблиця 8.2. Значення швидкостей та внутрішніх енергій фаз у з'єднаннях вище та нижче об'єму з рівнем змішаності.

З'єднання	v_g	$\dot{U}_g$	v_f	$\dot{U}_f$
$j+1$ вище фронту	>0	$U_{g,L}$	>0	$U_{f,M}$
$j+1$ вище фронту	<0	$U_{g,M}$	<0	$U_{f,M}$
j нижче фронту	>0	$U_{g,K}$	>0	$U_{f,K}$
j нижче фронту	<0	$U_{g,L}$	<0	$U_{f,K}$

Модифікація коефіцієнту міжфазного теплообміну має вигляд:

$$H_{if}^{new} = H_{if} \left(1 - \frac{dz_L}{dz_L} \right), \quad (8.98)$$

де H_{if} - старе, а H_{if}^{new} - нове значення коефіцієнту міжфазного теплообміну.

Підведення тепла, що йде на пароутворення, яке описувалося членом $H_{if}(T^s - T_{fL})$, при зміненому коефіцієнті міжфазного теплообміну описується членом $H_{if}^{new} \left(T^s - T_f(U_{f,L}^+) \right)$, де $T_f(U_{f,L}^+)$ - температура гарячої рідини у контрольному об'ємі, що містить фронт.

Слід відмітити, що включення в RELAP5 моделей руху рівня змішаності і термічного розшарування пов'язане з тим, що в межах кожного контрольного об'єму теплоносій вважається рівномірно перемішаним. Особливості характеру течії і теплообміну описуються моделями міжфазної взаємодії, отже у випадках стрибкоподібних змін параметрів в межах даного об'єму загальна модель коду RELAP5 може давати невірні результати.

8.10 Збереження енергії у випадках стрибкоподібних змін характеристик потоку.

В ситуаціях з різкою зміною характеристик потоку (різка зміна геометрії течії, стрибкоподібна зміна параметрів потоку) чисельний розв'язок, отриманий за допомогою коду RELAP5, не забезпечує збереження енергії. У таких випадках значення температури, що передбачаються за чисельними розрахунками, часто виявляються дуже неточними.

Рівняння збереження внутрішньої енергії еквівалентні рівнянням збереження повної енергії. Однак, це справедливо тільки для диференціальних рівнянь збереження, якими описуються неперервні поля характеристик, тобто це твердження порушується для рівнянь

скінченно-різницевих. З метою забезпечення збереження енергії у перерізах, де відбувається стрибкоподібна зміна теплогідравлічних параметрів, в коді RELAP5 застосовується метод, який дозволяє користувачеві корегувати члени, що виражають потоки енергії, у перерізах, де вони, очевидно, невірні. Корекція здійснюється через позначку вводу для з'єднання. Для опису методу розглянемо рівняння збереження внутрішньої енергії для газоподібної фази:

$$\begin{aligned}
 & V_L \left[\left(\alpha_g \rho_g U_g \right)_L^{n+1} - \left(\alpha_g \rho_g U_g \right)_L^n \right] + \\
 & + \left[\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \left(\dot{\rho}_{g,j+1}^n \dot{U}_{g,j+1}^n + P_L^n \right) v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \right. \\
 & \left. - \dot{\alpha}_{g,j}^n \left(\dot{\rho}_{g,j}^n \dot{U}_{g,j}^n + P_L^n \right) v_{g,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = RHS,
 \end{aligned}
 \tag{8.99}$$

де RHS – члени, розташовані у правій частині рівняння.

Проблема полягає в тому, що конвективні члени у лівій частині невірно враховують енергію, що переноситься через з'єднання j з об'єму, що лежить вгору за потоком (у випадку $v_{g,j} > 0$ це об'єм К). Для корегування доданок, що описує конвективний перенос через з'єднання j , змінюють таким чином, щоб він описував перенос питомої ентальпії газу з об'єму К. Виправлення полягає у використанні замість значення тиску в об'ємі L, P_L^n , тиску в об'ємі К, P_K^n . Модифіковане рівняння збереження енергії газоподібної фази набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
& V_L \left[\left(\alpha_g \rho_g U_g \right)_L^{n+1} - \left(\alpha_g \rho_g U_g \right)_L^n \right] + \\
& + \left[\dot{\alpha}_{g,j+1}^n \left(\dot{\rho}_{g,j+1}^n \dot{U}_{g,j+1}^n + P_L^n \right) v_{g,j+1}^{n+1} A_{j+1} - \right. \\
& \left. - \dot{\alpha}_{g,j}^n \left(\dot{\rho}_{g,j}^n \dot{U}_{g,j}^n + P_K^n \right) v_{g,j}^{n+1} A_j \right] \Delta t = RHS.
\end{aligned}
\tag{8.100}$$

Подібна зміна суттєва, якщо між центрами двох сусідніх об'ємів тиск значно змінюється.

