

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В.А. Плюйко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЯДРА ТА ЯДЕРНИХ ПРОЦЕСІВ

Ядерні процеси

Навчальний посібник



УДК 539.1(075.8)
ББК 22.383я73
ПЗ7

Рецензенти:

д-р. фіз.-мат. наук, проф. С. М. Єжов,
д-р. фіз.-мат. наук, проф. Г. О. Прокопець,
д-р. фіз.-мат. наук, провід. наук. співроб. А. Д. Фурса

*Затверджено вченою радою фізичного факультету
(протокол № 1 від 8 березня 2002 року)*

Плюйко В.А.

ПЗ7 Основи теорії ядра та ядерних процесів. Ядерні процеси : Навчальний посібник. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2003. — 160 с.
ISBN 966-594-348-0

Викладено основи теорії ядерних процесів. Розглянуто базові уявлення про властивості електромагнітного випромінювання ядер, радіоактивний розпад з вильотом частинок, механізми ядерних реакцій та спонтанний і вимушений поділ ядер. Матеріал дає змогу опанувати спеціалізовані видання з окремих питань ядерних досліджень.

Для студентів, аспірантів та викладачів фізичних і фізико-технічних спеціальностей.

**УДК 539.1(075.8)
ББК 22.383я73**

ISBN 966-594-348-0

© В.А.Плюйко, 2003
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2003

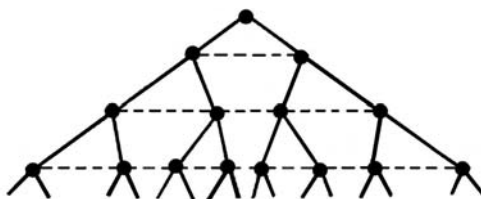
ЗМІСТ

Передмова	4
ГЛАВА 4. Електромагнітне випромінювання ядер	5
4.1. Мультипольний характер гамма-випромінювання	5
4.2. Імовірність електромагнітних переходів	10
4.3. Ізомерні стани. Внутрішня та парна конверсії	20
ГЛАВА 5. Радіоактивний розпад ядер з вильотом частинок	23
5.1. Радіоактивність ядер	23
5.2. Основні закони радіоактивного розпаду	28
5.3. Одиниці радіоактивності. Активність джерел радіоактивного випромінювання	32
5.4. Альфа-розпад	36
5.5. Елементарна теорія α -розпаду як тунелювання скрізь бар'єр	38
5.6. Бета-перетворення	48
ГЛАВА 6. Загальні закономірності ядерних реакцій	60
6.1. Основні поняття та визначення	60
6.2. Закони збереження в ядерних реакціях	61
6.3. Ефективні перерізи розсіюння і реакцій	69
6.4. Стационарний опис пружного розсіюння безспінових частинок	75
6.5. Наближення Борна для амплітуди розсіюння	78
6.6. Метод парціальних хвиль у теорії розсіюння. Фазові зсуви розсіюння	82
6.7. Резонанси потенціального розсіюння. Час затримки частинки в області взаємодії	87
ГЛАВА 7. Елементи теорії ядерних реакцій	91
7.1. Аналіз парціальних хвиль для розсіюння з поглинанням	91
7.2. Оптична модель пружного розсіюння	97
7.3. Резонансна структура перерізів розсіюння і реакцій. Формула Брейта – Вігнера для перерізів розсіюння і реакцій	100
7.4. Матриця розсіюння	104
7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками	112
ГЛАВА 8. Поділ атомних ядер	121
8.1. Механізм поділу важких ядер. Модель рідкої краплини	121
8.2. Вплив ядерних оболонок на енергію деформації. Метод оболонкового доданка Струтинського	133
8.3. Вимушений поділ ядер	145
8.4. Ланцюгова ядерна реакція поділу. Принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах	151
Список рекомендованої літератури	159

В.А. Плюйко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЯДРА ТА ЯДЕРНИХ ПРОЦЕСІВ

Ядерні процеси



ПЕРЕДМОВА

У навчальному посібнику викладено основи теорії ядерних процесів, розглянуто фізичні уявлення та концепції, якими оперує теорія. Ця книга є продовженням навчального посібника "Основи теорії ядра та ядерних процесів. Фізика атомного ядра".

У четвертій главі розглянуто особливості електромагнітного випромінювання ядер, у т. ч. мультипольний характер гамма-випромінювання, імовірності електромагнітних переходів, утворення ізомерних станів, внутрішню та парну конверсії.

У п'ятій главі викладено радіоактивний розпад ядер з вильотом частинок, висвітлено основні закони радіоактивного розпаду та елементарну теорію α -розпаду (як процесу тунелювання скрізь бар'єр) і бета-перетворення.

Шосту та сьому глави присвячено загальним закономірностям ядерних реакцій та елементам теорії цих реакцій, а саме: визначається роль законів збереження в ядерних реакціях, надається фізичне тлумачення ефективних перерізів розсіяння та реакцій. Розглянуто резонансні явища, що відбуваються під час взаємодії частинок з ядрами, опис стаціонарного процесу розсіяння з поглинанням, загальні уявлення про матрицю розсіяння та механізми взаємодії ядер з легкими частинками.

У восьмій главі висвітлено спонтанний та вимушений розпад ядер і принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах. Викладено основи теорії розпаду ядер за моделлю краплі ядерної рідини. Значну увагу приділено розгляду й методам розрахунку впливу ядерних оболонок на енергію деформації ядер.

Глава 4

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЯДЕР

4.1. Мультипольний характер гамма-випромінювання

Ядра, що перебувають у збуджених станах, є нестабільними та існують лише протягом обмеженого часу. Збуджені ядра розпадаються в різний спосіб (за різними каналами) і переходять у стани з меншою енергією аж до основного стану ядра з нульовою енергією збудження. З квантової механіки відомо, що енергія стану із скінченним часом життя τ однозначно не фіксована, а має розкид ("невизначеність") ΔE , який пов'язаний з часом τ співвідношенням:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau} \equiv \hbar w \equiv \Gamma, \quad (4.1)$$

де $w = 1/\tau$ – імовірність розпаду збудженого стану. Розкид енергії ΔE збудженого стану також називають його шириною $\Gamma \equiv \hbar w = \hbar/\tau$. Повна ширина збудженого стану обернено пропорційна часу його життя, й зі зменшенням часу перебування ядра у збудженому стані збільшується його ширина. Якщо вважати, що процеси розпаду ядра різними способами не залежать між собою, то повна ймовірність (ширина) дорівнює сумі парціальних імовірностей w_i (ширин Γ_i) розпаду в усі можливі канали:

$$w \equiv \sum_i w_i; \quad \Gamma \equiv \sum_i \Gamma_i. \quad (4.2)$$

При малих енергіях збудження ($U \leq S_n \approx 8 \text{ MeV}$), коли виліт нуклонів неможливий, головним каналом розпаду є електромагнітне випромінювання ядер. Такий канал розрядки збуджених станів називають *радіаційним*, а відповідну парціальну ширину розпаду – *радіаційною шириною* Γ_γ .

Оскільки різниці енергій ядерних станів у середньому перевищують сотні кілоелектронвольт, що істотно більше за значення енергій електромагнітних переходів в атомах, то ще з часів відкриття розпаду ядер їх електромагнітне випромінювання було названо спеціальним терміном, а саме – *гамма-випромінюванням*, а кванти цього випромінювання – *гамма-квантами*. Разом з тим, гамма- та рентгенівське випромінювання, а також світлові фотони мають одне й те ж саме електромагнітне походження й відрізняються лише величиною енергії (E_γ), яка визначає їх частоту ω та довжину хвилі λ_γ (хвильове число k_γ):

$$\begin{aligned}
 E_\gamma &= \hbar\omega = p_\gamma c, & p_\gamma &= \hbar k_\gamma, & k_\gamma &= \frac{2\pi}{\lambda_\gamma}, \\
 \lambda_\gamma &= \frac{2\pi\hbar c}{E_\gamma}, & \lambda_\gamma(A) &\equiv \frac{1,24 \cdot 10^4}{E_\gamma(\text{eV})}.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Порівняння енергій електромагнітних хвиль з різними довжинами, приведено в табл. 4.1:

Таблиця 4.1

Довжини хвиль та енергії електромагнітного випромінювання різного типу

Випромінювання	Довжина хвилі, $\overset{o}{A} = 10^{-8} \text{ см} = 10^5 \text{ фм}$	Енергія
Червоного кольору	7500	1,65 eB
Фіолетового кольору	3900	3,18 eB
Ультрафіолетове	1000	12,4 eB
Рентгенівське	10	1240 = 1,24 keB
γ -випромінювання: колективні переходи однчастинкові переходи	0,12 0,01	$10^5 = 100 \text{ keB}$ $10^6 = 1 \text{ MeB}$

Згідно із загальною теорією електромагнітних процесів, гамма-випромінювання зумовлено зміною з часом розподілу зарядів та токів у системі. Електромагнітні процеси в ядрах мають низку характерних особливостей порівняно з електромагнітними процесами в атомних системах та процесами, що обумовлені ядерними силами. По-перше, ці процеси в цілому відбуваються з меншою інтенсивністю, ніж інші ядерні розпади, оскільки електромагнітна взаємодія на декілька порядків слабкіша за ядерну. По-друге, електромагнітні процеси в ядрі зумовлені як електромагнітною взаємодією, так і ядерною. Дійсно, під дією електромагнітної взаємодії змінюється енергія та імпульс нуклонів, але наступна перебудова ядра відбувається в результаті ядерної взаємодії. Третьою особливістю електромагнітних процесів є значно різниця у співвідношеннях між довжиною хвилі та енергіями фотона й нуклона:

$$\lambda_\gamma = \frac{\lambda_\gamma}{2\pi} \equiv k_\gamma \approx \frac{200}{E_\gamma(\text{MeB})} \text{ (фм)}, \quad \lambda_N = \frac{\lambda_N}{2\pi} \equiv k_N \approx \frac{4,5}{\sqrt{E_N(\text{MeB})}} \text{ (фм)}. \tag{4.4}$$

Видно, що при одній і тій самій енергії в області одного чи декількох MeB зведена довжина хвилі фотона λ_γ набагато більше від зведеної довжини хвилі нуклона λ_N . При однаковій довжині хвилі фотона та нуклона їх енергії значно відрізняються. Наприклад, рівність $\lambda_N = \lambda_\gamma = R_0 \approx 4,5 \text{ фм}$, де R_0 – радіус ядра з масовим числом $A \approx 50$, виконується для нуклонів і фотонів з енергіями $\approx 1 \text{ MeB}$ та $\approx 44 \text{ MeB}$ відповідно.

4.1. Мультипольний характер гамма-випромінювання

Характер електромагнітного випромінювання сферичною системою радіуса R визначається параметром $k_\gamma R$. У випадку ядер R є радіусом ядра $R_0 = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 = 1,2$ фм), маємо

$$k_\gamma R_0 = \frac{E_\gamma R_0}{\hbar c} = 6,1 \cdot 10^{-3} \cdot E_\gamma (\text{MeV}) \cdot A^{1/3}. \quad (4.5)$$

Якщо виконується нерівність $k_\gamma \cdot R_0 \ll 1$, тобто $\lambda_\gamma \gg R_0$, то електромагнітне випромінювання можна розглядати в довгохвильовому наближенні. Із співвідношення (4.5) видно, що таке наближення можна застосовувати для гамма-переходів між ядерними станами, що відрізняються енергіями менш ніж на декілька МеВ. У цьому випадку, як і при розгляді взаємодії ядра із зовнішнім електромагнітним полем (п. 1.7), випромінювання ядер може бути подано у вигляді скінченної суперпозиції електромагнітних полів випромінювань різної мультипольності. Мультипольне випромінювання порядку λ називають 2^λ -польним і використовують такі назви: $\lambda = 1$ – дипольне випромінювання; $\lambda = 2$ – квадрупольне випромінювання; $\lambda = 3$ – октупольне випромінювання; $\lambda = 4$ – гексодекапольне випромінювання тощо.

Розрізняють мультипольні компоненти випромінювання електричного (E) та магнітного (M) типів. Електричне $E\lambda$ випромінювання обумовлено зміною розподілу зарядів, а магнітне $M\lambda$ виникає завдяки зміні розподілу струмів. У довгохвильовому наближенні ряд мультипольного розкладу для потенціалів електромагнітного випромінювання швидко сходиться й зазвичай слід враховувати лише декілька відмінних від нуля доданків.

Оскільки кожний ядерний стан характеризується певним значенням повного кутового моменту та парності, то при гамма-переходах між станами електромагнітне випромінювання мусить виносити з ядра фіксований момент кількості руху й характеризуватися певною парністю. Закони збереження вимагають, щоб різниці початкових та кінцевих квантових чисел, а саме $J_i - J_f$,

$M_i - M_f$, $\pi_i - \pi_f$, де J , M , π – спін, його проекція та парність стану, характеризували також і поле випромінюваної хвилі. Для послідовного опису всіх характеристик гамма-емісії необхідно використовувати квантово-механічну теорію електромагнітного випромінювання. У цій теорії показано, що квантами електромагнітного поля є фотони, а окремі члени мультипольного розкладу відповідають станам вільного фотона з деякими фіксованими значеннями моменту та парності. Такі стани фотона називають *мультиполями*. Члену мультипольного розкладу порядку λ відповідає мультиполь, що має кутовий момент λ та парність π . Для вільного фотона можливі стани з кутовими моментами $\lambda = 1, 2, 3, \dots$. При цьому для кожного значення моменту фотона існує один стан з додатною парністю та один з від'ємною, які відповідають або електричним (E), або магнітним (M) компонентам розкладу поля по мультиполям. Для назв мультиполів використовується така ж термінологія, що й для членів мультипольного розкладу статичного електромагнітного поля. Кожний стан

фотона з фіксованим моментом та парністю називаються *мультиполем відножного типу*. А саме, стан з кутовим моментом λ називають 2^λ -польним мультиполем; $\lambda = 1$ – диполем; $\lambda = 2$ – квадруполем; $\lambda = 3$ – октуполем тощо, як і в попередній термінології. Мультиполи з кутовим моментом λ та парністю $(-1)^\lambda$ належать до електричного типу випромінювання та позначаються символом $E\lambda$, а з парністю $(-1)^{\lambda+1}$ – до магнітних і позначаються як $M\lambda$. Стани фотона з нульовим кутовим моментом ($\lambda = 0$) відсутні.

Користуючись квантовим описом електромагнітного поля легко сформулювати правила відбору для спінів та парності ядерних станів, між якими відбуваються гамма-переходи. Ці правила безпосередньо виникають із законів збереження моменту кількості руху та парності в системі ядро + фотон. А саме, оскільки фотон з мультипольністю λ має кутовий момент $\vec{\lambda}$, то при його випромінюванні спіні початкового ($\vec{J}_i$) та кінцевого ($\vec{J}_f$) станів ядра задовольняють правило векторного додавання кутових моментів:

$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{\lambda}. \quad (4.6)$$

Тобто значення J_f мають належати інтервалу:

$$|J_i - \lambda| \leq J_f \leq J_i + \lambda. \quad (4.7)$$

З (4.7) випливає, що за заданих значень J_i та J_f можуть випромінюватись лише гамма-кванти з мультипольностями:

$$|J_i - J_f| \leq \lambda \leq |J_i + J_f|. \quad (4.8)$$

Проекції M_i , M_f моментів J_i , J_f , а також проекція μ кутового моменту фотона λ зв'язані умовою $M_i - M_f = \mu$, яка випливає із закону збереження проекції повного кутового моменту.

Закон збереження парності вимагає, щоб парність π_i початкового стану дорівнювала добутку парності π_f кінцевого стану й парності π фотона,

$$\pi_i = \pi_f \cdot \pi. \quad (4.9)$$

Звідки для фотонів типів $E\lambda$ і $M\lambda$ мають виконуватися рівності:

$$\begin{aligned} E\lambda &\Rightarrow \pi_i \cdot \pi_f = (-1)^\lambda, \\ M\lambda &\Rightarrow \pi_i \cdot \pi_f = (-1)^{\lambda+1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

У табл. 4.2 приведено характеристики нижчих мультиполів та правил відбору, що діють при їх випромінюванні чи поглинанні і впливають із (4.7), (4.9).

4.1. Мультипольний характер гамма-випромінювання

Таблиця 4.2

Правила відбору для гамма-випромінювання різної мультипольності

Тип мультиполя (фотона із заданим кутовим моментом)	Тип випромінювання	λ	π	Можлива різниця співів початкових та кінцевих станів ядер $\Delta J = J_i - J_f =$ $= 0, \pm 1, \dots, \pm \lambda;$ $ J_i - \lambda \leq J_f \leq J_i + \lambda$	Зміна парності
$E1$	Електромагнітне дипольне	1	-1	$0; \pm 1$	Так
$M1$	Магнітне дипольне	1	+1	$0; \pm 1$	Ні
$E2$	Електромагнітне квадрупольне	2	+1	$0; \pm 1; \pm 2$	Ні
$M2$	Магнітне квадрупольне	2	-1	$0; \pm 1; \pm 2$	Так
$E3$	Електромагнітне октупольне	3	-1	$0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$	Так
$M3$	Магнітне октупольне	3	+1	$0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$	Ні

Треба мати на увазі, що правило $\Delta J = 0$ не стосується станів з $J_i = J_f = 0$, бо фотони з нульовим моментом відсутні. Тобто, перехід $0 \rightarrow 0$ є абсолютно забороненим. Структура $E0$ мультиполя має кулонівське поле точкового заряду. Тому дія кулонівського поля іноді трактується як процес, що відбувається з народженням деякого віртуального $E0$ кванта.

Застосування правил відбору для гамма-переходів продемонстровано на рис. 4.1.