8.11 Опція Steady-State

Основна ідея використання даної моделі полягає у розрахунку заданого стаціонарного стану потоку за рахунок збіжності до нього нестационарного процесу, тобто у тому, щоб прослідкувати затухання з часом усіх збурень, що виникають на перехідному режимі. Рівняння, що використовуються моделлю, таким чином не є стаціонарними, навпаки, вони повністю нестационарні. Однак до складу моделі введено метод контролю результатів, що дозволяє визначити досягнення осередненого стаціонарного стану потоку, а також визначити умови, за яких стан буде залишатися таким протягом тривалого відрізка часу. При досягненні стаціонарного стану алгоритм автоматично припиняє роботу та видає файл результатів. Таким чином, в основу моделі покладені тести для визначення досягнення стаціонарного стану.

Під *стаціонарним* слід розуміти такий стан системи, при якому всі її характеристики не змінюються з часом. У схемі розв'язання рівнянь теплогідравліки можна контролювати три параметри, зміна яких з часом обумовлює зміну всіх інших параметрів. Це густина, внутрішня енергія та тиск. Всі вони об'єднуються одним параметром – ентальпією. Ентальпія для i -ого контрольного об'єму вводиться в моделі коду RELAP 5 таким чином:

$$V_i \rho_i^n h_i^n = V_i (\rho_i^n U_i^n + P_i^n).$$

(8.101)

Спростуючи це рівняння внаслідок постійності об'єму, одержимо:

$$\rho_i^n h_i^n = \rho_i^n U_i^n + P_i^n. \quad (8.102)$$

Апроксимація похідної від (8.102) за часом дає:

$$\left(\frac{d(\rho h)}{dt} \right)_i^n = \frac{(\rho_i^{n+1} U_i^{n+1} + P_i^{n+1}) - (\rho_i^n U_i^n + P_i^n)}{\Delta t^n}. \quad (8.103)$$

З метою спрощення задачі визначення стаціонарного стану вводять середню ентальпію системи:

$$(\rho h)^n = \frac{\sum_{i=1}^{NVOLS} V_i (\rho_i^n U_i^n + P_i^n)}{\sum_{i=1}^{NVOLS} V_i}, \quad (8.104)$$

де $NVOLS$ – кількість об'ємів в системі, що розраховується. Для визначення швидкості зміни з часом величини $(\rho h)^n$ осереднюють квадрат похідної:

$$\left[\left(\frac{d}{dt}(\rho h) \right)^2 \right]^n = \frac{1}{(\Delta t^n)^2} \times \frac{\sum_{i=1}^{NVOLS} V_i^2 [(\rho_i^{n+1} U_i^{n+1} + P_i^{n+1}) - (\rho_i^n U_i^n + P_i^n)]^2}{\sum_{i=1}^{NVOLS} V_i^2}. \quad (8.105)$$

В процесі розв'язання контролюється наближення осередненого значення квадрату похідної від ентальпії (8.102) до нуля, оскільки при досягненні стаціонарного стану у деякому об'ємі, в силу (8.103), відповідний йому доданок перетворюється на нуль і випадає з суми. Чисельний експеримент показав, що права частина (8.105) є такою функцією, що сильно флюктує, тому для спрощення розрахунків права частина (8.105) апроксимується за допомогою методу найменших квадратів функцією вигляду:

$$\left[\left(\frac{d}{dt}(\rho h) \right)^2 \right]^n = y = e^{\alpha + \beta t^2 + \gamma (t^n)^2 + \phi (t^n)^3}, t_0 \leq t^n \leq t. \quad (8.106)$$

Далі проводиться кілька тестів з використанням співвідношень (8.105), (8.106) та їх варіацій, причому, за певних умов, стаціонарний стан фіксується навіть не після досягнення 0, а просто після досягнення деякого сталого числа [11].

Ще однією важливою особливістю моделі є заміна теплоємностей теплових структур певним малим числом з метою зниження їх теплової інерції та прискорення процедури збіжності. Тобто дані по теплоємностях, що вводяться користувачем, в опції стаціонарного стану ігноруються.

9 РІВНЯННЯ СТАНУ

В кодї RELAP5 використовується двошвидкісна гетерогенна модель двофазного потоку. Вона містить 6 основних рівнянь, які виражають баланс маси, кількості руху і енергії для фаз, а також додаткове рівняння збереження маси газів, що не конденсуються. Незалежними змінними, що підлягають визначенню з цих рівнянь, є тиск P , об'ємний вміст пари α_g , внутрішні енергії фаз U_g і U_f , швидкості фаз v_g і v_f та масовий вміст газів, що не конденсуються X_n . Всі інші термодинамічні параметри (температури, густини, парціальні тиски та ін.) виражаються через P , α_g , U_g , U_f та X_n . З метою зведення чисельного розв'язання системи рівнянь теплогідравліки до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, функціональні залежності між термодинамічними параметрами мають бути лінеаризовані, що вимагає визначення відповідних частинних похідних.

9.1 Частинні похідні.

9.1.1 Похідні від густин фаз

Для виконання процедур лінеаризації, зокрема, для розкладу повних похідних від густин фаз за часом у ряди Тейлора, необхідні такі частинні похідні від густин фаз:

$$\left(\frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right)_{U_g, X_n},$$

$$\left(\frac{\partial \rho_g}{\partial U_g} \right)_{P, X_n}, \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial X_n} \right)_{P, U_g}, \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial P} \right)_{U_f}, \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial U_f} \right)_P,$$

де індекси знизу вказують на ті величини, які вважаються постійними при обчисленні даної частинної похідної.

9.1.2 Похідні від температур фаз

Моделі міжфазного масо- та теплообміну використовують лінеаризовані рівняння для обчислення температури міжфазної поверхні (Σ -фази) T_I , яка вважається рівною температурі насичення. Для однокомпонентної суміші справедливо:

$$T_I = T^s(P). \quad (9.1)$$

В присутності газів, що не конденсуються, температура насичення визначається вже не повним тиском P , а парціальним тиском пари P_s :

$$T_I = T^s(P_s). \quad (9.2)$$

Для двокомпонентної суміші парціальний тиск пари визначається повним тиском, масовим вмістом газів, що не конденсуються, та внутрішньою енергією газоподібної фази:

$$P_s = P_s(P, X_n, U_g). \quad (9.3)$$

Підставляючи (9.3) в (9.2), отримаємо температуру міжфазної поверхні T_I як функцію P , X_n , U_g . Отже, лінеаризація температурних потенціалів $T_I - T_f$ та $T_I - T_g$ в схемі чисельного розв'язання потребує таких похідних від T_f, T_g і T_I :

$$\left(\frac{\partial T_g}{\partial P} \right)_{U_g, X_n}, \left(\frac{\partial T_g}{\partial U_g} \right)_{P, X_n}, \left(\frac{\partial T_g}{\partial X_n} \right)_{P, U_g}, \left(\frac{\partial T_f}{\partial P} \right)_{U_f},$$

$$\left(\frac{\partial T_f}{\partial U_f} \right)_P, \left(\frac{\partial T^s}{\partial U_g} \right)_{P, X_n}, \left(\frac{\partial T^s}{\partial P} \right)_{U_g, X_n}, \left(\frac{\partial T^s}{\partial X_n} \right)_{P, U_g}.$$

У випадку присутності лише одного компонента, похідні по X_n дорівнюють нулю і

$$\left(\frac{\partial T^s}{\partial U_g} \right)_P = 0, \quad (9.4)$$

оскільки T^s залежить тільки від P .

Крім вказаних похідних необхідно задати фізичні властивості фаз, як функції P , U_g , U_f , X_n , а також визначити гомогенну рівноважну швидкість звуку для моделі запирання потоку.

Для отримання вказаних величин в кодї RELAP5 використовуються вбудовані термодинамічні таблиці, якими задаються значення параметрів насичення в функціях від температури, тиску, а також значення властивостей фаз в функціях температури та в функціях тиску. В таблицях задаються такі фізичні властивості та похідні: температура насичення, тиск насичення,

питомий об'єм ($v = \frac{1}{\rho}$), питома внутрішня енергія, а також похідні:

ізобаричний коефіцієнт термічного розширення β , коефіцієнт ізотермічного стиску κ та питома теплоємність при сталому тиску C_p .

$$\beta(P, T) = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P, \quad C_p(P, T) = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P, \quad \kappa(P, T) = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T.$$

У вхідних картах можна регулювати точність опису параметрів за допомогою термодинамічних таблиць. Для цього можна збільшувати або зменшувати кількість точок по температурі та тиску в таблиці, зменшуючи або збільшуючи таким чином кількість вузлових точок, що будуть використовуватися для інтерполяції. Основні таблиці коду, прийняті за угодою, створені IFC (International Formulation Committee) у 1967 році.