Рис. 4.1. Приклади застосування правил відбору для гамма-переходів

4.2. Імовірність електромагнітних переходів

Для обчислення ймовірності електромагнітних переходів у ядрах можна використовувати теорію збурень за взаємодією поля з нуклонами ядра. Можливість використання такого підходу є наслідком слабкості електромагнітної взаємодії, що характеризується малою безрозмірною константою $e^2 / \hbar c \approx 1/137$. Ймовірність переходу ядра з початкового стану $\psi_i(\{\vec{r}_j\}) \equiv \langle \{\vec{r}_j\} | i \rangle$ у кінцевий $\psi_f^*(\{\vec{r}_j\}) \equiv \langle f | \{\vec{r}_j\} \rangle$ з емісією фотона електричного ($\alpha = E$) чи магнітного ($\alpha = M$) типу з енергією $E_\gamma = \hbar\omega$ та кутовим моментом λ має вигляд:

$$w_{if}(\alpha, \lambda, \mu) = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\lambda + 1)}{\lambda[(2\lambda + 1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2\lambda+1} \left| \langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle \right|^2, \quad (4.11)$$

де індекси i і f означають набори спінів, їх проєкцій, парності, енергій і деяких додаткових квантових чисел n_i та n_f , що характеризують початковий і кінцевий стани ($i \equiv J_i, M_i, \pi_i, E_i, n_i$; $f \equiv J_f, M_f, \pi_f, E_f, n_f$); $\omega = E_\gamma / \hbar = (E_i - E_f) / \hbar$ – частота випромінювання; c – швидкість світла, а матричний елемент $\langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle$ у лабораторній системі координат (ЛСК) має вигляд

$$\langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle \equiv \int \psi_f^*(\{\vec{r}_j\}) \cdot \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) \psi_i(\{\vec{r}_j\}) \cdot d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_A. \quad (4.12)$$

Тут $\hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha)$ – оператор мультипольного переходу, який дорівнює оператору $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ для електричних мультипольних переходів $E\lambda$ ($\alpha = E$) та оператору $\hat{M}_{\lambda\mu}$ для магнітних переходів $M\lambda$ ($\alpha = M$). Незалежні від спінів компоненти $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ та $\hat{M}_{\lambda\mu}$ мають вигляд (у ЛСК):

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(E) &\equiv \hat{Q}_{\lambda\mu} = \sum_j e_j(\lambda) r_j^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta_j, \varphi_j), \\ \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(M) &\equiv \hat{M}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_j \frac{g_{e_j}}{\lambda + 1} \vec{l}_j \nabla_j (r_j^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta_j, \varphi_j)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

де сумування виконується за координатами всіх нуклонів; $\mu_N = eh / mc$ – ядерний магнетон (п. 1.7), а g_{e_j} – фактор Ланде для орбітального руху: $g_{e_j} = 1$

4.2. Імовірність електромагнітних переходів

для протонів та 0 для нейтронів; $e_j(\lambda)$ – ефективний (кінематичний) заряд нуклона для переходів $E\lambda$:

$$e_j(\lambda) = \begin{cases} \frac{e}{A^\lambda} \left[(A-1)^\lambda + (-1)^\lambda (Z-1) \right] & \text{– для протонів,} \\ eZ(-\frac{1}{A})^\lambda & \text{– для нейтронів} \end{cases} \quad (4.14)$$

в ядрі з A нуклонами і Z протонами. Ефективні кінематичні заряди враховують найпростіший колективний ефект, а саме відносний рух нуклона та остова ядра (ефект віддачі) під дією електричного поля. Найбільш суттєво ефективний кінематичний заряд відрізняється від заряду вільного протона при дипольних переходах, де маємо

$$e_j(\lambda=1) = \begin{cases} e \frac{N}{A} \approx \frac{e}{2} & \text{– протони,} \\ -e \frac{Z}{A} \approx -\frac{e}{2} & \text{– нейтрони.} \end{cases} \quad (4.15)$$

В інших випадках ефект віддачі малий і згідно з (4.15) можна покласти $e_j(\lambda \geq 2) \approx 1$ для ефективного кінематичного заряду протонів та $e_j(\lambda \geq 2) \approx Z/(-A)^\lambda \approx 0$ для нейтронів.

Для врахування ефекту віддачі необхідно виключити вплив руху центра мас. Найпростіше це можна зробити у випадку дипольних переходів, які обумовлені дипольним оператором $\hat{Q}_{1\mu}$, що є пропорційним коваріантним компонентам векторного оператора дипольного моменту $\hat{D}$,

$$\hat{D} = e \sum_{j=1}^Z \vec{r}_j^-. \quad (4.16)$$

Тут $\vec{r}_j^-$ координати протонів у системі центра мас:

$$\vec{r}_j^- = \vec{r}_j - \vec{R}, \quad \vec{R} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \vec{r}_j. \quad (4.17)$$

Після підстановки (4.17) у (4.16) отримуємо вираз для дипольного моменту в ЛСК

$$\hat{D} = e \frac{N}{A} \sum_{j_p=1}^Z \vec{r}_{j_p} - e \frac{Z}{A} \sum_{j_n=1}^N \vec{r}_{j_n} \equiv \sum_{j=1}^A e_j(\lambda=1) \vec{r}_j \quad (4.18)$$

із зарядами $e_j(\lambda=1)$ згідно з (4.15); $\vec{r}_{j_p}$ і $\vec{r}_{j_n}$ – координати протонів та нейтронів у ЛСК.

Зазвичай цікавляться повною ймовірністю γ -переходу в одиницю часу $w(\alpha\lambda)$. Ця величина знаходиться сумуванням виразу (4.11) за магнітними

квантовими числами M_i, M_f, μ та діленням результату на кількість $2J_i + 1$ можливих початкових станів з фіксованим значенням їх проекції M_i . Повна ймовірність γ -переходу в одиницю часу набуває вигляду:

$$w(\alpha\lambda) = \frac{8\pi}{\hbar} \cdot \frac{(\lambda + 1)}{\lambda[(2\lambda + 1)!!]^2} \cdot k_\gamma^{2\lambda+1} B(\alpha\lambda), \quad 1/\text{с}, \quad (4.19)$$

де $k_\gamma = \omega/c$ – хвильове число (див. (4.3)), величина B називається *зведеною ймовірністю γ -переходу*:

$$B(\alpha\lambda) \equiv B(\alpha\lambda; J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f, \mu} \left| \langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle \right|^2, \quad (4.20)$$

де хвильові функції початкового $\langle \{\vec{r}_j\} | i \rangle = \langle \{\vec{r}_j\} | J_i M_i \rangle \equiv \psi_i(\{\vec{r}_j\})$ і кінцевого станів $\langle \{\vec{r}_j\} | f \rangle = \langle \{\vec{r}_j\} | J_f M_f \rangle \equiv \psi_f(\{\vec{r}_j\})$ у матричному елементі (4.12) залежать від значень спінів та їх проекцій,

$$\langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle \equiv \langle J_f M_f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | J_i M_i \rangle. \quad (4.21)$$

Зведена ймовірність $B(\alpha\lambda)$ має розмірність $\text{MeV} \times \text{фм}^{(2\lambda+1)}$, коли енергії вимірюються в одиницях MeV . Часто зведена ймовірність подається у вигляді $B(\alpha\lambda) = \bar{B}(\alpha\lambda) \cdot e^2$, де e – заряд протона, а $\bar{B}(\alpha\lambda)$ – зведена ймовірність в одиницях $e^2 \cdot \text{фм}^{2\lambda}$. Між числовими значеннями ймовірностей $B(\alpha\lambda)$ і $\bar{B}(\alpha\lambda)$ існує співвідношення $B(\alpha\lambda) = 1,44 \cdot \bar{B}(\alpha\lambda)$ ($1,44 \equiv (e^2/\hbar c) \cdot \hbar c$).

Інформація про структуру ядра міститься в матричних елементах зведеної ймовірності (4.20), а саме у хвильових функціях ядерних станів. Усі інші множники у виразі для ймовірності (4.19) є лише статистичними факторами, які визначають фазовий простір доступний при γ -переходах.

Для якісної оцінки значень зведеної ймовірності γ -випромінювання звичайно використовують модель, яка була запропонована Вайскопфом. У ній, по-перше, вважається, що γ -переходи мають одностинковий характер та обумовлені зміною стану одного протона, і ефективні кінематичні заряди нуклонів не враховуються: $e_p(\lambda) \equiv e$, $e_n(\lambda) \equiv 0$. При цьому вважається, що завжди виконується закон збереження кутового моменту і при переході з мультипольністю λ орбітальні моменти початкового та кінцевого станів зв'язані співвідношенням $I_i = I_f + \lambda$. По-друге, припускається, що всі інтеграли за кутовими змінними приблизно дорівнюють одиниці. Як наслідок, маємо вираз для зведеної ймовірності електричних переходів:

4.2. Імовірність електромагнітних переходів

$$B(E\lambda) = \frac{e^2}{4\pi} \left| \int_0^\infty dr \cdot r^2 R_{n_l l_f}(r) r^\lambda R_{n_i l_i}(r) \right|^2, \quad (4.22)$$

де $R_{nl}(r)$ – одночастинкова радіальна хвильова функція. Для оцінки інтеграла в (4.22) Вайскопф припустив, що радіальні функції всередині ядра є сталими. Тоді з умови нормування

$$1 = \int_0^{R_0} r^2 R_{nl} dr = \text{const} \cdot \frac{R_0^3}{3}$$

для радіальної хвильової функції отримуємо такий вираз:

$$R_{nl}(r) = \left(\frac{3}{R_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} \Theta(R_0 - r), \quad (4.23)$$

і зведена ймовірності $E\lambda$ переходів буде рівною

$$B(E\lambda) = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{3R_0^\lambda}{\lambda + 3} \right)^2 \equiv B_w(E\lambda). \quad (4.24)$$

Величину $B_w(E\lambda)$ зазвичай приймають за одиницю виміру зведених ймовірностей електричних переходів та називають *одиноцею Вайскопфа*. Іноді замість одиниці Вайскопфа використовують так звану одночастинкову одиницю ("single particle unite") $E\lambda$ переходів,

$$B_{s.p.}(E\lambda) \equiv (2\lambda + 1) B_w(E\lambda) = \frac{2\lambda + 1}{4\pi} \left(\frac{3}{3 + \lambda} \right)^2 R_0^{2\lambda} e^2. \quad (4.25)$$

При випромінюванні з мультипольностями $\lambda = 1, 2$ та 3 одиниці Вайскопфа мають такі числові значення ($R_0 = 1, 2 \text{ A}^{1/3} \text{ фм}$):

$$\begin{aligned} B_w(E1) &= 6,45 \cdot 10^{-2} \text{ A}^{2/3} e^2 \text{ фм}^2, \\ B_w(E2) &= 6 \cdot 10^{-2} \text{ A}^{4/3} e^2 \text{ фм}^4, \\ B_w(E3) &= 6 \cdot 10^{-2} \text{ A}^2 e^2 \text{ фм}^6. \end{aligned} \quad (4.26)$$

При $B(E\lambda) = B_w(E\lambda)$ ймовірність переходу в одиницю часу (4.19) дається співвідношенням:

$$\begin{aligned} w_w(E\lambda) &= \alpha \frac{2(\lambda + 1)}{\lambda [(2\lambda + 1)!!]^2} \left(\frac{3}{3 + \lambda} \right)^2 \frac{E_\gamma}{\hbar} (k_\gamma R_0)^{2\lambda} = \\ &= \frac{4,4(\lambda + 1)}{\lambda [(2\lambda + 1)!!]^2} \left(\frac{3}{3 + \lambda} \right)^2 \left(\frac{E_\gamma}{197} \right)^{2\lambda + 1} R_0^{2\lambda} \cdot 10^{21}, \text{ c}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

де $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137,0388$ – стала тонкої структури; радіус ядра $R_0 = r_0 A^{1/3}$ задається у фм, а енергія $E_\gamma = \hbar c k_\gamma = \hbar \omega$ – у МеВ.

Аналогічним чином можна оцінити зведену ймовірність випромінювань магнітного $M\lambda$ мультиполя. Можна показати, що оцінка Вайскопфа $B_w(M\lambda)$ для такого випромінювання пов'язана з $B_w(E\lambda)$ співвідношенням:

$$B_w(M\lambda) = 10 \left(\frac{\hbar}{mcR_0} \right)^2 B_w(E\lambda). \quad (4.28)$$

Хоча формули (4.27) та (4.28) знайдені в досить грубому наближенні, вони якісно передають основні закономірності змін інтенсивності радіаційних переходів довільної мультипольності й тому широко використовуються при аналізі експериментальних даних, як відносні одиниці ймовірності γ -переходів.

Розглянемо конкуренцію електричних та магнітних переходів користуючись оцінками Вайскопфа. З правил відбору (4.10) маємо, що радіаційні переходи типів $M\lambda$ та $E(\lambda+1)$ мають однакову парність і тому можуть відбуватися одночасно. Однак згідно з (4.19), (4.24) та (4.28), відношення цих ймовірностей сильно залежить від енергії γ -квантів. При $R_0 = 1,2 A^{1/3}$ фм знаходимо такі оцінки для відношень ймовірностей конкуруючих переходів:

$$\begin{aligned} \frac{w_w(E\lambda)}{w_w(M(\lambda+1))} &\approx \frac{10^6}{E_\gamma^2 (\text{MeV})}, \\ \frac{w_w(M\lambda)}{w_w(E(\lambda+1))} &\approx \frac{100}{E_\gamma^2 (\text{MeV})} A^{-2/3}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

де були знехтувані множники, які плавно залежали від λ .

З (4.29) бачимо, що ймовірність $E\lambda$ переходу, як правило, значно перевищує ймовірність $M(\lambda+1)$ переходів. При зменшенні A та енергії E_γ ймовірності $M\lambda$ випромінювання зростає у порівнянні з ймовірністю $E(\lambda+1)$ випромінювання. Згідно з оцінками (4.29) для середніх та важких ядер і при енергії випромінювання порядку 1 МеВ, значення відношення $w(M\lambda)/w(E(\lambda+1))$ порядку 10÷100. Однак у деяких випадках експериментально спостережувані $E2$ переходи мають майже однакові інтенсивності з $M1$ -переходами.

Ймовірність γ -розпаду $w \equiv w_\gamma$ визначає період напіврозпаду $T_{1/2}$ ядерного рівня відносно γ -випромінювання:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{w_\gamma} = \frac{0,693}{w_\gamma} \equiv \frac{4,57 \cdot 10^{-16}}{\Gamma_\gamma (\text{eB})}, \quad \text{с}^{-1}, \quad (4.30)$$

4.2. Імовірність електромагнітних переходів

де $\Gamma_\gamma = \hbar w_\gamma$ – радіаційна ширина рівня. Період напіврозпаду (4.30) є часом за який в результаті γ -переходів розпадеться половина початкової кількості збуджених ядер (див. гл. 5). При наявності лише електричних переходів типу $E\lambda$, вираз (4.30), з урахуванням (4.27), набуває вигляду:

$$\frac{1}{T_{\frac{1}{2}}(E\lambda)} = \frac{w_w(E\lambda)}{\ln 2} \cong \frac{10^{-8}}{[(2\lambda+1)!!]^2} \left(\frac{E_\gamma(\text{MeB})}{0,693} \right) (k_\gamma R_0)^{2\lambda}, \text{ с}^{-1}, \quad (4.31)$$

де $k_\gamma R_0 \cong 6 \times 10^{-3} A^{1/3} E_\gamma$ згідно з (4.5).

При енергіях $E_\gamma \approx 1$ MeB та для середніх ядер з $A \sim 100$ значення $k_\gamma R_0$ є малим $k_\gamma R_0 \approx 2,8 \cdot 10^{-2}$. Тому при зростанні мультипольності на одиницю ймовірність переходу (4.27) зменшується в $(k_\gamma R_0)^2 \approx 7,6 \times 10^{-4}$ разів, а період напіврозпаду $T_{1/2}$ збільшується приблизно в 10^3 разів. Звідси зрозуміло, що γ -розпад збудженого ядра відбувається в основному за рахунок випромінювання γ -квантів з найменш можливими значеннями мультипольності із тих, що сумісні з законами збереження кутового моменту та парності, а саме зі значеннями

$$\lambda \equiv \lambda_{\min} = |J_f - J_i|, \quad \lambda \equiv \lambda_{\min} + 1 = |J_f - J_i| + 1. \quad (4.32)$$

У деяких випадках спостерігається суперпозиція (суміш) двох типів випромінювань з однаковою парністю, а саме: $E\lambda + M(\lambda + 1)$ або $M\lambda + E(\lambda + 1)$.

Таблиця 4.3

Періоди напіврозпаду згідно з моделлю Вайскопфа

Тип переходу	Період напіврозпаду, $T_{1/2}$ (с)	Значення $T_{1/2}$ (с) для $A = 125$ та $E_\gamma = 0,1$ MeB
$E1$	$0,7 \cdot 10^{-14}$ $E^{-3} A^{-\frac{2}{3}}$	$2,3 \cdot 10^{-13}$
$E2$	$0,9 \cdot 10^{-8}$ $E^{-5} A^{-\frac{4}{3}}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
$E3$	$1,9 \cdot 10^{-8}$ $E^{-7} A^{-2}$	12,9
$E4$	$6,4 \cdot 10^4$ $E^{-9} A^{-\frac{8}{3}}$	$1,7 \cdot 10^8$
$E5$	$2,9 \cdot 10^{11}$ $E^{-11} A^{-\frac{10}{3}}$	$2,2 \cdot 10^{15}$
$M1$	$2,2 \cdot 10^{-14}$ E^{-3}	$2 \cdot 10^{-11}$
$M2$	$3,1 \cdot 10^{-8}$ $E^{-5} A^{-\frac{2}{3}}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$

<i>M3</i>	$6,8 \cdot 10^{-2}$ $E^{-3} A^{-\frac{4}{3}}$	$1,1 \cdot 10^8$
<i>M4</i>	$2,1 \cdot 10^5$ $E^{-9} A^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{10}$
<i>M5</i>	$9,5 \cdot 10^{11}$ $E^{-11} A^{-\frac{8}{3}}$	$1,9 \cdot 10^{17}$

Для порівняння: 1 год = 3600 с. 1 дн = $8,64 \cdot 10^4$ с, 1 рік $\approx 3,15 \cdot 10^7$ с.

Відповідно до (4.29), якщо випромінювання з мультипольністю $\lambda = |J_i - J_f|$ є електричним, то магнітне випромінювання, як правило, не спостерігається. Якщо ж випромінювання з $\lambda = |J_i - J_f|$ є магнітним, то внесок електричного випромінювання може бути значним.

Періоди напіврозпаду для γ -переходів даної мультипольності (періоди напіврозпаду для парціальних переходів), що розраховані згідно з моделлю Вайскопфа наведено в табл. 4.3 ($r_0 = 1,2$ фм).

Із цієї таблиці видно, що радіаційні переходи великої мультипольності, такі наприклад, як *E4*, *E5*, *M4* та *M5*, є дуже повільними процесами і тому кажуть, що вони є сильно загальмованими.

Оцінки ймовірностей електромагнітних переходів на основі одночастинкової моделі Вайскопфа не враховують реальну оболонкову структуру ядра. Її врахування приводить до сильного пригнічення одночастинкових *E1* переходів між низькорозташованими одночастинковими станами ядер у порівнянні з оцінкою Вайскопфа. Дійсно, при низьких енергіях $E_\gamma \leq 2 + 3$ МеВ стани, між якими відбуваються γ -переходи, розташовані настільки близько, що мають бути в межах однієї оболонки. Раніше зазначалося (табл. 4.2), що при дипольних переходах можливі зміни повного моменту ядра: $\Delta I = 0, \pm 1$ і також має змінитися парність хвильової функції. Якщо *E1* переходи відбуваються через зміни стану одного нуклона, то повні кутові моменти ($I \equiv j$) і парність стану при вильоті γ -кванта змінюються відповідно до співвідношень

$$|\Delta j| = 0, 1 \quad \text{і} \quad (-1)^{l_i + l_f} = -1 \quad (4.33)$$

і тому орбітальний момент має також змінюватися щонайменше на одиницю $\Delta l = 1$. Але в одночастинковій оболонковій моделі не існує близькорозташованих станів з такими змінами l і j (див. табл. 3.2). Зокрема, для ядер з кількостями протонів Z і нейтронів N менше ніж 30, стани однієї й тієї ж оболонки мають однакову парність і $\Delta l \neq 1$. В ядрах з $Z, N > 30$ спин-орбітальне розщеплення призводить до появи станів з $\Delta l = 1$ в одній і тій же оболонці. Наприклад, у п'ятій оболонці рівень $h_{11/2} (l = 5)$ розташований поблизу рівня $1g_{7/2} (l = 4)$. Але серед існуючих станів з $\Delta l = 1$ неможливо знайти пару рівнів з $|\Delta j| = 0$ або $|\Delta j| = 1$. Таким чином, у моделі ядерних оболонок дипольне ви-

4.2. Імовірність електромагнітних переходів

промінювання гамма-квантів низьких енергій ($E_\gamma \leq 3$ МеВ) із станів ядер з низькою енергією збудження $U \approx E_\gamma$ має бути відсутнім. Оцінка ж Вайскопфа приводить до відмінних від нуля значень, тому що при її отриманні кутові інтеграли приймалися рівними одиниці, і через це явно не враховувалися правила відбору за кутовими моментами. В експериментах низькоенергетичні $E1$ переходи спостерігаються, але вони, як правило, загальмовані на декілька порядків порівняно з оцінкою Вайскопфа (4.31).