Основні фізичні властивості фаз також можуть обчислюватись за допомогою додаткових термодинамічних таблиць, що в разі необхідності підключаються користувачем в файлі вхідних даних. Цими таблицями задаються параметри насичення в функціях від температури, в функціях від тиску, а також задаються властивості фаз в функціях від тиску та питомої внутрішньої енергії. У додаткових таблицях задаються такі властивості: $P^s, T^s, \frac{1}{\rho}, T$, а

також - три похідні: β, κ, C_p . Як і у випадку таблиць за угодою, точність інтерполювання можна регулювати, змінюючи кількість точок по тиску та питомій внутрішній енергії. Вказані додаткові таблиці базуються на широковживаних в ядерній енергетиці таблицях NBS/NRC-1984 (U.S. National Bureau of Standards and the National Research Council of Canada Steam Tables, 1984).

В останніх версіях RELAP5 введено ще одні додаткові таблиці аналогічної структури, а саме IAPWS-95.

9.2 Однокомпонентна двофазна суміш.

Розглянемо формули, що виражають необхідні частинні похідні від густин та температур фаз через величини, наведені у згаданих вище термодинамічних таблицях. Для рідкої фази:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial U_f} \right)_P &= - \frac{\nu_f \beta_f}{(C_{Pf} - \nu_f \beta_f P) \nu_f^2}; \quad \left(\frac{\partial T_f}{\partial U_f} \right)_P = \frac{1}{(C_{Pf} - \nu_f \beta_f P)}; \\ \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial P} \right)_{U_f} &= \frac{C_{Pf} \nu_f \kappa_f - T_f (\nu_f \beta_f)^2}{(C_{Pf} - \nu_f \beta_f P) \nu_f^2}; \quad \left(\frac{\partial T_f}{\partial P} \right)_{U_f} = - \frac{P \nu_f \kappa_f - T_f \nu_f \beta_f}{(C_{Pf} - \nu_f \beta_f P)}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Аналогічні формули записуються для газоподібної фази, але незалежними змінними будуть P та U_g . Єдиним нестандартним випадком при розрахунках характеристик по (9.5) (таблиці за

угодною) є випадок переохолодженого газу або перегрітої рідини, тобто випадок, коли теплоносії знаходиться у нестійкому (метастабільному) стані. Для метастабільних станів застосовується екстраполяція із стану насичення при сталому тиску, що дозволяє розрахувати температуру та питомий об'єм. Використання перших двох членів розвинень у ряди Тейлора дає:

$$T \approx T^s(P) + \frac{1}{C_p^s(P) - P\nu^s(P)\beta^s(P)}[U - U^s(P)],$$

$$\nu \approx \nu^s(P) + \nu^s(P)\beta^s(P)[T - T^s(P)].$$

(9.6)

В (9.6) тиск P є тиском насичення.

Щоб отримати значення β, κ, C_p , відповідні екстрапольованим значенням ν і T , екстраполяційні формули диференціюються, в результаті отримаємо:

$$C_p(P, T) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_P = C_p^s(P),$$

$$\beta(P, T) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_P = \frac{\nu^s(P)\beta^s(P)}{\nu(P, T)},$$

$$\kappa(P, T) \stackrel{def}{=} -\frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial P} \right)_T =$$

$$= \left\{ \nu^s(P) + [T - T^s(P)]\nu^s(P)\beta^s(P) \right\} \frac{\kappa^s(P)}{\nu(P, T)} -$$

$$- [T - T^s(P)] \frac{\nu^s(P)}{\nu(P, T)} \left\{ \frac{d\beta^s(P)}{dP} + \left[\frac{\beta^s(P)}{T - T^s(P)} \right] \frac{dT^s(P)}{dP} \right\}.$$

(9.7)

Для отримання першої формули (9.7) використовується правило диференціювання неявної функції. З першого рівняння (9.7) випливає, що C_P наближено може вважатися рівним значенню насичення $C_P^s(P)$. Друге рівняння (9.7) виражає екстрапольоване значення β у вигляді функції параметрів насичення та екстрапольованого ν . Третє рівняння (9.7) дає екстрапольоване значення κ у вигляді функції екстрапольованих властивостей β, T, ν та параметрів насичення. При цьому екстраполяція κ враховує зміну параметрів вздовж лінії насичення. Зокрема, $\frac{d\beta^s(P)}{dP}$ включає другу похідну від питомого об'єму. Оскільки у термодинамічних таблицях другі похідні не наводяться, цей член апроксимується, у припущенні, що для газоподібної фази справедлива модель ідеального газу. За таких припущень у третьому рівнянні (9.7) зникає останній доданок і відповідна формула для κ для переохолодженого газу приймає вигляд:

$$\kappa_g(P, T_g) = \kappa_g^s(P). \quad (9.8)$$

При отриманні (9.8) використане друге рівняння (9.6).