Зазвичай реальні стани ядер складаються з багатьох одночастинкових станів і низькоенергетичні $E1$ переходи своїм походженням зобов'язані малим компонентам хвильових функцій, які вміщують суміш необхідних для цих переходів конфігурацій.

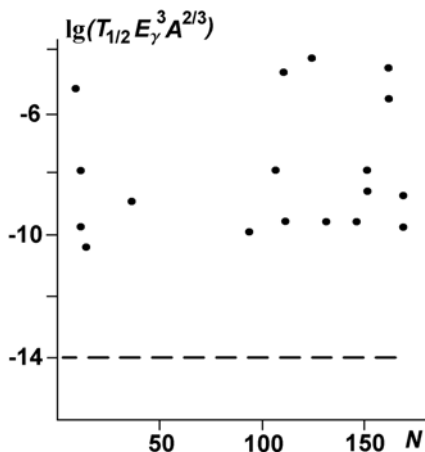


Рис. 4.2. Зведений час життя дипольних переходів залежно від кількості нейтронів для ядер біля лінії стабільності

Ступінь загальмованості електричних дипольних станів між низькорозташованими станами показано на рис. 4.2, де наведено значення $\lg(T_{1/2} E_\gamma^3 A^{2/3})$ залежно від кількості нейтронів ($T_{1/2}$ (с), E_γ (МеВ)). Величину десятичного логарифму $\lg(T_{1/2} E_\gamma^3 A^{2/3})$ часто називають *зведеним часом життя $E1$ переходу*.

Якщо використовувати для зведеної ймовірності $B(E\lambda)$ оцінку Вайскопфа, то зведений час життя має однакове значення для всіх ядер, а саме:

$$\lg \left(T_{1/2} E_\gamma^3 A^{2/3} \right) \approx -14. \quad (4.34)$$

Згідно з рис. 4.2 реальний зведений час життя системи, що випромінює, значно більший і тому зведені ймовірності дипольних переходів на основні стани ядер значно менші (на 4 порядки) порівняно з оцінкою Вайскопфа.

Слід також відмітити, що експериментальна залежність $w(E1) \equiv w_{\text{exp}}(E1)$ від енергії E_γ відрізняється від кубічної, яка передбачається моделлю Вайскопфа; зокрема, $w_{\text{exp}}(E1) \approx E_\gamma^5$ при $E_\gamma \approx 5$ МеВ. Така залежність пов'язана з тим, що в цій області енергій $E1$ γ -перехід не одночастинковий, а має колективний характер і обумовлений γ -розрядкою гігантських колективних збуджень (п. 3.11).

Електричні квадрупольні переходи в ядрах також мають не одночастинковий характер. Зокрема, у середніх та важких ядрах ймовірності $E2$ -переходів між ротаційними станами в $10 \div 100$ разів більше їх одночастинкових оцінок. Великі значення ймовірностей гамма-переходів між ротаційними станами вдалося пояснити в рамках узагальненої моделі ядра (п. 3.7).

Формула для зведеної ймовірності таких переходів визначається із загального виразу для зведеної ймовірності (4.20), (4.21), де використовуються хвильові функції ротаційного руху та вираз для оператора квадрупольного моменту в просторі колективних змінних. Наприклад, формула для зведеної ймовірності електричного квадрупольного переходу $J + 2 \rightarrow J$ для основної обертальної смуги парно-парних ядер має вигляд

$$B(E2; J + 2 \rightarrow J) = \frac{15(J+1)(J+2)}{32\pi(2J+3)(2J+5)} e^2 Q_0^2, \quad (4.35)$$

де Q_0 – власний квадрупольний момент системи (п. 1.7),

$$Q_0 = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int d\vec{r} \rho_p(r) r^2 Y_{20}(\hat{r}) \approx \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z R_0^2 \beta_2.$$

Для ядер з непарним A ротаційні рівні утворюють смуги станів зі спінами $J = K, K+1, K+2, \dots$, з $K \neq 0$ та однаковою парністю. У цьому випадку для кожного рівня ротаційної смуги можливі два типи квадрупольних переходів: $J \rightarrow J-1$ і $J \rightarrow J-2$. Для переходу зі зміною спіну на одиницю, а саме: $J+1 \rightarrow J$, маємо

$$B(E2; J+1 \rightarrow J) = \frac{15}{32\pi} Q_0^2 e^2 \frac{K^2(J+1-K)(J+1+K)}{J(J+1)(2J+3)(J+2)}. \quad (4.36)$$

Ймовірність переходу зі збільшенням спіну на дві одиниці $J+2 \rightarrow J$ визначається формулою

$$B(E2; J+2 \rightarrow J) = \frac{15}{32\pi} Q_0^2 e^2 \frac{(J+1-K)(J+1+K)(J+2-K)(J+2+K)}{(J+1)(2J+3)(J+2)(2J+5)}. \quad (4.37)$$

Велика несферичність розподілу заряду в деформованих ядрах приводить до великих значень квадрупольного моменту Q_0 і тому до великих значень ймовірності $B(E2)$ порівняно з її одночастинковою оцінкою.

Користуючись виразом (4.35) можна отримати співвідношення

4.2. Імовірність електромагнітних переходів

$$\frac{B(E2; J+2 \rightarrow J)}{B(E2; J \rightarrow J-2)} = \frac{(J+1)(J+2)}{(J-1)J} \cdot \frac{(2J-1)(2J+1)}{(2J+3)(2J+5)}. \quad (4.38)$$

Звідки маємо такі значення для відношень зведених ймовірностей:

$$\alpha_1 \equiv \frac{B(E2; 4 \rightarrow 2)}{B(E2; 2 \rightarrow 0)} = 1,43; \quad \alpha_2 \equiv \frac{B(E2; 6 \rightarrow 4)}{B(E2; 2 \rightarrow 0)} = 1,57. \quad (4.39)$$

Ці значення близькі до відповідних експериментальних величин, які, наприклад, мають такі значення: ^{152}Sm - $\alpha_1 = 1,41$, $\alpha_2 = 1,63$; ^{154}Gd - $\alpha_1 = 1,51$, $\alpha_2 = 1,8$; ^{176}Yb - $\alpha_1 = 1,44$, $\alpha_2 = 1,41$.

Для ядер з непарним A відношення для ймовірностей $E2$ переходів має вигляд

$$\frac{B(E2; J \rightarrow J-1)}{B(E2; J \rightarrow J-2)} = \frac{2K^2(J-1)}{(J+1)(J-1+K)(J-1-K)}. \quad (4.40)$$

Цей вираз також узгоджується з експериментальними даними.

Співвідношення (4.38) – (4.40) називають *правилами Алаги*. Фактично вони є наслідком закону збереження кутового моменту при γ -переходах між станами відповідних ротаційних смуг.

Електричні квадрупольні переходи між вібраційним та основним станами ядра також прискоренні у порівнянні з одночастинковими оцінками. Зведену ймовірність можна також обчислити за формулою (4.20), (4.21), але тепер використовуються хвильові функції гармонічного осцилятора та вираз для оператора мультипольного моменту в просторі параметрів деформації поверхні ядра. Виявляється, що в лінійному наближенні за колективними змінними можливі тільки електричні переходи з $\lambda \geq 2$ і лише між вібраційними рівнями, що відрізняються на один фонон. Тобто $E\lambda$ -переходи між вібраційними станами характеризуються таким правилом відбору за кількістю фононів

$$\Delta N_\lambda = \pm 1. \quad (4.41)$$

Зведена ймовірність $E\lambda$ -переходу $\lambda \geq 2$ між першим коливальним, тобто однофононним, і основним станами визначається формулою

$$B(E\lambda; N_\lambda = 1 \rightarrow N_\lambda = 0) = \left(\frac{3}{4\pi} ZeR_0^\lambda \right)^2 \frac{\hbar}{2\sqrt{B_\lambda C_\lambda}} = \left(\frac{3}{4\pi} ZeR_0 \right)^2 \frac{\hbar\omega_2}{2C_2}, \quad (4.42)$$

де як і в п. 3.9 B_λ і C_λ – масовий параметр та коефіцієнт жорсткості.

У випадку електричних квадрупольних переходів формулу (4.41) можна записати через одночастинкове значення (4.25) у вигляді

$$B(E2; N_2 = 1 \rightarrow N_2 = 0) = \frac{25}{8\pi} \frac{Z^2 \cdot \hbar}{B_2 \omega_2} B_{s,p}(E2), \quad (4.43)$$

де $B_{s,p}(E2) = 9e^2 R_0^4 / (20\pi)$.

Із експериментальних даних з енергій $\hbar\omega_{2+}$ перших вібраційних станів (2_1^+) та значень зведених ймовірностей $B(E2)$ можна визначити параметр жорсткості й масовий коефіцієнт. Знайдені значення масового параметра B_2 у середньому перевищують його гідродинамічне значення в 20 разів. Електричні $E2$ -переходи з перших вібраційних станів 2_1^+ у парно-парних ядрах прискорені в $10 \div 20$ разів порівняно з одночастинковою оцінкою. Відношення зведених ймовірностей $E2$ -переходів для коливальних станів якісно узгоджуються з моделлю гармонічних коливань поверхні, а типові відхилення становлять $30 \div 50$ %.

4.3. Ізомерні стани. Внутрішня та парна конверсії

Радіаційні переходи з великими мультипольностями і не дуже великими енергіями γ -квантів сильно загальмовані (див., наприклад, переходи $E4$, $M4$, $E5$ у табл. 4.3). Тому, якщо ядро перебуває в збудженому стані з енергією, близькою до енергії основного стану, і спіном, який значно відрізняється від спіну основного стану то воно має дуже великий час життя щодо γ -розпаду, оскільки перехід до основного стану буде можливим лише після вильоту γ -кванта високої мультипольності. Такий довгоживучий збуджений стан називають ізомерним станом ядра (ізомером основного стану; від грецьк. *isos* – рівний, однаковий та *meros* – доля, частина). Ядра в ізомерних станах позначають символом $^A_m Z X$. Ізомер та ядро в основному стані ($^A Z X$) утворюють ізомерну пару. Ізомерний збуджений стан називають також *метастабільним станом*. Наприклад, ізотопи індію мають ізомерну пару з такими характеристиками :

$$^{115}_{49}\text{In} \Rightarrow J^\pi = \frac{9}{2}^+, E_0 = 0, \text{ основний стан,}$$

$$^{115m}_{49}\text{In} \Rightarrow J^\pi = \frac{1}{2}^-, E_m = 335 \text{ кеВ, ізомер; } T_{1/2} = 4,486 \text{ год.}$$

У цьому випадку збудження може зніматися (висвічуватися) при випромінюванні фотона типу $M4$. Відповідний перехід дуже загальмований ("заборонений") і як наслідок, період напіврозпаду індію в ізомерному стані виявляється макроскопічним і дорівнює $\sim 4,5$ год.

Вперше ядерну ізомерію відкрив О.Ган (1921). Подальші дослідження показали, що ізомерія не є рідкісним явищем і відомо більше сотні відносно стабільних ізомерів. Серед них є такі рекордсмени довголіття, як ізотоп нептунію $^{236}_{93}\text{Np}$, що має декілька метастабільних станів, у т. ч. з часом життя $\tau \cong 5000$ років.

Досі вважалося, що при низьких енергіях ядро розряджається лише випромінюванням γ -квантів. Однак є й конкуруючий процес – внутрішня конверсія,

4.3. Ізмерні стани. Внутрішня та парна конверсії

роль якого збільшується зі зростанням мультипольності переходу та зі зменшенням його енергії. Явище внутрішньої конверсії полягає в тому, що енергія збудженого ядра передається одному з електронів атомної оболонки. При цьому випромінюються так звані "конверсійні" електрони. Оскільки енергія E_i збудженого рівня ядра є дискретною величиною, і значення енергії зв'язку ϵ_0 електрона в атомній оболонці дискретне, то спектр енергій конверсійних електронів є також дискретним

$$\epsilon_i = E_i - \epsilon_0. \quad (4.44)$$

При експериментальному дослідженні внутрішньої конверсії за допомогою магнітних спектрометрів та напівпровідникових детекторів спостерігається спектр електронів конверсії у вигляді окремих ліній. Такі лінії відповідають вильоту електронів з K -, L -, M - та інших атомних оболонок.

Процес внутрішньої конверсії виникає за рахунок кулонівського електростатичного поля ядра, тоді як випромінювання γ -квантів обумовлене наявністю поперечного електромагнітного поля, що утворюється завдяки руху нуклонів в ядрі. Тому внутрішня конверсія та випромінювання γ -квантів є незалежними явищами. Оскільки конверсія являє собою додатковий канал розрядки ядерного збудження, то повний час життя збудженого рівня визначається як ймовірністю w_γ випромінювання γ -квантів, так і ймовірністю $w_e(i)$ вильоту конверсійного електрона з деякої i оболонки атома:

$$\tau = w^{-1}, \quad w = w_\gamma + \sum_i w_e(i). \quad (4.45)$$

Відношення ймовірностей конверсії та γ -випромінювання називається коефіцієнтом внутрішньої конверсії α :

$$\alpha \equiv \sum_i \alpha_i, \quad \alpha_i = w_e(i) / w_\gamma. \quad (4.46)$$

Внаслідок конверсії збільшується повна ймовірність розпаду рівня й тому зменшується його період напіврозпаду відносно переходів у стани з меншою енергією:

$$w = w_\gamma(1 + \alpha); \quad T_{1/2} \equiv \frac{\ln 2}{w} = \frac{T_{1/2}^{(\gamma)}}{(1 + \alpha)}, \quad (4.47)$$

де $T_{1/2}^{(\gamma)}$ – період напіврозпаду за γ -каналом.

Як вже відмічалось, γ -кванти з нульовим кутовим моментом не існують і тому перехід $0^+ \rightarrow 0^+$ із випромінюванням γ -кванта заборонений, але він може відбутися внаслідок передачі енергії конверсійному електрону. Такі переходи називають $E0$ -переходами. Очевидно, що для них не може бути введеної коефіцієнт конверсії.

Теорія внутрішньої конверсії показує, що коефіцієнти конверсії α залежать від енергії та мультипольності гамма-переходів. Наприклад, для ядер олова і

електронів у K -оболонці коефіцієнти конверсії (при розпаді ядерних станів з деякими енергіями E_i) мають такі значення:

$$\begin{aligned} E_i = 0,5 \text{ MeV}; \alpha(E2) = 5,03 \cdot 10^{-2}, \quad \alpha(M1) = 3,77 \cdot 10^{-2}; \\ E_i = 1,0 \text{ MeV}; \alpha(E2) = 6,00 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha(M1) = 6,60 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Вимірювання абсолютних значень коефіцієнта конверсії або їх відношення для різних оболонок дає можливість визначення мультипольності гамма-переходів. Разом з тим, при енергіях більших ніж 1 MeV ця процедура дуже ускладнюється через малі значення коефіцієнтів конверсії. Значення α , що приведені у формулі (4.48), є характерними для всіх ядер.

Якщо енергія E збудження ядра перевищує енергію, що відповідає подвійній масі електрона

$$E > 2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}, \quad (4.49)$$

то стає можливим процес парної конверсії, в якому ядро втрачає збудження в результаті одночасного випромінювання електрона і позитрона. Такий процес часто теоретично розглядають як процес вильоту віртуального γ -кванта, який далі перетворюється в електрон-позитронну пару. Парна конверсія ніяк не пов'язана з атомною електронною оболонкою й тому може відбуватися й в ядрі без такої оболонки. Як і внутрішня конверсія, парна конверсія кількісно характеризується коефіцієнтом парної конверсії α_π :

$$\alpha_\pi = w_\pi / w_\gamma, \quad (4.50)$$

де w_π – ймовірність вильоту електрон-позитронної пари. Відносна роль парної конверсії зростає зі збільшенням енергії, хоча її ймовірність, як правило, не велика $\alpha_\pi \sim 10^{-4}$. Високоенергетичні переходи між ядерними станами з $I_i = 0$ і $I_f = 0$ часто відбуваються за рахунок парної конверсії. Наприклад, таким є $E0$ -перехід в ядрі $^{16}_8\text{O}$ з енергією 6,06 MeV.

Вивчення енергій та ймовірностей електромагнітних переходів, визначення їх мультипольного складу дає значний матеріал для встановлення послідовності збуджених станів ядер та значень їх спинів і парності. Це дає можливість отримати інформацію про структуру ядра, перевірити методи їх опису та визначити значення параметрів моделей.

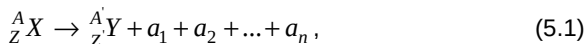
ГЛАВА 5

РАДІОАКТИВНИЙ РОЗПАД ЯДЕР З ВИЛЬОТОМ ЧАСТИНОК

5.1. Радіоактивність ядер

У попередній главі було розглянуто γ -випромінювання ядер. З ядра також можуть вилітати одна або декілька частинок і воно може розпадатися на великі уламки. Процес спонтанного розпаду ядра називається *радіоактивністю*. Таких перетворень зазнають нестабільні радіоактивні ядра.

При радіоактивному розпаді змінюється як заряд ядра Z , так і його масове число A . Цей процес схематично можна подати як:



де X – материнське ядро, Y – дочірнє ядро, a_j – інші частинки (серед останніх можуть бути гамма-кванти й ядра, наприклад ${}_2^4\text{He}$). Якщо масу частинок a_j можна порівняти з масою ядра Y , то йдеться не про утворення дочірніх ядер Y , а про розвал материнського ядра на уламки. Зазвичай радіоактивні процеси є двочастинковими або тричастинковими, тобто $n=1$ чи 2. Раніше радіоактивність поділяли на природну, що існує в природних умовах, та штучну, але ніякої принципової різниці між ними не існує.

Радіоактивність була першим ядерним процесом, відкритим людством (А.Беккерелем, 1886). Інколи до явищ радіоактивності не відносять розпад ядер, що перебувають у збуджених станах. У цьому випадку γ -випромінювання не вважається радіоактивним явищем. Відмітимо, що під радіоактивністю розуміють не будь-який процес розпаду, а стабілізований процес, що відбувається за досить великий проміжок часу. На практиці до радіоактивних ядер відносять ядра, час життя яких триває від дуже великих до тих, що перевищують на декілька порядків характерний час прольоту ($\cong 10^{-21}\text{с}$). Наприклад, час життя радіоактивного урану ${}^{238}\text{U}$ дорівнює 10^{10} років.