Для рідкої фази також залишають лише перший член у третьому рівнянні (9.7):

$$\kappa_f(P, T_f) = \frac{\nu_f^s(P) \kappa_f^s(P)}{\nu_f(P, T_f)}. \quad (9.9)$$

Для таблиць NBS/NRC–1984 розрахунок параметрів метастабільних станів з використанням екстраполяційних формул не потрібний, оскільки ці параметри містяться у таблицях. Для таблиць IAPWS–95 екстраполяція аналогічна до основного випадку.

Гомогенна швидкість звуку для двофазної суміші обчислюється за наведеною нижче формулою, що використовує значення насичення для параметрів T, ν, κ, β і C_p :

$$a^2 = \frac{\nu^2 \left(\frac{dP^s}{dT} \right)^2}{Z},$$

$$Z = X_e \left[\frac{C_{pg}^s}{T^s} + \nu_g^s \frac{dP^s}{dT} \left(\kappa_g^s \frac{dP^s}{dT} - 2\beta_g^s \right) \right] +$$

$$+ (1 - X_e) \left[\frac{C_{pf}^s}{T^s} + \nu_f^s \frac{dP^s}{dT} \left(\kappa_f^s \frac{dP^s}{dT} - 2\beta_f^s \right) \right].$$

(9.10)

Похідну $\frac{dP^s}{dT}$ визначають з рівняння Клапейрона-Клаузиуса:

$$\frac{dP^s}{dT} = \frac{h_g^s - h_f^s}{T^s (\nu_g^s - \nu_f^s)}.$$

(9.11)

де $h_g^s - h_f^s$ - теплота переходу з рідини до газу.

$$\nu = X_e \nu_g^s + (1 - X_e) \nu_f^s.$$

(9.12)

де X_e - рівноважний витратний вміст газу:

$$X_e = \frac{[XU_g + (1 - X)U_f] - U_f^s}{U_g^s - U_f^s}.$$

(9.13)

де $X = \tilde{X}_g = \frac{\alpha_g \rho_g}{(\alpha_g \rho_g + \alpha_f \rho_f)}$ - істинний масовий вміст газу.

Швидкість звуку для однофазного потоку рідини ($X_e = 0$) та однофазного потоку газу ($X_e = 1$) обчислюється за відомою формулою газової динаміки:

$$a = v \left\{ \frac{\left(\frac{C_P}{T v \beta} \right)}{v \left[\kappa \left(\frac{C_P}{T v \beta} \right) - \beta \right]} \right\}^{1/2} .$$

(9.14)

9.3 Двокомпонентна двофазна суміш.

Випадок двокомпонентної суміші визначається присутністю газів, що не конденсуються. Обчислення властивостей рідкої фази в цьому випадку повністю аналогічне розглянутому вище для однокомпонентної двофазної суміші. Припускається, що компонент, що не конденсується, присутній лише у газоподібній фазі. Для газоподібної фази приймається модифікована модель суміші Гіббса-Дальтона [10], пара вважається реальним газом, а для газів, що не конденсуються приймається модель ідеального газу.

Модифікована модель Гіббса-Дальтона побудована на таких припущеннях:

$$P_n = \sum_{i=1}^N P_{ni} ,$$

(9.15)

$$P = P_n + P_s, \quad (9.16)$$

$$U_g = X_n U_n + (1 - X_n) U_s, \quad (9.17)$$

$$V_g = X_n V_n + (1 - X_n) V_s, \quad (9.18)$$

$$P_n V_n = R_n T_g, \quad (9.19)$$

де P_s, P_{ni} – парціальні тиски пари та окремих газів, що не конденсуються, відповідно; U_s, U_n – питомі внутрішні енергії пари, та газів, що не конденсуються, відповідно; V_s, V_n – питомі об'єми пари та газів, що не конденсуються, відповідно. Енергії U_s, U_n та питомі об'єми V_s, V_n обчислюються при температурі газоподібної фази та відповідних парціальних тисках.

Властивості парового компонента обчислюються за допомогою термодинамічних таблиць. Розрахунок питомої внутрішньої енергії газів, що не конденсуються, U_n відбувається за допомогою апроксимації експериментальних даних методом найменших квадратів функцією вигляду: $U_n = U_n(T_g, X_{ni})$. Детальне викладення методу розрахунку наведене в [10].

Розглянемо спосіб визначення частинних похідних від температури газоподібної фази T_g за визначальними параметрами P, U_g і X_n . Для цього використовується система (9.16)–(9.19). Спочатку за допомогою (9.16) виключимо з системи парціальний тиск газів, що не конденсуються P_n , а за допомогою (9.19) – питомий об'єм газів, що не конденсуються V_n . Внаслідок таких операцій систему (9.16)–(9.19) можна звести до двох рівнянь:

$$f_1 = (1 - X_n)U_s + X_n U_n [T_g(U_s, P_s)] - U_g = 0, \quad (9.20)$$

$$f_2 = (1 - X_n) \left[\frac{\nu_s(U_s, P_s) P_s}{T_g(U_s, P_s)} \right] (P - P_s) - X_n R_n P_s = 0. \quad (9.21)$$

При заданих параметрах P, U_g і X_n рівняння (9.20) і (9.21) неявним чином визначають параметри парового компонента U_s й P_s . Отже, враховуючи правило диференціювання складної функції, будемо мати:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial T_g}{\partial P}\right)_{U_g, X_n} &= \left(\frac{\partial T_g}{\partial P_s}\right)_{U_s} \left(\frac{\partial P_s}{\partial P}\right)_{U_g, X_n} + \\
&+ \left(\frac{\partial T_g}{\partial U_s}\right)_{P_s} \left(\frac{\partial U_s}{\partial P}\right)_{U_g, X_n}, \\
\left(\frac{\partial T_g}{\partial U_g}\right)_{P, X_n} &= \left(\frac{\partial T_g}{\partial P_s}\right)_{U_s} \left(\frac{\partial P_s}{\partial U_g}\right)_{P, X_n} + \\
&+ \left(\frac{\partial T_g}{\partial U_s}\right)_{P_s} \left(\frac{\partial U_s}{\partial U_g}\right)_{P, X_n}, \\
\left(\frac{\partial T_g}{\partial X_n}\right)_{P, U_g} &= \left(\frac{\partial T_g}{\partial P_s}\right)_{U_s} \left(\frac{\partial P_s}{\partial X_n}\right)_{P, U_g} + \\
&+ \left(\frac{\partial T_g}{\partial U_s}\right)_{P_s} \left(\frac{\partial U_s}{\partial X_n}\right)_{P, U_g},
\end{aligned}
\tag{9.22}$$

Таким чином, обчислення частинних похідних функції $T_g = T_g(P, U_g, X_n)$ вимагає попереднього визначення частинних похідних функцій $P_s = P_s(P, U_g, X_n)$ та $U_s = U_s(P, U_g, X_n)$.

Диференціюючи рівняння (9.20) і (9.21) за повним тиском, прийдемо до такої лінійної системи рівнянь відносно похідних

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_s}{\partial P} \end{pmatrix}_{U_g, X_n} \text{ і } \begin{pmatrix} \frac{\partial U_s}{\partial P} \end{pmatrix}_{U_g, X_n} :$$

$$\begin{bmatrix} X_n \left(\frac{dU_n}{dT_g} \right) \left(\frac{\partial T_g}{\partial P_s} \right)_{U_s} & 1 - X_n + X_n \left(\frac{dU_n}{dT_g} \right) \left(\frac{\partial T_g}{\partial U_s} \right)_{P_s} \\ -X_n R_n - (1 - X_n) R_s + & \text{TERM 2} \\ + \text{TERM 1} & \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial P_s}{\partial P} \right)_{U_g, X_n} \\ \left(\frac{\partial U_s}{\partial P} \right)_{U_g, X_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(1 - X_n) R_s \end{bmatrix},$$

(9.23)

$$\text{де } R_s = \frac{P_s \nu_s}{T_g};$$

$$\text{TERM 1} = (1 - X_n) P_n R_s \left[\frac{1}{P_s} + \frac{1}{\nu_s} \left(\frac{\partial \nu_s}{\partial P_s} \right)_{U_s} - \frac{1}{T_g} \left(\frac{\partial T_g}{\partial P_s} \right)_{U_s} \right]$$

$$\text{TERM 2} = (1 - X_n) P_n R_s \left[\frac{1}{\nu_s} \left(\frac{\partial \nu_s}{\partial U_s} \right)_{P_s} - \frac{1}{T_g} \left(\frac{\partial T_g}{\partial U_s} \right)_{P_s} \right].$$