Необхідною умовою існування радіоактивного розпаду є його енергетична можливість, яка полягає в тому, що має бути додатною кінетична енергія продуктів розпаду, що веде до умови позитивності енергії розпаду Q ,

$$Q = [m_X - m_Y - \sum_{j=1}^n m_{a_j}]c^2. \quad (5.2)$$

Тому маса радіоактивного ядра завжди перевищує сумарну масу продуктів розпаду

$$m_X > m_Y + \sum_{j=1}^n m_{a_j}. \quad (5.3)$$

Процеси з додатною енергією розпаду називаються *екзотермічними* і радіоактивність є прикладом такого процесу. Радіоактивний ізотоп постійно виділяє енергію, і тому його температура завжди вища за температуру оточуючого середовища.

Радіоактивні ядра можуть утворюватися різними шляхами:

- 1) внаслідок первинного синтезу хімічних елементів сонячної системи;
- 2) у ланцюгу перетворень, що виникають при розпаді материнських ядер;
- 3) внаслідок дії космічних променів та дії первинного радіоактивного випромінювання на стабільні ядра;
- 4) при бомбардуванні стабільних ядер прискореними частинками або іншими ядрами.

Існують дві основні причини, що приводять до великих значень часу життя радіоактивних ядер, тобто до стабілізації радіоактивного розпаду.

1. Наявність сил, що заважають розпаду. Наприклад, виліт позитивно заряджених частинок (протони, дейтрони, α -частинки тощо) сильно пригнічуються кулонівськими силами відштовхування. Збільшення часу життя ядра за рахунок кулонівських сил може здаватися парадоксальним, оскільки будь-які сили відштовхування між вільними частинками намагаються виштовхнути заряджену частинку із системи, тобто зменшити, а не збільшити час розпаду. Пояснення цього парадоксу полягає в тому, що на заряджену частинку в ядрі діє середнє поле, що формується ядерною та кулонівською взаємодіями. Як наслідок, поблизу поверхні ядра існує кулонівський потенціальний бар'єр, який частинка подолати не може, якщо вона рухається за законами класичної механіки та має енергію нижчу за енергію бар'єра. У такому випадку розпад можливий лише за рахунок тунельного проникнення частинки через бар'єр, що описується законами квантової механіки (див. п. 5.5). За малої ймовірності такого розпаду, час життя може бути дуже великим.

2. Іншою причиною великих значень часу життя радіоактивних ізотопів може бути дуже мала інтенсивність взаємодії, за рахунок якої відбувається розпад. Наприклад, це виникає в тих випадках, коли процес радіоактивного розпаду енергетично можливий, але внаслідок різних заборон не може відбуватися за рахунок сильної чи електромагнітної взаємодії. Така ситуація реалізується в так званих β -перетвореннях, в яких беруть участь електрони та позитрони, нейтрино й антинейтрино. Такі процеси обумовлені слабкою взаємодією, інтенсивність якої приблизно на 10 порядків менша за інтенсивність сильної взаємодії. Мала інтенсивність електромагнітної взаємодії є також однією з причин досить тривалого процесу γ -розпаду. У табл. 5.1 представлено основні типи радіоактивних перетворень, а також вказано "правило зсувів" ΔZ і ΔA (зміни заряду та маси материнського ядра після радіоактивного розпаду) та схематично зображено процеси й типи взаємодії, що від-

5.1. Радіоактивність ядер

повідать за цей розпад. Символи S, E та W означають відповідно сильну електромагнітну та слабку взаємодії.

Таблиця 5.1

Основні типи радіоактивних перетворень

Тип перетворення	Процес	ΔZ	ΔA	Тип взаємодії
α -розпад	${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$	-2	-4	$S + E$
β -перетворення		± 1	0	W
β^- -розпад (електронний)	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$ $(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e)$	+1	0	W
β^+ -розпад (позитронний)	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$ $(p \rightarrow n + e^+ + \nu_e)$	-1	0	W
$e^- (K^-)$ поглинання	${}^A_Z X + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu_e$	-1	0	W
γ -випромінювання	${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$	0	0	E
Спонтанний поділ	${}^A_Z X \rightarrow {}^{A'}_{Z'} Y + {}^{A-A'}_{Z-Z'} \tilde{Y}$	$\sim Z/2$	$\sim A/2$	$S + E$
Протонна радіоактивність	${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-1}_{Z-1} Y + {}^1_1 H$	-1	-1	$S + E$
Двопротонна радіоактивність	${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-2}_{Z-2} Y + p + p$	-2	-2	$S + E$

Звернемо увагу на те, що поняття нейтронної радіоактивності не існує. Це пов'язано з тим, що внаслідок відсутності заряду нейтрона, час життя збуджених систем, що виникають після розпаду нейтрона й випромінюють нейтрино, дуже малий.

Правила зсуву для A та Z дозволяють згрупувати всі природні радіоактивні елементи в чотири великі родини, або радіоактивні ряди, ланцюги. Спочатку ці правила для ланцюгів α та β -розпаду були встановлені емпірично і вони формулюються таким чином.

Усі ядра з масовими числами $A > 209$ нестабільні щодо α -розпаду. Будь-яке таке ядро переходить у стабільне ($A < 209$) шляхом кількох послідовних перетворень. Серед них обов'язковим є α -розпад, бо саме він змінює масове число, хоча частина ядер розпадатиметься внаслідок β -перетворень. Останнє пояснюється тим, що при вильоті з ядра α -частинки (2 протони та 2 нейтрони) масове число A зменшується й збалансоване співвідношення між числами Z та N порушується. Ядро виходить за межі долини β -стабільності, яка зада-

ється рівнянням (1.16), $N/Z \cong 0,98 + 0,0155A^{2/3}$, а потім повертається до неї внаслідок β -розпаду, що відбувається з перетворенням нейтрона в протон і випромінюванням електрона та антинейтрино. Проміжні ядра можуть утворюватися у збуджених станах і переходити в стани з меншою енергією випромінюючи γ -квант, але такі процеси не супроводжується зміною ізотопу. Однак, якщо якесь материнське ядро зазнає послідовні α - та β -розпадів, то для кожного з дочірніх ядер залишок від поділу їхніх масових чисел на 4 буде однако-вим. Це пов'язано з тим, що при α -розпаді масове число A змінюється на 4, а при β - та γ -випромінюваннях не змінюється. Внаслідок цього, усі незбуджені природні радіоактивні ядра з $Z \leq 100$, які розпадаються з вильотом α -, β -, γ -частинок, групуються в 4 родини, для кожної з яких масові числа задаються однією із таких формул:

$$A = 4n, \quad 4n+1, \quad 4n+2, \quad 4n+3, \quad (5.4)$$

де n – деяке натуральне число і $n > 51$.

Радіоактивні ряди дуже важливі в прикладних дослідженнях. Основні відомості про них наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Родини радіоактивних елементів

Родина	A	Початковий нуклід	$T_{1/2}$, років	Кількість перетворень	Кінцевий нуклід
Торію	$4n$	${}^{232}_{90}\text{Th}$	$1,4 \cdot 10^{10}$	12	${}^{208}_{82}\text{Pb}$
Нептунію	$4n+1$	${}^{237}_{93}\text{Np}$	$2,2 \cdot 10^6$	13	${}^{209}_{83}\text{Bi}$
Урана	$4n+2$	${}^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$	18	${}^{206}_{82}\text{Pb}$
Актинія	$4n+3$	${}^{235}_{92}\text{U}$	$7 \cdot 10^8$	16	${}^{207}_{82}\text{Pb}$

Остання родина в табл. 5.2 отримала свою назву тому, що попередні до актинію елементи ${}^{231}_{91}\text{Pa}$, ${}^{231}_{90}\text{Th}$ та ${}^{235}_{92}\text{U}$ були відкриті пізніше.

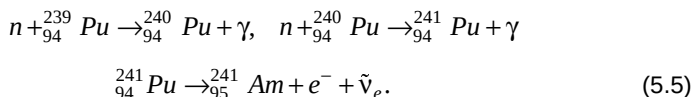
Нептуній, який є родоначальником другого ряду, відносно мало стабільний, і у складі земної кори він не зберігся. Родину нептунію спочатку передбачили теоретично, і лише потім його структуру реконструювали в лабораторії (Г.Сіборг, А.Гюрсо, 1950).

Кожний радіоактивний ряд містить також члени з більшими значеннями заряду і масового чисел, ніж вказані в табл. 5.2, але вони мають порівняно невеликий час життя й тому в природі майже не зустрічаються. Усі елементи з

5.1. Радіоактивність ядер

$Z > 92$ мають загальну назву *трансуранові елементи*. Елементи з $Z > 100$ також називають *трансфермієвими*.

Трансуранові елементи були синтезовані штучним шляхом і їхнє послідовне вивчення розпочалося в 40-х роках. Першим було синтезовано нептуній з $Z = 93$ (Е.Макміллан, П.Абельсон, 1940). Трансуранові елементи з $Z = 93-98$ були отримані при опроміненні урану (або вже синтезованих елементів) потужними потоками нейтронів від ядерних реакторів. При цьому спочатку утворювалася деяка комплексна система (ядро + нейтрон) і лише потім надлишок нейтронів перетворювався на протони внаслідок β -розпаду. Так, америцій вперше було синтезовано за допомогою такого ланцюга перетворень :



Ізотопи ейнштейнію ($Z = 99$) та фермію ($Z = 100$) спочатку були відкриті при аналізі продуктів термоядерних вибухів.

Основною причиною нестабільності трансуранових елементів із значеннями зарядів до $Z \approx 100$ є α -розпад. Але для трансфермієвих елементів істотним є спонтанний поділ, внесок якого збільшується зі зростанням заряду ядра. Для відомих на цей час нуклідів з $Z = 106-107$ це основний тип розпаду. Зі збільшенням заряду ядра (див. табл. 5.3) час життя ядер монотонно й достатньо різко зменшується, що надзвичайно ускладнює проблему синтезу та ідентифікації надважких елементів, як з погляду фізики, так і техніки (детальний аналіз пошуку і досягнень з синтезу трансуранових елементів приведено в п. 94 підручника Д.В.Сивухіна). Сучасні досягнення (п. 3.5) в області синтезу трансуранових елементів значною мірою зобов'язані запропонованому Ю.Ц.Оганесяном (1973) методу так званого "холодного" або "магічного" синтезу. За яким як початкові ядра в реакціях, що застосовуються для синтезу елементів, необхідно використовувати або магічні ядра, або близькі до них. Це приводить до утворення складених ядер з меншою енергією збудження та дає змогу надійніше ідентифікувати кінцеві ядра-продукти.

Таблиця 5.3

Періоди напіврозпаду деяких радіоактивних ізотопів

Z	Символ	Назва	Кількість ізотопів	A	$T_{1/2}$
93	Np	Нептуній	12	237	$2,2 \cdot 10^6$ років
99	Es	Ейнштейній	13	254	250 дн
104	Ku	Курчатовій	8	260	0,1 с

5.2. Основні закони радіоактивного розпаду

Дослідження показують, що радіоактивність є статистичним процесом. Неможливо передбачити, коли саме розпадеться дане нестабільне ядро. Однакові ядра можуть розпадатися за різні проміжки часу. Для опису статистичних закономірностей звичайно використовують поняття ймовірності тих чи інших подій. Тому як характеристики радіоактивного розпаду природно ввести ймовірність λ -розпаду ядра за одиницю часу. Радіоактивний розпад є властивістю самого атомного ядра й залежить тільки від його внутрішнього стану. Неможливо вплинути на процес радіоактивного розпаду, що обумовлений наявністю ядерних сил, не змінивши стану атомного ядра. Зовнішні умови (температура, тиск, зовнішнє магнітне поле, хімічний стан елементу тощо) дуже слабо впливають на стан ядра. По-перше, унаслідок того, що для перебудови ядерних станів необхідна значна енергія, по-друге, тому що ядро захищається від зовнішніх впливів електронною оболонкою. У результаті, ймовірність λ радіоактивного розпаду практично не залежить від часу й тому її також називають сталою радіоактивного розпаду для даного виду радіоактивності. У деяких випадках спостерігається дуже слабка залежність λ від зовнішніх умов, наприклад, для електронного поглинання (K -захоплення).

Практична незалежність величини λ від часу виявляється в тому, що різні моменти часу ні чим не відрізняються один від одного щодо ймовірності розпаду ядра. Атомні ядра "не старіють" у процесі свого існування і для них не існує поняття віку. Вони можуть розпадатися, тобто "вмирати", лише випадково.

Знайдемо основний закон радіоактивного розпаду. Нехай у момент часу t існує велике число N радіоактивних ядер і за проміжок часу dt із них розпадається в середньому dN ядер, тоді у відповідність до визначення величини λ , як ймовірності розпаду за одиницю часу, маємо :

$$dN = -\lambda N dt \quad (5.6)$$

Знак мінус означає, що загальна кількість радіоактивних ядер зменшується в процесі розпаду. Після інтегрування рівняння (5.6), знаходимо основний закон радіоактивного розпаду :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}, \quad (5.7)$$

де N_0 – кількість радіоактивних ядер у довільно вибраний початковий момент часу t_0 ($t_0 = 0$). Згідно з цим співвідношенням кількість радіоактивних ядер, що не розпалися, зменшується за експоненціальним законом. Основний закон радіоактивного розпаду (5.7) є статистичним законом, тобто відноситься до середніх величин і виконується лише при достатньо великій кількості ядер. Він визначає середню кількість радіоактивних ядер на момент часу t , тобто ту середню кількість, що не розпалася на момент часу t . Стала розпаду λ також визначає дві інші величини, що характеризують інтенсивність процесу радіоактивності, а саме період напіврозпаду $T_{1/2}$ та середній час життя ядра τ . *Періодом на-*

5.2. Основні закони радіоактивного розпаду

піврозпаду називають час, за який кількість радіоактивних ядер зменшиться вдвічі, тобто $N(T_{1/2}) = N_0 / 2$. Відповідно до (5.7) маємо $N_0 / 2 = N_0 \cdot \exp(-\lambda T_{1/2})$ і

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (5.8)$$

Середній час життя τ відповідно до визначення математичного середнього пов'язаний з імовірністю $dw(t)$ того, що він належить інтервалу від t до $t + dt$, таким виразом

$$\tau = \int_0^{\infty} t dw(t), \quad \int_0^{\infty} dw(t) = 1. \quad (5.9)$$

Очевидно, що ймовірність $dw(t)$ пропорційна кількості ядер $dN(t)$, які розпадаються в інтервалі часу $t \div t + dt$, оскільки саме вони визначають середній час життя. З урахуванням умови нормування ймовірності маємо:

$$dw(t) = \text{const} \cdot dN(t) = \frac{dN(t)}{\int_0^{\infty} dN(t)} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt. \quad (5.10)$$

Звідси отримуємо, що середній час життя радіоактивного ядра є обернено пропорційним сталій розпаду:

$$\tau = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t dt = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 \cdot T_{1/2}. \quad (5.11)$$

Враховуючи (5.8), основний закон радіоактивного розпаду (5.7) можна подати в степеневому вигляді

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t \ln 2 / T_{1/2}} = \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}}.$$

Звідки маємо, що кількість ядер, які ще не розпалися до часу в n -разів більшою за період напіврозпаду ($t = n T_{1/2}$), менше від початкової в 2^n разів.

При розпаді багатьох радіоактивних елементів утворюються ядра, які також є радіоактивними і можуть розпадатися. Такий складний багатостадійний розпад, що вміщує послідовність простих радіоактивних розпадів, у випадку природної радіоактивності може мати до 15 проміжних перетворень. Для прикладних застосувань важливо знати залежність від часу кількості радіоактивних елементів, що утворюються на попередніх стадіях. Розглянемо випадок двостадійного розпаду, коли внаслідок розпаду материнських ядер типу 1 зі сталою розпаду λ_1 утворюються дочірні ядра типу 2 зі сталою розпаду λ_2 , які, у свою чергу, розпадаються й утворюють стабільні ядра типу 3. Схематично такий двоступеневий процес виглядає як: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

У цьому випадку зміна кількості N_1 ядер типу 1 та кількості N_2 ядер типу 2 визначаються системою рівнянь :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1. \quad (5.12)$$

Ці рівняння мають простий зміст: кількість ядер 1 зменшується за рахунок їх розпаду, а кількість ядер 2 зменшується за рахунок їх власного розпаду та поповнюється за рахунок розпаду ядер 1. Очевидно кількість стабільних ядер типу 3 поповнюється лише за рахунок розпаду ядер типу 2:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2. \quad (5.13)$$

Розв'язок рівняння для $N_1(t)$ задається виразом (5.7), а розв'язок рівняння для $N_2(t)$ можна легко знайти методом варіації сталих. Припустимо, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ маємо N_{10} материнських ядер, а ядер типу 2 і 3 немає:

$$N_1(0) = N_{10}, \quad N_2(0) = N_3(0) = 0. \quad (5.14)$$

З такими початковими умовами розв'язок системи (5.11) має вигляд:

$$N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}, \quad N_2 = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (5.15)$$

З урахуванням (5.13), кількість стабільних ядер типу 3 дорівнює :

$$N_3(t) = \lambda_2 \int_0^t dt' N_2(t') = N_{10} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right). \quad (5.16)$$

Звідси видно, що сталі розпаду λ_1 та λ_2 основні величини, які визначають складний радіоактивний розпад. Розглянемо випадок, коли період напіврозпаду материнських ядер значно більший за період напіврозпаду дочірніх ядер:

$$T_{1/2}^{(1)} = \frac{\ln 2}{\lambda_1} \gg T_{1/2}^{(2)} = \frac{\ln 2}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 \ll \lambda_2. \quad (5.17)$$

Вважаємо, що ядра розпадаються в інтервалі часів $T_{1/2}^{(2)} \ll t \ll T_{1/2}^{(1)}$. У цій ситуації, що реалізується на практиці, кількість материнських ядер упродовж довгого часу t практично не змінюється, а кількість ядер типу 2 збільшується. Дійсно, згідно з (5.15) для моментів часу $t \ll T_{1/2}^{(1)}$ величина $\lambda_1 t \ll 1$, тобто маємо

$$N_1(t) \cong N_{10}, \quad N_2(t) \cong \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (1 - e^{-\lambda_2 t}). \quad (5.18)$$

Співвідношення (5.18) вказує, що кількість радіоактивних дочірніх ядер збільшується з часом та для часів $t > T_{1/2}^{(2)}$ наближається до свого граничного значення :

5.2. Основні закони радіоактивного розпаду

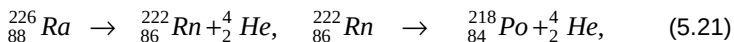
$$N_2(t \gg T_{1/2}^{(2)}) \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} = \text{const} \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1(t \ll T_{1/2}^{(1)}) \quad (5.19)$$

Вже для моментів часу $t > 10 \cdot T_{1/2}^{(2)}$ це співвідношення виконується з точністю до 99,9 %. Звичайно воно записується у формі:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2, \quad (5.20)$$

і має назву ідеальної (радіоактивної) рівноваги. Це співвідношення означає, що в інтервалі часів $T_{1/2}^{(2)} \ll t \ll T_{1/2}^{(1)}$ кількість розпадів в одиницю часу дочірньої речовини $\lambda_2 N_2$ дорівнює кількості розпадів материнської речовини $\lambda_1 N_1$, і тому, згідно з (5.12) кількість дочірніх ядер типу 2 не змінюється ($dN_2 / dt = 0$), і зовні виглядає, мовби не існує ніякого розпаду материнських ядер. Якщо період напіврозпаду материнського ядра становить близько 100 років, то співвідношення ідеальної рівноваги називають *рівнянням вікової рівноваги*.

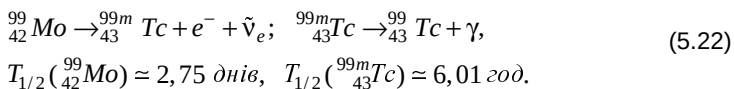
Прикладом послідовного розпаду двох радіоактивних речовин є перетворення радію в радон:



$$T_{1/2}^{(1)}({}_{88}^{226}\text{Ra}) = 1600 \text{ років}, \quad T_{1/2}^{(2)}({}_{86}^{222}\text{Rn}) = 3,8235 \text{ дн.}$$

У цьому випадку виконується умова $T_{1/2}^{(1)} \gg T_{1/2}^{(2)}$ і тому для моментів часу $T_{1/2}^{(2)} \ll t \ll T_{1/2}^{(1)}$ розв'язок системи рівнянь (5.11) можна записати у вигляді (5.18). Вікова рівновага (5.20) між радієм та радоном встановлюється за декілька тижнів (≈ 40 дн).

Можливість стабільного утворення дочірніх ізотопів з необхідним типом і характеристиками розпаду, широко використовується в медицині при діагностиці, що виконується за допомогою радіоактивних препаратів. Зазвичай використовується процес так званої робочої рівноваги: деяка кількість материнських ядер відіграє роль "генератора", який безперервно породжує дочірні радіоактивні ядра з потрібним типом розпаду. Далі спеціальні сепаратори дозволяють відокремити їх від інших компонентів і одразу використовувати. Класичним прикладом такого процесу може бути утворення технецію із молібдену:



Ядра метастабільного технецію ${}_{43}^{99m}\text{Tc}$ широко використовуються в медицині. Вони легко входять до складу різних молекул і тому надзвичайно зручні для застосування в діагностичних цілях.

5.3. Одиниці радіоактивності.

Активність джерел радіоактивного випромінювання

Активність A радіоактивного джерела визначається кількістю розпадів за 1 с,

$$A = \lambda N \equiv 0,693 \frac{N}{T_{1/2}}, \quad \frac{\text{розп.}}{\text{с}}. \quad (5.23)$$

Ця величина характеризує сумарну інтенсивність випромінювання радіоактивного джерела. Взагалі, якщо розпад одноступеневий, то активність джерела, згідно з законом радіоактивного розпаду (5.6), дорівнює зміні кількості ядер джерела

$$A = \lambda N = -\frac{dN}{dt}. \quad (5.24)$$

Активність радіоактивного препарату з періодом напіврозпаду $T_{1/2}$ для одностадійного розпаду змінюється за експоненціальним законом. Дійсно, з (5.7) та (5.24) маємо :

$$\frac{dA}{dt} = \lambda \frac{dN}{dt} = -\lambda A \Rightarrow A = A_0 \cdot e^{-0,693 \frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (5.25)$$

Зазвичай, в експерименті вимірюють повну активність, яка визначається випромінюванням усіх ядер у ланцюгу послідовного розпаду материнського ядра. При багатоступеневому розпаді повна активність дорівнює сумі активності кожного з ядер, що розпадається:

$$A = \sum_i \lambda_i N_i. \quad (5.26)$$

За одиницю вимірювання активності приймається 1 розпад за секунду. Така одиниця активності називається *беккерелем* (Бк, becquerel (Bq)). Ця одиниця виміру дуже мала й тому частіше використовуються кратні їй величини мега- та гіга-беккерель:

$$1 \text{ МБк} = 10^6 \text{ Бк}, \quad 1 \text{ ГБк} = 10^9 \text{ Бк}. \quad (5.27)$$

Із визначення активності (5.23) випливає, що при заданій активності джерела необхідна кількість препарату зменшується зі зменшення його періоду напіврозпаду. Спочатку активність вимірювалась в одиницях Кюрі (Ки або Ci, curie). Згідно з останнім визначенням цієї одиниці, активність в один Кюрі має будь-яке джерело, в якому виникає $3,7 \cdot 10^{10}$ розпадів за секунду. Тобто маємо таку відповідність між різними одиницями активності:

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}; \quad 1 \text{ Бк} = 0,27 \cdot 10^{-10} \text{ Ки}. \quad (5.28)$$

Активність в 1 Ки приблизно відповідає активності 1 г радію (точніше активність його 1 г дорівнює 0,989 Ки). Радіоактивні препарати на основі $^{60}_{27}\text{Co}$, що використовуються в медицині для радіотерапії, мають активність від 4 до

Активність джерел радіоактивного випромінювання

40 ГБк, тобто $0,1 \div 1 \text{ Ки}$. Активність джерел, що використовуються для проведення хімічних аналізів зразків становить близько $10^6 \text{ ГБк} \approx 2,7 \cdot 10^4 \text{ Ки}$. Атомна бомба з еквівалентом 20 кт (кілотонн) тринітротолуолу через одну хвилину після вибуху створює активність $\approx 7,4 \cdot 10^{13} \text{ ГБк} \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ Ки}$.

Для кількісної оцінки дії будь-якого іонізуючого випромінювання в опроміненій речовині користуються термінами: поглинена доза та експозиційна доза (або іноді доза опромінення).

Поглинена доза (D) – це енергія (ϵ_n) іонізуючого випромінювання, що поглинається деякою одиницею маси m опроміненої речовини:

$$D = \frac{\epsilon_n}{m}. \quad (5.29)$$

Починаючи з 1953 р. поглинена доза вимірювалася в радах. За 1 рад приймалася поглинена доза, що відповідає поглиненій енергії 100 ерг на 1 г опроміненої речовини,

$$1 \text{ рад} = 100 \frac{\text{эрг}}{\text{г}} = 0,01 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}. \quad (5.30)$$

Зараз в системі СІ за одиницю поглиненої енергії прийнято грей (Гр) – одиниця, яка в сто разів більша, ніж рад: $1 \text{ гр} = 1 \text{ Дж/кг} = 100 \text{ рад}$.

Поглинена доза визначає енергію, що поглинається одиницею маси за довільний проміжок часу. Поглинена доза, що віднесена до одиниці часу, називається потужністю поглиненої дози:

$$P = \frac{D}{t}, \quad \text{Гр/с}, \quad (5.31)$$

де t – час поглинання енергії дози (тобто час дії опромінення).

Можливість випромінювання іонізувати повітря характеризується експозиційною дозою або дозою опромінення (X):

$$X = \frac{q}{m}, \quad (5.32)$$

де q – величина заряду, що виникає при іонізації повітря деякої маси m . Відношенням дози опромінення до часу опромінення називається *потужністю дози опромінення*.

За одиницю експозиційної дози в системі СІ прийнято таку інтенсивність випромінювання, яка приводить до появи в 1 кг сухого повітря іонів з сумарним зарядом кожного знаку в 1 кулон (1 Кл/кг). Але на практиці дозу опромінення зазвичай вимірюють у *рентгенах* (Р); 1 Р – це доза рентгенівського випромінювання або гамма-випромінювання з енергією до 200 кеВ, при якій сумарний заряд іонів (додатних або від'ємних), що виникає в 1 см^3 сухого повітря за нормальних умов дорівнює одній одиниці заряду в системі одиниць СГС ($\frac{1}{10^8}$ куло-

нів, $c=3 \times 10^8$ м/с – швидкість світла). Маса 1 см^3 повітря при нормальних умовах (температура – 0° C , тиск – 760 мм рт. ст.) дорівнює $1,293 \cdot 10^{-3}$ г, а заряд у $\frac{1}{10} \text{ с}$ кулонів дорівнює заряду у $2,082 \cdot 10^9$ парох одновалентних іонів у 1 см^3 такого повітря. Тому дія експозиційної дози в один рентген відповідає утворенню в повітрі кількості одновалентних іонів, що визначається співвідношенням:

$$1 \text{ Р} = 2,082 \cdot 10^9 \frac{\text{пар іонів}}{\text{см}^3 (\text{повітря})} = 1,61 \times 10^{12} \frac{\text{пар іонів}}{\text{г (повітря)}}. \quad (5.33)$$

Середнє значення енергії, що використовується для утворення однієї пари одновалентних іонів, дорівнює 34 еВ, і тому середня енергія (тобто середня поглинена доза), що приводить до іонізації з експозиційною дозою в один рентген, визначається співвідношеннями:

$$1 \text{ Р} \Rightarrow 1,61 \times 10^{12} \times 34 \times 1,602 \times 10^{-12} = 87,7 \frac{\text{ерг}}{\text{г (повітря)}} \quad (5.34)$$

Значення $87,7 \text{ ерг/г (повітря)}$ називаються енергетичними еквівалентами рентгена. Порівнюючи останнє значення з визначенням (5.30) одиниці 1 рад маємо: у випадку проходження рентгенівського випромінювання або гамма-випромінювання з енергією до 200 кеВ через повітря $1 \text{ рад} = 1,14 \text{ Р}$.

Величина експозиційної дози залежить від інтегрального потоку іонізуючого випромінювання, але їх співвідношення не просте й залежить як від типу випромінювання, так і від його енергії. Для рентгенівських і γ -променів з енергіями E_γ від 70 кеВ до 2 МеВ з точністю до 15% виконується просте співвідношення:

$$1 \text{ Р} = \frac{2 \times 10^9 (\text{фотон/с})}{E_\gamma (\text{МеВ})}. \quad (5.35)$$

Було встановлено, що біологічна дія іонізуючого випромінювання залежить не тільки від дози опромінення, але і від типу (γ -промені, α - та β -частинки, нейтрони). Коефіцієнт, який показує в скільки разів біологічна дія даного виду випромінювання сильніша за дію γ -випромінювання, називається коефіцієн-

Таблиця 5.4

Коефіцієнти відносної біологічної ефективності (КБВЕ)

Тип випромінювання	k
γ -промені та β -частинки	1
α -частинки та протони	10
Теплові нейтрони	3
Швидкі нейтрони	10
Важкі ядра	20

Активність джерел радіоактивного випромінювання

том відносної біологічної ефективності (КВБЕ) k або коефіцієнтом якості випромінювання (табл. 5.4). Для оцінки впливу випромінювання на живі організми була введена спеціальна величина, а саме еквівалентна доза.

Еквівалентною дозою поглиненого випромінювання H називають величину, яка дорівнює добутку поглиненої дози та коефіцієнта біологічної ефективності

$$H = k \cdot D . \quad (5.36)$$

За одиницю еквівалентної дози прийнято зіверт (Зв), що відповідає дозі 1 грей з коефіцієнтом $k = 1$. На практиці для вимірів еквівалентної дози поглиненого випромінювання частіше використовують позасистемну одиницю бер (біологічний еквівалент рентгена): $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бер}$. Одиниця 1 бер – це поглинута доза будь-якого типу випромінювання, яка створює в живому організмі такий самий ефект, що і поглинена доза в 1 рад рентгенівського випромінювання або гамма-випромінювання з енергією до 200 кеВ:

$$1 \text{ бер} = 0,01 \text{ Зв} = 1 \text{ рад} \cdot k.$$

Механізм біологічної дії ядерного випромінювання обумовлений тим, що воно викликає іонізацію атомів та розпад молекул усередині біологічної тканини. Це призводить до змін та руйнування клітин, що може являти загрозу для організму. Великі дози радіоактивних випромінювань викликають важке захворювання – променеву хворобу. Деякі дані про дози випромінювання наведено в табл. 5.5.

Таблиця 5.5

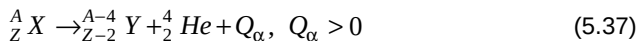
Характер дії доз випромінювання на людину

Випромінювання	Доза чи її потужність
Природний фон (космічне випромінювання, радіоактивність оточуючого середовища та тіла людини)	0,1 бер/рік
Доза, що призводить до загального опромінення всього тіла (променева хвороба, що призводить до смерті)	400-500 бер
Доза, що використовується в медицині (місцеве опромінення)	До 10000 бер

За даними Міжнародної комісії з радіологічного захисту небезпечними вважаються дози, що перевищують 35 бер на рік, тобто ті, що перевищують природний фон більш ніж на два порядки.

5.4. Альфа-розпад

Явище α -розпаду полягає в радіоактивному перетворенні ядер з вильотом ядер гелію (α -частинок) :



де символом Q_α вказано енергію α -розпаду, $Q_\alpha = (m_X - m_Y - m_\alpha)c^2$.

Основними характеристиками α -розпаду, як і будь-якого іншого радіоактивного процесу, є сукупність радіоактивних ядер, періоди їх напіврозпаду та енергії частинок, що вилітають.

Основні емпіричні властивості α -розпаду.

1. Зараз відомо декілька сотень α -радіоактивних ядер, більша частина з яких має заряд $Z > 83$. Будь-яке ядро з цієї області розпадається з вильотом α -частинок, і якщо такий розпад не знайдено, то лише тому, що порівняно з іншими типами розпаду він малоімовірний. Той факт, що спонтанний α -розпад має місце у важких ядрах впливає із закону збереження енергії. Дійсно, енергія зв'язку α -частинки дорівнює 28 MeV, тобто 7 MeV на нуклон. Тому α -розпад ядра буде енергетично можливим тоді, коли питома енергія зв'язку нуклона в ядрі становитиме менше, ніж 7 MeV. Звідси зрозуміло, що спонтанний α -розпад можливий для достатньо важких ядер, в яких питома енергія зв'язку $\bar{B} \leq 7$ MeV. Обчислення за напівемпіричною формулою Вейцзекера для енергій зв'язку показують, що питома енергія зв'язку нуклона стає меншою 7 MeV приблизно в області $A \geq 190$. Разом з тим напівемпірична формула дає лише середню залежність енергії зв'язку від A та Z і тому значення $\bar{B} < 7$ MeV можливі й в інших випадках.

2. Періоди напіврозпаду α -активних ядер лежать у дуже широких межах: від $3 \cdot 10^{-7}$ с для ${}^{212}_{82} \text{Pb}$ до $1,4 \cdot 10^{17}$ років для ${}^{204}_{82} \text{Pb}$. Але енергії α -частинок перебувають у досить вузьких інтервалах, а саме $4 \div 9$ MeV для важких ядер ($A \geq 210$) та $1 \div 4,5$ MeV для більш легких ядер з $140 \leq A \leq 210$. Залежність періоду напіврозпаду від енергії α -частинок описується емпіричним законом Гейгера – Неттола, якій можна записати у вигляді:

$$\lg T_{1/2} = -C + \frac{D}{\sqrt{E_\alpha}}, \quad (5.38)$$

де C, D – константи, які практично не залежать від енергії. Для ядер із зарядами з інтервалу $Z = 60 \div 100$ константи C, D наближено можна подати у вигляді

$$C = 28,9 + 1,61 \cdot Z^{2/3}, \quad D = 1,61 Z, \quad (5.39)$$

5.4. Альфа-розпад

якщо логарифми в (5.38) десяткові ($\lg(\dots) \equiv \log_{10}(\dots)$) і енергія вимірюється в MeV, а період напіврозпаду в роках. У випадку використання натурального логарифма в (5.38) значення констант з (5.39) треба збільшити в $\ln 10 = 2,3026$ разів. Спочатку закон Гейгера – Неттола, який був відкритий у 1911 р., мав вигляд співвідношення між періодом напіврозпаду та середньою довжиною L пробігу α -частинки в газі: $\ln T_{1/2} = a - b \ln L$. При записі цього закону у формі (5.38) враховано залежність довжини пробігу L від енергії α -частинки.

Згідно із законом Гейгера – Неттола (5.38) період напіврозпаду експоненціально залежить від енергії α -частинок. Наприклад, зменшення енергії на 1 % може привести до збільшення періоду напіврозпаду в 10 разів, а зменшення енергії на 10 % може змінити $T_{1/2}$ на $2 \div 3$ порядки.

Процес α -розпаду є суто квантовим процесом і його класичний опис неможливий. Дійсно, розглянемо графік залежності потенціальної енергії $V(r)$ α -частинки від відстані r від центру ядра (рис. 5.1).

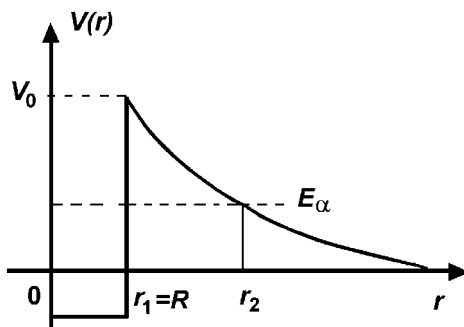


Рис. 5.1. Потенціальна енергія α -частинки: E_{α} – енергія α -частинки, R – радіус ядра

Зовні ядра із зарядом Z на α -частинку діє лише кулонівське поле відштовхування, тому

$$V(r) = \frac{2(Z-2)}{r} e^2, \quad r > R_0. \quad (5.40)$$

Усередині ядра діють інтенсивні ядерні сили притягання й потенціальна енергія від'ємна; у грубому наближенні вона може бути апроксимована прямокутною ямою. На межі ядра потенціал сягає свого максимуму

$$V_0 \equiv V(R) = \frac{2(Z-2)}{R_0} e^2 = 1,44 \frac{2(Z-2)}{r_0 A^{\frac{1}{3}}} \approx 2,4(Z-2) A^{-\frac{1}{3}} (\text{MeV}), \quad (5.41)$$

оскільки всередині ядра потенціальна крива різко падає вниз. Таким чином, поблизу межі ядра існує кулонівський бар'єр, висоту якого можна оцінити із формули (5.41). Підставляючи в неї, наприклад, характеристики урану

($Z = 92$, $A = 238$, $r_0 = 1,2 \text{ фм}$), маємо:

$$V_0 \approx 35 \text{ МеВ.} \quad (5.42)$$

Але α -частинки радіоактивного розпаду поширених у природі ядер мають енергії, що не перевищують 10 МеВ , тому при описі їх вильоту законами класичної механіки, вони залишалися б "замкненими" всередині ядра й ніякий α -розпад не існував би.

Тільки врахування квантових ефектів при описі руху α -частинки, а саме її хвильових властивостей, дало змогу описати проникнення (тунелювання) α -частинки скрізь бар'єр.