Похідні $\left(\frac{\partial T_g}{\partial P_s}\right)_{U_s}$ та $\left(\frac{\partial T_g}{\partial U_s}\right)_{P_s}$ – відомі властивості газоподібної

фази. Таким чином, визначення $\left(\frac{\partial P_s}{\partial P}\right)_{U_g, X_n}$ і $\left(\frac{\partial U_s}{\partial P}\right)_{U_g, X_n}$ з

(9.23), дозволяє знайти $\left(\frac{\partial T_g}{\partial P}\right)_{U_g, X_n}$ з (9.22). Аналогічно

обчислюються дві інші частинні похідні від температури газоподібної фази за параметрами U_g і X_n . Частинні похідні від температури міжфазної поверхні T_I отримуються з рівняння Клапейрона–Клаузиуса (9.11), використовуючи відомі частинні похідні від P_s :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T_I}{\partial P}\right)_{U_g, X_n} &= \frac{dT_I}{dP_s} \left(\frac{\partial P_s}{\partial P}\right)_{U_g, X_n}, \\ \left(\frac{\partial T_I}{\partial U_g}\right)_{P, X_n} &= \frac{dT_I}{dP_s} \left(\frac{\partial P_s}{\partial U_g}\right)_{P, X_n},\end{aligned}\tag{9.24}$$

$$\left(\frac{\partial T_I}{\partial X_n}\right)_{P, U_g} = \frac{dT_I}{dP_s} \left(\frac{\partial P_s}{\partial X_n}\right)_{P, U_g},$$

При цьому відмітимо, що внаслідок (9.2) температура міжфазної поверхні вважається рівною температурі насичення при парціальному тиску пари: $T_I = T^s(P_s)$.

Залишилося визначити частинні похідні від густин як функцій визначальних параметрів. Для обчислення цих частинних похідних виключимо X_n з рівняння (9.18). Отримаємо:

$$v_g = \frac{v_s v_n}{v_s + v_n}. \quad (9.25)$$

Використовуючи (9.25), одержимо вираз для частинної похідної від густини газоподібної фази за повним тиском:

$$\left(\frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right)_{U_g, X_n} = -\frac{1}{v_n^2} \left(\frac{\partial v_n}{\partial P} \right)_{U_g, X_n} - \frac{1}{v_s^2} \left(\frac{\partial v_s}{\partial P} \right)_{U_g, X_n}. \quad (9.26)$$

Аналогічні вирази справедливі для частинних похідних ρ_g по U_g та X_n .

Частинні похідні у правій частині одержується з формул цілком аналогічних (9.22), отриманих заміною T_g на v_s або v_n .

Обчислюючи похідні від v_n , припускають:

$$v_n = \frac{R_n T_g(P_s, v_s)}{P - P_s}. \quad (9.27)$$

Звідси випливає, що при обчисленні похідних v_n за відповідним аналогом (9.22) виникає додатковий член, пов'язаний з явною залежністю v_n від P .

Вираз для гомогенної рівноважної швидкості звуку у двокомпонентній двофазній суміші має вигляд [10]:

$$a^2 = \frac{v^2}{-\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_{S, \tilde{X}_n}}. \quad (9.28)$$

Відповідні масові вмісти компонентів даються виразами:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_s &= \frac{M_s}{M_s + M_n + M_f}, \quad \tilde{X}_n = \frac{M_n}{M_s + M_n + M_f}, \\ X_s &= \frac{M_s}{M_s + M_n}, \quad \tilde{X}_g = X = \frac{M_s + M_n}{M_s + M_n + M_f} = \frac{M_g}{M_g + M_f}, \\ \tilde{X}_f &= X = \frac{M_s + M_n}{M_s + M_n + M_f} = \frac{M_f}{M_g + M_f}, \end{aligned}$$

де M_s – маса пари в одиниці об’єму суміші, M_n – маса газів, що не конденсуються в одиниці об’єму суміші, $M_g = M_s + M_n$ – маса газоподібної фази в одиниці об’єму суміші, M_f – маса рідкої фази в одиниці об’єму суміші.

Обчислення похідної $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_{S, \tilde{X}_n}$ являє собою складну

процедуру, що зводиться до розв’язання системи лінійних рівнянь відносно частинних похідних від функціональних залежностей P_s та $\tilde{X}_s$ за визначальними параметрами, подібну до описаної вище.