5.5. Елементарна теорія α -розпаду як тунелювання скрізь бар'єр

Для обчислення ймовірності проходження частинки скрізь бар'єр розглянемо задачу про рух частинки в полі одномірного прямокутного бар'єра ширини a та висоти V_0 , що перевищує енергію частинки E (рис. 5.2). Рух частинки описується рівнянням Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = E\Psi, \quad (5.43)$$

яке в областях 1, 2 та 3 має вигляд

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0, \\ 2. \quad & \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\Psi = 0, \\ 3. \quad & \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Введемо позначення

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}, \quad \chi = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}, \quad \eta = \frac{\chi}{k}, \quad (5.45)$$

тоді розв'язки рівнянь Шредінгера (5.44) у відповідних областях мають вигляд:

5.5. Елементарна теорія α –розпаду як тунелювання скрізь бар'єр

$$\begin{aligned} 1. \Psi_1 &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, & -\infty < x < 0, \\ 2. \Psi_2 &= A_2 e^{-\chi x} + B_2 e^{\chi x}, & 0 \leq x \leq a, \\ 3. \Psi_3 &= A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}, & a < x < \infty. \end{aligned} \quad (5.46)$$

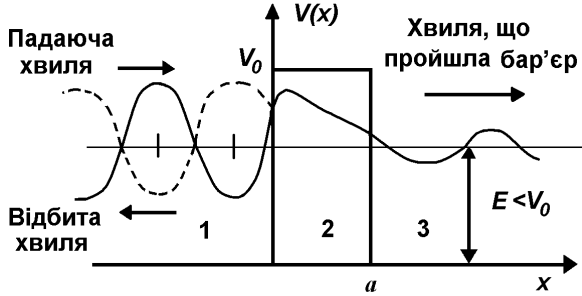


Рис. 5.2. Проходження частинки через одновірний прямокутний бар'єр

Для знаходження фізичної інтерпретації компонентів хвильових функцій визначимо напрям руху частинок. Очевидно, що він збігається з напрямком вектора $\vec{j}$ густини потоку частинок:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \bar{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \bar{\nabla} \Psi) \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \frac{d}{dx} \Psi^* - \Psi^* \frac{d}{dx} \Psi) \cdot \hat{e}_x = \\ &= -\frac{\hbar}{m} \text{Im}(\Psi \frac{d}{dx} \Psi^*) \cdot \hat{e}_x, \end{aligned} \quad (5.47)$$

де $\hat{e}_x$ – одиничний вектор уздовж вісі X . Для частинок з хвильовими функціями $\phi^{(\pm)} = \exp(\pm ikx)$ маємо

$$\overline{j^{(\pm)}} = -\frac{\hbar}{m} \text{Im}[\phi^{(\pm)} \frac{d\phi^{(\pm)*}}{dx}] = \pm v \hat{e}_x, \quad (5.48)$$

де $v = p/m = \hbar k/m$ – швидкість частинки. Із цієї формули видно, що опис частинки хвильовою функцією у вигляді плоскої хвилі означає, що вона рухається ($v \neq 0$), і знак у показнику експоненти плоскої хвилі визначає напрям її руху. А саме, компоненти хвиль Ψ_1 та Ψ_3 треба інтерпретувати таким чином:

1) $\phi_0^{(+)} \equiv A_1 e^{ikx}$ є падаючою хвилею, яка відповідає руху частинки зліва від бар'єра з $x = -\infty$ до бар'єра зі значенням потоку

$$\vec{j}_0 = j_0 \hat{e}_x, \quad j_0 = |A_1|^2 v; \quad (5.49)$$

2) $\varphi_r^{(-)} \equiv B_1 e^{-ikx}$ – відбита хвиля, яка відповідає руху частинок відбитих від бар'єра з потоком

$$\vec{j}_r = -j_r \hat{e}_x, \quad j_r = |B_1|^2 v; \quad (5.50)$$

3) $\varphi_d^{(+)} \equiv A_3 e^{ikx}$ є хвильовою функцією частинок, що пройшли бар'єр і рухаються від бар'єра з потоком

$$\vec{j}_d = j_d \hat{e}_x, \quad j_d = |A_3|^2 v; \quad (5.51)$$

4) $B_3 e^{-ikx}$ відповідає хвилі, яка йде від нескінченності до бар'єра з потоком

$$\vec{j}_{\text{inf}} = -j_{\text{inf}} \hat{e}_x, \quad j_{\text{inf}} = |B_3|^2 v. \quad (5.52)$$

За умовами задачі потік j_{inf} відсутній, звідки маємо

$$B_3 = 0. \quad (5.53)$$

Розв'язки Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 є частинами єдиної хвильової функції і тому мають задовольняти умовам неперервності функції та її похідних на межах бар'єра (умови зшивання), тобто в точках $x=0$ і $x=a$ (рис. 5.2):

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= \Psi_2(0), & \Psi_2(a) &= \Psi_3(a); \\ \Psi_1'(0) &= \Psi_2'(0), & \Psi_2'(a) &= \Psi_3'(a). \end{aligned} \quad (5.54)$$

де $\Psi_j'(z) = d\Psi_j(x)/dx$ похідна при $x=z$. Ці умови зшивання приводять до систем рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \\ A_1 - B_1 = -i\eta(B_2 - A_2), \end{cases} \quad (5.55)$$

та

$$\begin{cases} A_2 e^{-\chi a} + B_2 e^{\chi a} = A_3 e^{ika}, \\ A_2 e^{-\chi a} - B_2 e^{\chi a} = -\frac{i}{\eta} A_3 e^{ika}. \end{cases} \quad (5.56)$$

Взявши суму та різницю рівнянь (5.56), одержуємо

$$A_2 = \frac{1}{2} e^{ika} e^{\chi a} \left(1 - \frac{i}{\eta}\right) A_3; \quad B_2 = \frac{1}{2} e^{ika} e^{-\chi a} \left(1 + \frac{i}{\eta}\right) A_3. \quad (5.57)$$

Підставивши ці вирази в систему рівнянь (5.55), приходимо до співвідношень

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{ika} \left[ch\chi a + \frac{i}{2} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) sh\chi a \right] A_3, \\ B_1 &= -\frac{i}{2} e^{ika} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) (sh\chi a) A_3. \end{aligned} \quad (5.58)$$

5.5. Елементарна теорія α –розпаду як тунелювання скрізь бар'єр

Звідси видно, що коли існує падаюча хвиля, тобто при $A_1 \neq 0$, коефіцієнти A_3 та B_1 ніколи не дорівнюють нулю. Оскільки величина A_3 визначає ймовірність знаходження частинки зовні бар'єра, то умова $A_3 \neq 0$ означає, що з погляду квантової механіки завжди існує ймовірність знайти частинку, яка налітає на бар'єр, у будь-якій точці простору зовні бар'єра.

Кількісно ймовірність відбиття та проходження частинки через бар'єр характеризується коефіцієнтом R відбиття та коефіцієнтом D проходження або прозорості бар'єра. *Коефіцієнтом відбиття* (reflection coefficient) називається відношення абсолютного значення густини потоку j_r у відбитій хвилі до густини потоку j_0 , що падає:

$$R \equiv \frac{j_r}{j_0} = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2. \quad (5.59)$$

Коефіцієнтом проходження D (transmission coefficient) або коефіцієнтом прозорості бар'єра (barrier transparency) називається відношення абсолютних значень густин потоків j_d , j_0 у хвилях, що пройшли бар'єр та падають на нього

$$D \equiv \frac{j_d}{j_0} = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2. \quad (5.60)$$

Окрім коефіцієнта D часто вводять так званий *коефіцієнт проникливості* бар'єра P (penetration factor) як відношення ймовірності $|\varphi_d^{(+)}(a)|^2 \equiv |\psi_3(a)|^2$ знайти частинку зовні бар'єра до інтенсивності $|\varphi_0^{(+)}(0)|^2$ хвилі (5.51), що падає на бар'єр

$$P \equiv \left| \frac{\varphi_d(a)}{\varphi_0(0)} \right|^2 = \left| \frac{\psi_3(a)}{\varphi_0^{(+)}(0)} \right|^2. \quad (5.61)$$

У випадку, коли частинка рухається вільно в областях 1 та 3, її швидкість у цих областях є однаковою, а значення коефіцієнтів проникливості (P) і прозорості (D) бар'єра збігаються

$$P = D = |A_3 / A_1|^2. \quad (5.62)$$

Із співвідношень (5.58) маємо

$$D = \left| \frac{A_1}{A_3} \right|^{-2} = ch^2 \chi a + \frac{1}{4} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 sh^2 \chi a, \quad (5.63)$$

$$R = \left(\left| \frac{B_1}{A_3} \right| / \left| \frac{A_1}{A_3} \right| \right)^2 = 4D^{-1} / \left(\left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)^2 sh^2 \chi a \right),$$

оскільки $ch^2 \chi a - sh^2 \chi a = 1$,

$$D = 1/(1 + \alpha), \quad R = D\alpha, \quad \alpha \equiv \frac{1}{4} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)^2 sh^2 \chi a. \quad (5.64)$$

Видно, що коефіцієнти R і D задовольняють співвідношення $R + D = 1$, яке відображає закон збереження кількості частинок, або рівність одиниці ймовірності знаходження частинки в усьому координатному просторі.

Оскільки коефіцієнт $D \neq 0$, то бар'єр завжди буде прозорим незалежно від його висоти та ширини. Явище проходження частинок з енергією, що менша за висоту бар'єра, через бар'єр, і називається тунельним ефектом. Цей ефект повністю обумовлений хвильовими властивостями частинок.

У квазікласичному наближенні $\hbar \rightarrow 0$ (фактично у випадку високих або широких бар'єрів) виконується нерівність

$$\chi a \equiv a \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)} \gg 1. \quad (5.65)$$

Тому $\exp(\chi a) \gg 1$, $sh \chi a \approx \exp(\chi a) / 2$ і вираз для D спрощується та набуває вигляду

$$D \equiv P = \bar{D}_0 \exp(-2\alpha\chi) \equiv \bar{D}_0 \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} a\right\}, \quad (5.66)$$

де

$$\bar{D}_0 = \left(\frac{4\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 \equiv 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0} \right).$$

Вираз (5.66) справедливий лише за енергій E нижче бар'єра $V_0 (E < V_0)$, бо при $E = V_0$ перестає виконуватись умова (5.65). Коли $E = V_0$, тобто $\eta = 0$, то із загальної формули (5.64) одержуємо

$$D = 1 / \left(1 + \frac{1}{4} (ka)^2 \right) < 1. \quad (5.67)$$

Співвідношення (5.66) називається *формулою Гамова*. Очевидно, що ймовірність тунельного ефекту буде помітною лише в тих випадках, коли коефіцієнт D не дуже малий, тобто, коли значення величини $\chi a \equiv 2\sqrt{2m(U_0 - E)} a / \hbar$ не дуже велике. Згідно з (5.66) ймовірність проникнення бар'єра буде більш високою в частинках меншої маси, і при переході до класичної фізики $\hbar \rightarrow 0$ коефіцієнт прозорості бар'єра прямує до нуля, як і очікувалось.

Формулу (5.66) для коефіцієнта проходження прямокутного бар'єра можна узагальнити на випадок бар'єра $V(x)$ довільної форми (рис. 5.3). Для цього поділимо площу, обмежену кривою $V(x)$, на прямокутники з шириною $\Delta x \ll 1$. У квазікласичному наближенні для кожного i -го прямокутника з координатами

5.5. Елементарна теорія α –розпаду як тунелювання скрізь бар'єр

основи $x_i^*, x_i^* + \Delta x$ коефіцієнт проходження (проникливості) D_i' можна апроксимувати виразом (5.66) з деяким множником $\bar{D}_i'$:

$$D_i' = \bar{D}_i' \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m[V(x_i^*) - E]} \Delta x \right\}. \quad (5.68)$$

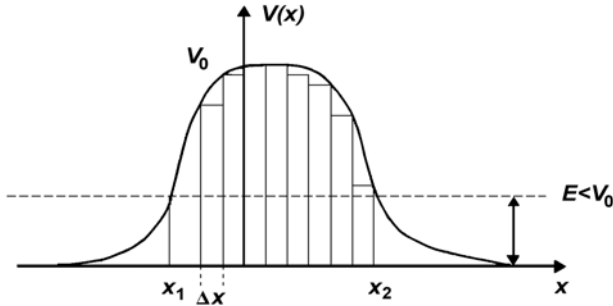


Рис. 5.3. Апроксимація бар'єра довільної форми прямокутними потенціалами

З визначення (5.60) випливає, що коефіцієнт проникності D усього бар'єра приблизно дорівнює добутку коефіцієнтів проникності для всіх елементарних бар'єрів $D \equiv \prod_i D_i'$. Тому показники експоненти у формулі для повного коефіцієнта D додаються, $D \sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sum_i \Delta x_i \sqrt{2m[V(x_i) - E]} \right\}$, і після заміни відпо-

відної суми в показнику експоненти на інтеграл маємо

$$D \equiv P = D_0 \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[V(x) - E]} dx \right\}, \quad (5.69)$$

де координати x_1 (початок бар'єра для частинки із заданою енергією) та x_2 (кінець бар'єра) знаходяться з умов:

$$V(x_1) = V(x_2) = E. \quad (5.70)$$

Координати x_1, x_2 називаються *точками повороту* і визначають дозволені межі класичного руху частинки; за класичною механікою рух частинок можливий лише в областях $E > V(x_1), V(x_2)$. Формулу (5.69) можна отримати і при розгляді руху частинок у квазікласичному наближенні.

Користуючись виразами (5.69) і (5.70), можна записати вираз для коефіцієнта проникливості сферичного бар'єра. Дійсно, проникливість сферичного бар'єра частинкою з кутовим моментом l визначається її радіальним рухом, який описується радіальним рівнянням Шредингера такого ж виду, як і у випадку одновимірного руху, але з ефективною потенціальною енергією $V_l(r)$ у вигляді

суми потенціальної ($V(r)$) і відцентрової ($\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$) енергій. Тому, коефіцієнт проходження сферичного потенціалу $V(r)$ залежить від кутового моменту l руху частинки та у квазікласичному наближенні має вигляд аналогічний (5.69) із заміною одновимірного потенціалу на ефективний потенціал:

$$P = D \equiv P_l = D_0 e^{-G_l(E)}; \quad (5.71)$$

$$G_l(E) = \frac{2}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{2m[V_l(r) - E]},$$

де D_0 – деяка константа, а

$$V_l(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (5.72)$$

– ефективна потенціальна енергія з урахуванням відцентрової енергії руху. Вираз $G_l(E)$ називається *показником Гамова*. Інтегрування в (5.71) виконується по внутрішній області бар'єра і значення точок повороту r_1 , r_2 для потенціалів з обмеженими значеннями похідних знаходяться з умов

$$V_l(r_1) = V_l(r_2) = E. \quad (5.73)$$

Для потенціалів у вигляді сходинок величина r_1 означає початкове (внутрішнє) значення координати бар'єра, а r_2 – її кінцеве (зовнішнє) значення.

Для знаходження сталої розпаду λ , що є величиною обернено пропорційною середньому часу τ життя радіоактивного ядра (див. (5.11)) і визначає середню ймовірність розпаду в одиницю часу, необхідно помножити проникливість бар'єра P_l на множник, який є добутком ймовірності w_α утворення α -частинки всередині ядра і частоти ν її зіткнень зі стінками ядра. У нульовому наближенні вважають, що $w_\alpha \cong 1$, а частоту зіткнень оцінюють, як величину, обернену до часу $\tau_\alpha = 2R_0/v_\alpha$, при якій α -частинка швидкості v_α проходить відстань, що дорівнює діаметру ядра.

З урахуванням (5.71) та (5.72) та для потенціалу, що зображений на рис. 5.1, вираз для сталої розпаду набуває вигляду:

$$\lambda_l = \lambda_l^{(0)} \exp\{-G_l\}, \quad \lambda_l^{(0)} = \frac{v_\alpha}{2R_0} D_0, \quad (5.74)$$

де показник Гамова G_l має вигляд:

5.5. Елементарна теорія α –розпаду як тунелювання скрізь бар'єр

$$G_l = \left(\frac{8m_\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_{R_0}^{r_2} (V_l(r) - E_\alpha)^{1/2} dr, \quad (5.75)$$

$$V_l(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{l(l+1)}{r^2},$$

а r_2 є розв'язком рівняння

$$V_l(r_2) = E_\alpha, \quad (5.76)$$

E_α і m_α – енергія та маса α -частинки. Якщо α -частинка виплітає з нульовим кутовим моментом, то $V_l(r_2) \equiv 2(Z-2)e^2/r_2 = E_\alpha$ і показник Гамова дорівнює:

$$G_{l=0} = \left[\frac{8m_\alpha E_\alpha r_2}{\hbar^2} \right]^{1/2} \int_{R_0}^{r_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right)^{1/2} dr, \quad r_2 = \frac{2(Z-2)e^2}{E_\alpha}. \quad (5.77)$$

Введемо нову змінну $x = (r/r_2)^{1/2}$, маємо

$$G_0 = (2m_\alpha E_\alpha)^{1/2} 4r_2 \int_{x_0}^1 \sqrt{1-x^2} dx, \quad x_0 = \sqrt{R_0/r_2}. \quad (5.78)$$

Виконуючи інтегрування, знаходимо

$$G_0 = (2m_\alpha E_\alpha)^{1/2} 4r_2 \frac{1}{2} [x\sqrt{1-x^2} - \arccos x] \Big|_{x_0}^1,$$

або

$$G_0 = \left(\frac{16(Z-2)e^2 m_\alpha r_2^2}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\arccos \left(\frac{R_0}{r_2} \right)^{1/2} - \left(\frac{R_0}{r_2} - \frac{R_0^2}{r_2^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (5.79)$$

При енергіях α -частинок значно менших кулонівського бар'єра $V_0 \equiv 2(Z-2)e^2/R_0 \gg E_\alpha$, тобто, відповідно до (5.77) при $r_2 \gg R_0$, вираз у квадратних дужках спрощується:

$$\left[\arccos \left(\frac{R_0}{r_2} \right)^{1/2} - \left(\frac{R_0}{r_2} - \frac{R_0^2}{r_2^2} \right)^{1/2} \right] \approx \frac{\pi}{2}, \quad (5.80)$$

і одержуємо

$$G_0 = \frac{4\pi(Z-2)e^2}{\hbar v_\alpha}. \quad (5.81)$$

Враховуючи (5.74), отримуємо вираз для сталої розпаду при вильоті α -частинок з нульовим орбітальним моментом

$$\lambda = \lambda_0^{(0)} \exp \left[-\frac{4\pi(Z-2)e^2}{\hbar v_\alpha} \right] = \lambda_0^{(0)} 10^{-\frac{\lg e 4\pi(Z-2)e^2}{\hbar v_\alpha}}. \quad (5.82)$$

Це співвідношення є не що інше, як закон Гейгера – Неттола, записаний для сталої розпаду. Дійсно, після логарифмування (5.82) і врахування співвідношення (5.8), $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$, маємо закон Гейгера – Неттола у звичайному вигляді (5.38), а саме:

$$\lg T_{1/2} = -C + \frac{D}{\sqrt{E_\alpha}}, \quad (5.83)$$

де період напіврозпаду обчислюється в секундах, енергія – у МеВ, а

$$C = -\lg \frac{\ln 2}{\lambda_0^{(0)}} = \lg(0,72 v_\alpha D_0) - \lg R_0,$$

$$D = (\lg e) 4\pi(Z-2)e^2 \left(\frac{m_\alpha}{2\hbar^2} \right)^{1/2} \approx 1,73 Z (1 - 2/Z). \quad (5.84)$$

Тепер оцінимо вплив орбітального моменту на проникність α -частинок. При $l \neq 0$ показник Гамова G_l (5.75) можна записати у вигляді

$$G_l = \left[\frac{8m_\alpha E_\alpha}{\hbar^2} \right]^{1/2} \int_{R_0}^{r_2} \left(\frac{r_2}{r} - 1 + \frac{\alpha}{r^2} \right)^{1/2} dr, \quad (5.85)$$

де $\alpha = \hbar^2 l(l+1) / (2m_\alpha E_\alpha)$.

Для важких ядер і при не дуже великих значеннях l доданок α/r^2 буде значно меншим, ніж перші два. Тоді в підінтегральному виразі можна виконати таке перетворення

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_2}{r} - 1 + \frac{\alpha}{r^2} \right) &= \left(\frac{r_2}{r} - 1 \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2} \left(\frac{r_2}{r} - 1 \right)^{-1} \right)^{1/2} \approx \\ &\approx \left(\frac{r_2}{r} - 1 \right)^{1/2} + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r_2}{r} - 1 \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Звідси знаходимо вираз для показника Гамова G_l при вильоті α -частинки з відмінним від нуля орбітальним моментом:

$$G_l = G_0 + \Delta G_l, \quad (5.87)$$

де

$$\Delta G_l = \left(\frac{2\hbar^2}{m_\alpha E_\alpha} \right)^{1/2} \frac{l(l+1)}{r_2^2} \left(\frac{r_2}{R_0} - 1 \right)^{1/2}. \quad (5.88)$$

5.5. Елементарна теорія α –розпаду як тунелювання скрізь бар'єр

Обчислюючи G_0 і ΔG_l за формулами (5.79) і (5.88) для ядра з $Z = 92$ і $A = 234$ та для $E_\alpha = 0,5 \text{ MeV}$, маємо: $G_0 \approx 16,6$; $\Delta G_1 \approx 0,14$; $\Delta G_2 \approx 0,21$. Тобто, при невеликих значеннях l величина ΔG_l мала і період напіврозпаду зростає зі зростанням кутового моменту через збільшення ефективного бар'єра ядра.

Квантово-механічна теорія α -розпаду, яка трактує його як тунельний процес, коректно описує всю сукупність експериментальних даних. Оскільки коефіцієнт A формули Гейгера – Неттола (5.83) залежить від радіуса ядра R_0 , то вивчення періодів напіврозпаду α -частинок дає непрямий метод визначення розмірів ядер. Цим методом отримано такі середні значення радіусів ядер:

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1,57 \pm 0,015 \text{ фм}. \quad (5.89)$$

З деяких ядер вилітають α -частинки з різними значеннями кінетичної енергії. У цьому випадку йдеться про тонку структуру α -спектрів. Як приклад, у табл. 5.6 та на рис. 5.4 наведено енергії та інтенсивності α -частинок, які утворюються при розпаді ядер ^{212}Bi .

Таблиця 5.6

Значення енергій та інтенсивностей α -частинок при розпаді ядер ^{212}Bi

Позначення випромінювання	E_α MeV	Відносна інтенсивність (%)
α_0	6,090	27,2
α_1	6,050	70,0
α_2	5,764	1,7
α_3	5,621	0,1
α_4	5,601	1,0
α_5	5,480	0,01
α_6	5,341	0,001
α_7	5,298	0,0001

Пояснення появи тонкої структури α -спектра дає рис. 5.4. з якого видно, що тонка структура спектра обумовлена α -розпадом з утворенням дочірнього ядра не тільки у основному, але і в збуджених станах. Подалі ядро із збуджених станів переходить у основний стан, як правило, за рахунок випромінювання γ -квантів. Відмітимо, що при розрахунках ймовірності α -розпаду обов'язково треба явно враховувати закон збереження повного кутового моменту і парності, якщо спіни основних станів материнського і дочірнього ядер значно відрізняються.

Емпіричні криві залежності періоду напіврозпаду від енергії E_α для α -переходів між основними станами парно-парних ядер в цілому добре узгоджуються з законом Гейгера – Неттола. Такі α -переходи називаються *дозволені* -

ми. Значення періоду напіврозпаду для α -переходів у непарних ядрах і міжзбудженими станами парно-парних ядер виявляються на 2-3 порядки меншими, ніж у випадку α -переходів між основними станами парно-парних ядер. Тому такі переходи умовно називають забороненими. Відношення періоду напіврозпаду ядра для забороненого α -переходу до відповідної середньої величини, що дається законом Гейгера – Неттола, називається *фактором* (або *коефіцієнтом*) *заборони*. Цей фактор характеризує зменшення ймовірності даного типу α -розпаду у порівнянні з ймовірністю α -переходу між основними станами парно-парних ядер при однакових енергіях розпаду.

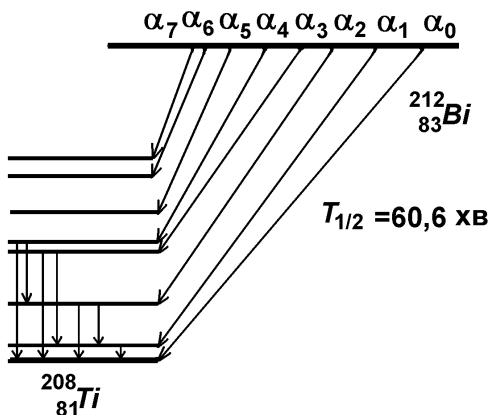


Рис. 5.4. Тонка структура α -спектра ядра ^{212}Bi

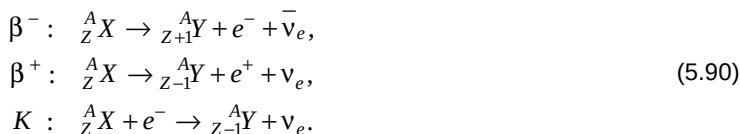
У розглянутій теорії α -розпаду припускалося, що α -частинки вже існують в ядрі. Насправді це не так, але ймовірність w_α утворення α -частинки в ядрі можна розглянути тільки за допомогою квантових багаточастинкових теорій. Ця ймовірність сильно залежить від ефекту об'єднання нуклонів у пари. Зокрема, α -розпад відбувається значно швидше, якщо α -частинки утворюються із нуклонних пар, а не із неспарених нуклонів. У першому випадку α -розпад називається *сприятливим*, у другому – *несприятливим*.

5.6. Бета-перетворення

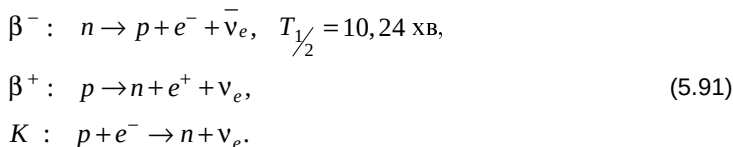
Явища β -розпаду полягають у спонтанному розпаді ядра, що приводить до зміни його заряду на одиницю при сталій кількості нуклонів. До таких процесів належить випромінювання ядром електрона e^- і антинейтрино $\bar{\nu}_e$ чи позит-

5.6. Бета-перетворення

рона e^+ і нейтрино ν_e , або ж поглинання ядром одного із електронів атомної оболонки (звичайно K -оболонки) з випромінюванням нейтрино ν_e :



Тоді, як α -розпад є процесом багатонуклонним, β -розпад є явищем переважно внутрішньонуклонним і відбувається внаслідок β -перетворень окремих нуклонів, а саме процесів



Бета-розпад вільного нейтрона вперше спостерігали та дослідили Снел і Міллер (1948); β -розпад вільного протона заборонено законом збереження енергії, але він може відбуватися всередині ядра. До β -перетворень з вильотом електронів та позитронів також приводять реакції захоплення нейтрино і антинейтрино нуклоном:



Процеси поглинання електрона, нейтрино та антинейтрино мають дуже маленькі ймовірності, але вони також були зареєстровані.

У цілому до β -розпаду відносяться такі процеси радіоактивних перетворень атомних ядер, в яких нейтрон переходить у протон, або навпаки, і бере участь пара частинок, які називаються *лептонами* (e^- , $\bar{\nu}_e$, e^+ , ν_e), тобто легкі частинки (від грецьк. "leptos" – тонкий, легкий). Після такого перетворення ядро не змінює своє масове число, але його заряд змінюється на одиницю: $\Delta Z = \pm 1$. Зазначимо, що лептони мають спин $1/2$ і також характеризуються деяким особливим квантовим числом, що називається *лептонним зарядом* або *лептонним числом*. Дослідження показують, що в усіх процесах кількість лептонів мінус кількість їх античастинок зберігається.

Із закону збереження енергії витікає, що сумарна кінетична енергія лептонів при β -розпадах подається такими виразами (приймаючи, що нейтрино має нульову масу і нехтуючи енергією віддачі ядра):

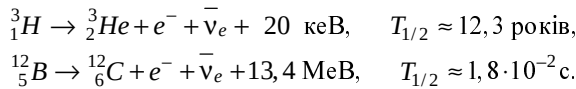
$$T_{\beta^-} \equiv T_{e^-, \max} = M(Z, N) - M(Z+1, N-1) - m_e c^2 = M_{AT}(Z, N) - M_{AT}(Z+1, N-1),$$

$$\begin{aligned}
T_{\beta^+} &\equiv T_{e^+, \max} = \\
&= M(Z, N) - M(Z-1, N+1) - m_e c^2 = M_{AT}(Z, N) - M_{AT}(Z-1, N+1) - 2m_e c^2, \\
T_{\varepsilon} &\equiv T_{\nu_e, \max} = \\
&= M(Z, N) - M(Z-1, N+1) + m_e c^2 = M_{AT}(Z, N) - M_{AT}(Z-1, N+1).
\end{aligned}
\tag{5.93}$$

Тут $M_{AT}(Z, N)$ – енергія спокою атома після нехтування різницею енергій зв'язку електронів атома, тобто $M_{AT}(Z, N) \equiv M(Z, N) + Zm_e c^2$, де $M(Z, N) = M(Z, A)$ – повна енергія спокою ядра (п.1.4.) (маса ядра в одиницях енергії).

Очевидно β -розпад є енергетично можливим, коли відповідні сумарні кінетичні енергії більше нуля. Кінетичні енергії T_{β^+} , T_{β^-} є також і максимально можливими кінетичними енергіями, відповідно, для електронів і позитронів, що випітають при β -розпаді. Очевидно, що у випадку відмінної від нуля маси нейтрино максимальна енергія $T_{e^\pm, \max}$ зменшується на енергію спокою нейтрино.

Енергія, що виділяється у одному акті β -розпаду змінюється в досить широких межах, наприклад, від 20 кеВ при розпаді тритію ${}^3_1\text{H}$ до 13,4 МеВ при розпаді ізотопу бора ${}^{12}_5\text{B}$,



Процеси β -розпаду обумовлені слабкою взаємодією й тому можуть бути досить повільними. Наприклад, ядро ${}^{10}_4\text{Be}$ зазнає електронного β^- -розпаду з періодом напіврозпаду $T_{1/2} \approx 2,5 \cdot 10^6$ років, перетворюючись у стабільне ядро ${}^{10}_5\text{B}$. Ядро ${}^{13}_7\text{N}$ зазнає позитронного розпаду з $T_{1/2} \approx 10$ хв, перетворюючись у стабільне ядро ${}^{13}_6\text{C}$. Ядро ${}^{37}_{18}\text{Ar}$, захоплюючи електрон атомної оболонки (K -поглинання), перетворюється в ядро ${}^{37}_{17}\text{Cl}$ протягом періоду напіврозпаду $T_{1/2} \approx 35$ днів. Деякі ядра можуть зазнавати декількох типів β -перетворень.

Деякий час був відомий лише один тип β -перетворень, а саме β^- -розпад, який розглядався як процес типу:



і називався просто β -розпадом. У 1914 р. Дж.Чедвік відкрив, що електрони, які утворюються при β -розпаді, мають неперервний енергетичний спектр, тобто можуть вилітати з довільними кінетичними енергіями T_e в інтервалі від 0 до $T_{e, \max}$. Це і призвело до необхідності перегляду схеми розпаду (5.94).

5.6. Бета-перетворення

Типову форму енергетичного спектра, тобто кількості електронів dN_e/dT_e , що вилітають в одиницю часу та інтервал енергії $dT_e \ll 1$ у межах від T_e до $T_e + dT_e$, зображено на рис. 5.5. Загальними властивостями всіх β -спектрів є їхня неперервність, наявність максимуму та максимальної енергії, після якої спектр обривається.

Особливості β -спектра та правила відбору за спінами між станами при β -розпаді стали основою для висунутої Паулі (1930) гіпотези про виникнення в цьому розпаді нейтральної частинки з дуже малою (можливо нульовою) масою та спіном $1/2$, яка вилітає разом з електроном. Саме в такій ситуації будуть виконуватися закони збереження енергії й моменту кількості руху. Оскільки спектр збуджених станів материнського ядра є дискретним, то саме перерозподіл сумарної енергії між електронами та ще одною частинкою може призвести до неперервного спектра β -частинки. Використовуючи сучасні позначення процес (5.94) записується як

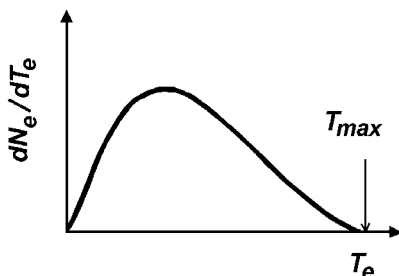
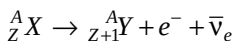


Рис. 5.5. Типова форма енергетичного β -спектра



і називається β^- -розпадом. Відповідна нейтральна частинка називається *антинейтрино*.

Тільки в 1953 р. у роботі на пучках нейтронів атомних реакторів (С.Ф.Рейнес, К.Коуен) вдалося зареєструвати процес поглинання антинейтрино



який безпосередньо і довів існування нейтрино.

Розглянемо форму спектра dN_e/dT_e електронів β -розпаду. Очевидно, що він є добутком повної кількості N_0 розпадів ядер і ймовірності dw/dT_e вильоту електрона в одиничний інтервал енергії:

$$\frac{dN_e}{dT_e} = N_0 \frac{dw}{dT_e}. \quad (5.96)$$

Величина dw/dT_e визначається ймовірністю $dw(\vec{p}, \vec{k})/dp d\Omega_p dk$ вильоту електрона й антинейтрино з імпульсами в інтервалах від p до $p + dp$ та від $\vec{k}$ до $\vec{k} + d\vec{k}$ в елемент суцільного кута $d\Omega_p$ вильоту електрона, а саме:

$$\frac{dw}{dT_e} = \frac{dw(p)}{dp} p'_e, \quad p'_e \equiv \frac{dp}{dT_e}, \quad (5.97)$$

$$dw(p) = \int d\Omega_p d\vec{k} \frac{dw(\vec{p}, \vec{k})}{dp d\Omega_p dk}. \quad (5.98)$$

Спочатку знайдемо ймовірність $dw(\vec{p}, \vec{k})$ вильоту електрона й антинейтрино з імпульсами, значення яких містяться в об'ємах $d\vec{p}$ і $d\vec{k}$. Уперше така ймовірність була обчислена Е.Фермі (1934). Він розглянув бета-розпад, як процес переходу нуклона з одного зарядового стану в інший з випромінюванням лептонів унаслідок слабкої взаємодії. Згідно з такою інтерпретацією бета-розпаду і користуючись теорією збурень за слабкою взаємодією (з потенціалом V_W), ймовірність $dw(\vec{p}, \vec{k})$ вильоту електрона й антинейтрино є добутком квадрата матричного елемента $\langle f | V_W | i \rangle$ переходу між початковим ($|i\rangle$) і кінцевим ($\langle f |$) станами та кількості $\Delta\Gamma_\beta = d\vec{p}/(2\pi\hbar)^3 \cdot d\vec{k}/(2\pi\hbar)^3$ можливих кінцевих станів лептонів з імпульсами в інтервалах $d\vec{p}$ і $d\vec{k}$:

$$\begin{aligned} dw(\vec{p}, \vec{k}) &= (2\pi/\hbar) |\langle f | V_W | i \rangle|^2 \delta(T_{\max} - T_e - ck) \Delta\Gamma_\beta \equiv \\ &\equiv D \delta(T_{\max} - T_e - ck) p^2 dp d\Omega_p k^2 dk d\Omega_k \end{aligned} \quad (5.99)$$

і тому

$$\frac{dw(\vec{p}, \vec{k})}{dp d\Omega_p dk} = D p^2 \delta(T_{\max} - T_e - ck). \quad (5.100)$$

Тут і в (5.99) $D = (2\pi/\hbar) |\langle f | V_W | i \rangle|^2 / (2\pi\hbar)^6$; $d\Omega_k$ – елемент суцільного кута вильоту нейтрино; за допомогою узагальненої δ -функції $\delta(T_{\max} - T_e - ck)$ враховується закон збереження енергії: $T_{\max} = T_e + ck$, де вважається, що маса спокою антинейтрино дорівнює нулю.