10 ЗАКЛЮЧЕННЯ

Даний навчальний посібник присвячено викладанню основ теплогідравліки двофазних потоків у системах ядерних енергетичних установок. Дослідженням з цієї проблематики за

останній час присвячена надзвичайно велика кількість наукових публікацій, що свідчить про стрімкий розвиток галузей науки, пов'язаних з вивченням теплогідрравлічних процесів, пов'язаних з розвитком аварійних ситуацій на АЕС. Автори не ставили собі за мету ознайомити читача з результатами останніх наукових досліджень, тому деякі з важливих результатів, можливо, лишилися поза їх увагою. В той же час, у посібнику розглянуто найбільш відомі і перевірені практикою методи розрахунку теплогідрравлічних процесів, які застосовуються під час аналізу малих та великих проектних аварій. У посібнику міститься послідовне викладення моделі теплогідрравліки найбільш поширеного на Україні коду RELAP 5.

Сучасні надпотужні ЕОМ дозволяють проводити розрахунки практично будь-яких аварійних ситуацій в режимі реального часу. Дані таких розрахунків складають основу для заходів, спрямованих на гарантування безпеки АЕС, профілактику аварій, алгоритмів дій персоналу під час аварійних ситуацій. Розуміння природи процесів, що відбуваються у системах ядерної енергетичної установки, при виконанні таких розрахунків є абсолютно необхідним, тому автори сподіваються, що даний посібник буде корисним не тільки для студентів-енергетиків, але й для фахівців з безпеки АЕС.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андерсон Д, Таннехилл Дж, Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - М.:Мир,1990, т.1,2.
2. Делайе Дж., Гио М., Ритмюллер М. Теплообмен и гидродинамика в атомной и тепловой энергетике. - М.:Энергоатомиздат,1984.-424с.
3. Кузнецов Ю.Н. Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов. - М.:Энергоатомиздат,1989.-296с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.:Наука,1973.-848с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. - М.:Наука,1987, т.1.-464с.
6. Петухов Б.С., Генин Л.Т., Ковалев С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. - М.:Энергоатомиздат,1986.-472с.

7. Теория тепломассообмена: Учебник для вузов/ С.И. Исаев, И.А. Кожинов, В.И. Кофанов и др.; Под ред. А.И. Леонтьева.-М.: Высшая школа, 1979.-495с.
8. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. - М.:Мир,1972.-440с.
9. Чисхолм Д. Двухфазные течения в трубопроводах и теплообменниках.-М.:Недра, 1986.-204с.
10. RELAP5-3D Code Manual, Rev.1.3a, Volume I.: Code Structure, System Models and Solution Methods.-INEEL.-2001.
11. RELAP5-3D Code Manual, Rev.1.3a, Volume IV.: Models and Correlations.-INEEL.-2001.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- A площа поперечного перерізу, m^2
- A_t площа критичного перерізу, m^2
- a швидкість звуку, m/c
- B_x, B_y проекції масової сили на напрямки x, y , відповідно, m/c^2
- C коефіцієнт приєднаних мас
- C_D коефіцієнт опору
- C_p питома теплоємність при постійному тиску, $Дж/(кг \cdot K)$
- D діаметр або еквівалентний (гідравлічний) діаметр, m
- $DISS$ дисипативна функція, Bm/m^3
- FIF, FIG коефіцієнти міжфазного опору
для рідкої і газоподібної фази, відповідно, $1/c$
- FI коефіцієнт міжфазного опору, $m^3/кг \cdot c$

FWF, FWG	коефіцієнти опору на стінці, $\frac{1}{c}$
H	об'ємний коефіцієнт теплообміну ($\frac{Вт}{(К \cdot м^3)}$)
$HLOSSF, HLOSSG$	динамічні втрати в ділянках складної форми, $\frac{м}{c}$
h	питома ентальпія, $\frac{Дж}{кг}$
j	зведена швидкість, $\frac{м}{c}$
P	тиск, $Па$
P^s	тиск насичення, $Па$
Q, q	тепловий потік, $\frac{Вт}{м^2}$
T	температура, $К$
T^s	температура насичення, $К$
U	питома внутрішня енергія, $\frac{Дж}{кг}$
VIS	штучна в'язкість, $\frac{м^2}{c^2}$
X	масовий вміст компонента у багатокомпонентній суміші
α	об'ємний вміст компонента
Γ	інтенсивність міжфазного масообміну, $\frac{кг}{(м^3 \cdot c)}$
λ	коефіцієнт Дарсі
μ	в'язкість, $\frac{кг}{(м \cdot c)}$
σ	тензор напружень, коефіцієнт поверхневого натягу
τ	дотичні напруження