Значення похідної p'_e у формулі (5.97) легко отримати із релятивістського співвідношення між кінетичною енергією електрона та його імпульсом,

$$T_e = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} - m_e c^2.$$

Звідки маємо $p^2 = T_e(T_e + 2m_e c^2)/c^2$ та

5.6. Бета-перетворення

$$p'_{T_e} = (T_e + m_e c^2) / (c^2 p). \quad (5.101)$$

Припустимо, що величина D стала, тоді відповідно до (5.98) і (5.100) маємо

$$\frac{dw(p)}{dp} = D p^2 \int d\Omega_p d\Omega_k \delta(T_{\max} - T_e - ck) k^2 dk.$$

Користуючись властивостями δ -функції, виконавши в цьому виразі інтегрування за імпульсом k :

$$\int \delta(T_{\max} - T_e - ck) k^2 dk = (T_{\max} - T_e)^2 / c^3.$$

Знаходимо співвідношення для β -спектра у випадку нейтрино з нульовою масою:

$$\begin{aligned} N(T_e) &\equiv \frac{dN_e}{dT_e} \equiv N_0 \bar{B} c p (T_e + m_e c^2) (T_{\max} - T_e)^2 = \\ &= N_0 \bar{B} \sqrt{T_e (T_e + 2m_e c^2)} (T_e + m_e c^2) (T_{\max} - T_e)^2, \end{aligned} \quad (5.102)$$

де $\bar{B} = 16\pi^2 D / c^4$. У випадку вильоту позитронів їх спектр також має вигляд (5.102). Ця формула значно спрощується в граничних випадках дуже малих та дуже великих енергій вильоту β -частинок. Так у нерелятивістському наближенні малих енергій вильоту ($T_e \ll m_e c^2$) отримуємо

$$N(T_e) \sim \sqrt{T_e} (T_{\max} - T_e)^2, \quad T_e \ll m_e c^2 = 0,5 \text{ Мев}, \quad (5.103)$$

а в ультрарелятивістському випадку ($T_e \gg m_e c^2$) маємо

$$N(T_e) \sim T_e^2 (T_{\max} - T_e)^2, \quad T_e \gg m_e c^2. \quad (5.104)$$

У формулах (5.102) – (5.104) фактор D , а тому і $\bar{B}$ вважалися сталими. У такому наближенні не враховується дія кулонівського поля між ядром та β -частинкою після її вильоту з ядра. Цей ефект можна врахувати виділивши з функції $\bar{B}$ деяку функцію $(\Phi(Z, T_e))$, яка визначає дію кулонівського поля і явно обчислюється. Тобто, розподіл β -частинок (електронів і позитронів) за енергіями T_e у випадку вильоту антинейтрино (нейтрино) з нульовою масою спокою наближено можна подати у вигляді:

$$N(T_e) \equiv \frac{dN_e}{dT_e} \equiv N_0 B \sqrt{T_e (T_e + 2m_e c^2)} (T_e + m_e c^2) (T_{\max} - T_e)^2 \Phi(Z, T_e), \quad (5.105)$$

де $B = \bar{B} / \Phi(Z, T_e) \theta$ – коефіцієнт, що залежить від структури ядра. Якісно вплив кулонівського поля можна оцінити таким чином: при електронному розпаді кулонівська взаємодія електрона з ядром є взаємодією притягання і тому прагне зменшити енергію електрона, що вилітає. При позитронному розпаді навпаки, кулонівська взаємодія позитрона з ядром є відштовхувальною і прискорює його рух. Тому в результаті кулонівської взаємодії β^- -спектри збагачуються, а β^+ -спектри збіднюються частинками низьких енергій, як це і показано на рис. 5.6.

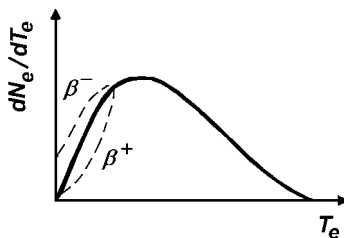


Рис. 5.6. Вплив кулонівського поля ядра на β -спектр. При низьких енергіях суцільна крива відповідає гіпотетичній ситуації незарядженого ядра з $Z = 0$

У нерелятивістському наближенні $\Phi(Z, T_e) = 2\pi x / (1 - \exp(-2\pi x))$, де $x = \pm Z_f e^2 / \hbar v_e$; знак "плюс" відноситься до електронів, а "мінус" — до позитронів, v_e — швидкість β -частинки на відстані від ядра, Z_f — атомний номер дочірнього ядра.

Параметр B у формулі (5.105) окрім константи, що характеризує інтенсивність слабкої взаємодії, може також залежати від енергії, від взаємних орієнтацій спінів та від кута між імпульсами β -частинки й нейтрино. Залежність величини B від енергії T_e виникає внаслідок загальних властивостей слабких взаємодій та особливостей структури ядра. У першому випадку залежність B від T_e слабка, $B \approx \text{const}$, і однакова в будь-якому розпаді, у т. ч. і при розпаді вільного нейтрона. У другому випадку $B \approx \text{const}$ лише при β -розпаді вільного нейтрона і для таких перетворень при яких не змінюються стани нуклонів в ядрі. В інших ситуаціях функція $B = B(T_e)$, а тому і форма β -спектра буде різною для ядер з різним характером структури станів.

Форма спектра, зображеного на рис. 5.5, повністю описується формулою (5.102) (або (5.105) з $\Phi = 1$ і $B \approx \text{const}$). Згідно з (5.103), (5.104), при малих енергіях спектр пропорційний $T_e^{1/2}$, а при великих енергіях $(T_{\max} - T_e)^2$. Розподіл (5.102) зникає на границях і має максимум при енергії приблизно $T_e \approx T_{\max} / 3$.

Сpektри вигляду (5.105) з $B \approx \text{const}$ називаються *дозволеними*. Якщо β -спектр має іншу форму, то його називають *забороненим*. Відхилення спектра від дозволеного свідчить про вплив структури ядра.

При доведенні формули (5.105) припускалося, що маси спокою антинейтрино $m_{\bar{\nu}}$ і нейтрино m_{ν} дорівнюють нулю. Якби нейтрино (антинейтрино) мало хоча б маленьку, але скінчену масу спокою, то форма дозволеного β -спектра суттєво змінилася б поблизу максимального значення $(T_{\max})$ кінетичної енергії бета-частинки.

5.6. Бета-перетворення

Так при $m_{\bar{\nu}} = m_{\bar{\nu}} = 0$ крива форми спектра на його межі з $T_e \rightarrow T_{\max}$ зменшується до нуля як парабола, а при ненульовій масі ця крива підходила б до вісі абсцис під деяким кутом (рис. 5.7). Крім того, максимальна енергія була б меншою за енергію спокою нейтрино. Ці особливості проявляються тим більше, чим більше значення $m_{\bar{\nu}}$. Ретельні виміри форми спектра поблизу $T_{\max}$, зокрема при β -розпаді тритію показали, що в межах похибок експерименту $m_{\bar{\nu}} = 0$.

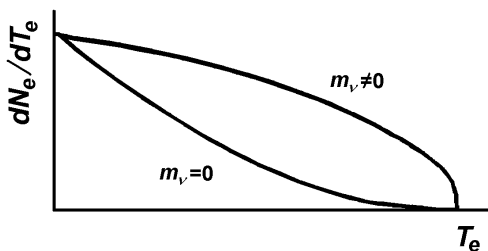


Рис. 5.7. Форма спектра на його межі з $T_e \rightarrow T_{\max}$ з різними значеннями маси нейтрино

Вираз (5.105) дозволяє обчислити сталу β -розпаду λ і тим самим період напіврозпаду β -процесів з дозволеною формою спектра. Загальна формула для сталої розпаду λ , тобто ймовірності розпаду в одиницю часу, має вигляд

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{1}{N_0} \int dN = \frac{1}{N_0} \int_0^{T_{\max}} N(T_e) dT_e = Bf(T_{\max}, Z), \quad (5.106)$$

де $f(T_{\max}, Z)$ – деяка складна, але відома функція $T_{\max}$ і Z .

В ультрарелятивістському випадку з $T_{\max} \gg m_e c^2 = 0,5 \text{ MeV}$ та при $\Phi(Z, T_e) = 1$, підстановки (5.104) у (5.106) та інтегрування маємо:

$$f(T_{\max}, Z) = T_{\max}^5 \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 = \frac{1}{30} T_{\max}^5. \quad (5.107)$$

Така залежність ймовірності розпаду в одиницю часу отримується для багатьох розпадів за рахунок слабкої взаємодії й називається *правилом Сарджента*. Співвідношення (5.107) означає, що час життя β -активних ядер швидко зменшується зі зростанням максимальної енергії β -частинок, але ця залежність від енергії не така сильна, як при α -розпаді. Часто досить точними виявляються такі наближення (неточність у $\lg f$ менше 0,3 для $0 < Z < 100$ і для $0,1 \text{ MeV} < T_{\max} < 10 \text{ MeV}$) (Г.Фридлендер, Дж.Кеннеді, Дж.Міллер, гл. 8):

$$\lg f_{\beta^-} = 4,0 \lg T_{\max} + 0,78 + 0,02 \cdot Z_f - 0,005 (Z_f - 1) \lg T_{\max},$$

$$\lg f_{\beta^+} = 4,0 \lg T_{\max} + 0,79 - 0,007 \cdot Z_f - 0,009 (Z_f + 1) (\lg(T_{\max}/3))^2 \quad (5.108)$$

Згідно з (5.106), якщо відомий період напіврозпаду $T_{1/2}$, то можна знайти й значення коефіцієнта B

$$B = \frac{\ln 2}{fT_{1/2}}. \quad (5.109)$$

Оскільки величина B змінюється від ядра до ядра через вплив їхньої структури на розпад, то величина $fT_{1/2}$ і є характеристикою такого впливу. Величина $fT_{1/2}$ називається *зведеним періодом напіврозпаду* і її значення змінюється в межах багатьох порядків. Тому β -перетворення ядра зазвичай класифікують за значеннями $\ln(fT_{1/2})$. *Переходи*, в яких $\ln(fT_{1/2}) \approx 5$ називають *нормально дозволеними*. За таких β -перетворень відбувається слабка перебудова ядра або за рахунок зміни ізоспіну всього ядра (при незмінних інших квантових числах нуклона, що зазнає β -розпад), або за рахунок переорієнтації спіну нуклона відносно орбітального моменту. *Переходи*, у яких $\ln(fT_{1/2}) \approx 2,5 \div 3,0$, називають *наддозволеними*. При таких переходах сумарний кутовий момент частинок, що вилітають, дорівнює нулю, а структура ядра, як правило, не змінюється.

Відмітимо також, що дозволених переходи класифікують і за значенням повного спіну лептонів, що вилітають. Дійсно, електрон та антинейтрино є частинками з напівцілими спінами $s = 1/2$ і тому повний спін S пари $e^- + \bar{\nu}_e$ ($e^+ + \nu_e$) може мати два значення: 0 і 1. Якщо $S = 0$ (спіни e^- і $\bar{\nu}_e$ (e^+, ν_e) антипаралельні), то перехід називається *ферміївським*. Таким, наприклад, є розпад вільного нейтрона та тритію. Якщо $S = 1$ (спіни e^- і $\bar{\nu}_e$ (e^+, ν_e) паралельні), то перехід називається переходом Гамова – Теллера. Така класифікація є важливою при встановленні правил відбору за кутовим моментом. Правила відбору для ферміївських переходів записуються у вигляді:

$$\Delta J = 0, \quad \pi_i = \pi_f, \quad (5.110)$$

тобто при таких переходах спіни і парності станів ядер не змінюються. Правила відбору для переходів Гамова – Теллера мають вигляд:

$$\Delta J = 0, \pm 1, \quad \pi_i = \pi_f \quad (5.111)$$

у всіх випадках, крім так званих $0-0$ -переходів, коли спіни станів початкового й кінцевого ядер дорівнюють нулю. В останньому випадку переходи Гамова – Теллера строго заборонені. У співвідношеннях (5.110), (5.111) враховано, що при дозволених переходах орбітальний момент частинок, що вилітають, дорівнює нулю й тому парність не змінюється.

Різні правила відбору за кутовими моментами для ферміївських переходів та переходів Гамова – Теллера обумовлені різним типом слабкої взаємодії.

5.6. Бета-перетворення

Так у нерелятивістському наближенні для бета-розпаду з вильотом електрона взаємодія ферміївського типу пропорційна ізоспінному оператору τ_- (див.

п. 2.4) знищення нейтронного й народження протонного станів: $V_W \equiv V_F \sim \tau_-$,

а для переходу Гамова – Теллера взаємодія також залежить від компонентів спінової матриці Паулі σ_α (див. п. 1.6): $V_W \equiv V_{GT} \sim \sigma_\alpha \tau_-$.

Прикладом чистого переходу Гамова – Теллера є розпад ізотопу гелію:



Справді, парність у цьому процесі не змінюється, а $\Delta J = 1$, оскільки спіни ядер ${}^6_4\text{He}$, ${}^6_3\text{Li}$ рівні відповідно 0 та 1. Приналежність переходу (5.112) до дозволених підтверджується тим, що його графік Фермі (див. нижче (5.113)) є прямою лінією.

Переходи зі значеннями $\ln(fT_{1/2}) \geq 9$ називаються *забороненими переходами* із ступенями заборони різних порядків: $\ln(fT_{1/2}) \approx 9$ – першого; $\ln(fT_{1/2}) \approx 15$ – другого; $\ln(fT_{1/2}) \approx 18$ – третього. Наявність заборонених переходів пов'язана з сильним зменшенням ймовірності β -розпаду при збільшенні значення сумарного орбітального моменту I_Σ пари електрон + антинейтрино (або $e^+ + \nu_e$). Якщо спіни початкового й кінцевого ядер сильно відрізняються за величиною, то згідно з законом збереження повного моменту кількості руху частинки мають вилітати з помітними значеннями I_Σ . Ймовірність вильоту частинок зі зростанням кутових моментів значно зменшується, що сильно пригнічує розпад і приводить до виникнення заборонених переходів. Саме значення сумарного орбітального моменту I_Σ електрона й антинейтрино (або $e^+ + \nu_e$) і є порядком заборони переходу.

Звичайно при дослідженнях відхилень форми β -спектра від дозволеного користуються так званим графіком Фермі (або Кюрі), коли по вісі абсцис відкладено енергію електрона (позитрона) β -розпаду, а по вісі ординат – значення функції

$$F(T_e) = \sqrt{\frac{dN_e}{dT_e}} \frac{1}{\sqrt{c p (T_e + m_e c^2)}} \equiv \frac{\sqrt{dN_e/dT_e}}{T_e^{1/4} (T_e + 2m_e c^2)^{1/4} (T_e + m_e c^2)^{1/2}}. \quad (5.113)$$

З формул (5.105), (5.113) випливає, що у випадку дозволеного розпаду в деякий один стан графік величини $F(T_e)$ є прямою лінією, яка закінчується на вісі абсцис при $T_e = T_{\max}$:

$$F(T_e) \sim (T_{\max} - T_e). \quad (5.114)$$

Такий вигляд, наприклад, має графік розпаду Фермі вільного нейтрона. Відхилення графіка Фермі від прямої лінії демонструє відхилення реального β -процесу від дозволеного та наявність каскадних β -розпадів. У випадку складного спектра, що складається з декількох дозволених розпадів на різні енергетичні рівні, графік Фермі буде мати прямолінійну ділянку при великих енергіях

електронів, яка відповідає розпаду на основний стан ядра. Для одиничного забороненого розпаду графік Фермі плавно скривлюється. За скривленням кривої можна встановити ступінь заборони переходу. За графіком Фермі можна розділити складний спектр на прості складові та визначити порядок заборони кожної складової. Ці дані важливі для дослідження структури ядер, тому що за їх допомогою можна встановити енергії та спіни збуджених станів ядра, а також отримати інформацію про поведінку нуклонів усередині ядра.

Бета-активні ядра більш поширені, ніж α -активні, та ізотопи, що β -розпадаються, існують майже для кожного хімічного елемента, починаючи з нейтрона. Відповідно до напівемпіричної формули Вейцекера (п. 1.4) за даного значення масового числа A стабільне ядро належить лінії β -стабільності й має заряд $Z_\beta = A / (1,98 + 0,0155A^{2/3})$ з можливо невеликим розкидом значень Z в обидва боки за рахунок індивідуальних властивостей ядер. При $Z \neq Z_\beta$ ядра нестабільні відносно β -розпаду і при зсуві з лінії β -стабільності відбуваються такі процеси:

а) в області $Z < Z_\beta$ ядра мають надлишок нейтронів і тому нестабільні по відношенню до β^- -розпаду;

б) в області $Z > Z_\beta$ ядра мають надлишок протонів та схильні до β^+ -розпаду, а також електронного захоплення.

Зі збільшенням надлишку нуклонів даного типу ядра можуть стати нестабільними відносно їх вильоту. Такі ядра називають *ядрами на лінії нестабільності* (drip-line). Ядра нестабільні щодо розпаду на нейтрони називають *ядрами на лінії нейтронної нестабільності* (neutron drip-line), а ядра нестабільні щодо протонного розпаду – *ядрами на лінії протонної нестабільності* (proton drip-line).

У багатьох випадках, коли енергетично можливим є виліт β^+ -частинки, з ним конкурує процес поглинання електронів атомної оболонки (електронне поглинання, electron capture (EC)). Найближче до ядра розміщені електрони K -оболонки, тому ймовірність їх поглинання є значно вищою, ніж для електронів, що розташовані далі від ядра і мають більш високі квантові числа. Тому процес поглинання електронів атомної оболонки часто називається *K-поглинанням*, або *K-захопленням*. У такому процесі також спостерігається характеристичне рентгенівське випромінювання, що виникає після заповнення електроном однієї з вищих атомних орбіт вакансії на K -оболонці.

Функції f_K , що визначає ймовірність K -поглинання в одиницю часу $\lambda_K = B \cdot f_K$ (див. (5.106)), можна обчислити за формулою подібною до (5.108), а саме:

$$\lg f_K = 2,0 \lg T_{\max} - 5,6 + 3,5 \lg (Z_f - 1), \quad (5.115)$$

але за $T_{\max} < 0,5 \text{ MeV}$ і при великих значеннях Z_f похибки обчислень за цією формулою можуть бути досить великими.

Через однаковість початкових і кінцевих станів ядер для β^+ -розпаду та електронного поглинання (у випадку їх одночасності) відношення сталих роз-

5.6. Бета-перетворення

паду $\lambda_K / \lambda_{\beta^+}$ (щонайменше для дозованих переходів) мусить не залежати від ядерного матричного елемента й дорівнювати f_K / f_{β^+} . Значення цих відношень загалом зростає зі зменшенням енергії розпаду (прямує до нескінченності за енергією розпаду $\leq 2m_e c^2$, коли виліт позитрона стає неможливим) та зі збільшенням Z . Останнє зумовлено зростанням ймовірності знаходження орбітального електрона (особливо K -електрона) в області ядра та зростанням ролі кулонівського поля, що зменшую ймовірність вильоту позитронів низьких енергій. Виміри відношення конкуруючих процесів електронного поглинання та позитронного розпаду дають можливість експериментальної перевірки теоретичних уявлень про процес бета-розпаду.

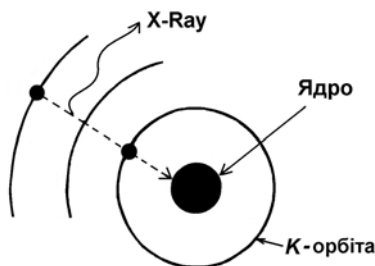


Рис. 5.8. Поглинання орбітального електрона атомної оболонки

У бета-перетвореннях беруть участь процеси, що обумовлені як слабкою взаємодією, так і сильною ядерною. З одного боку, елементарний акт усякого β -перетворення є внутрішньонуклонним процесом, з іншого – β -розпад залежить від характеристик ядерного стану нуклона, крім того, під час нього ядро перебудовується, як того вимагають закони збереження, і тим самим залежить від ядерних сил. Такі подвійні причини виникнення β -перетворень призводять до труднощів щодо їх точного опису.

Глава 6

ЗАГАЛЬНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ЯДЕРНИХ РЕАКЦІЙ

6.1. Основні поняття та визначення

Ядерною реакцією називають будь-який процес взаємодії частинок, який починається зіткненням двох або кількох мікрочастинок. *Мікрочастинками* зазвичай називають будь-які елементарні, або складні частинки, наприклад, нуклон, електрон, важкі іони, а також гамма-кванти. При зближенні до відстаней розміру ядра ($1\div 10$ фм), частинки, що стикаються, починають вступати в інтенсивну ядерну взаємодію, внаслідок якої утворюються дві чи більше частинки, які розлітаються в різних напрямках. Під час ядерної реакції відбуваються перерозподіли енергії та імпульсу, які супроводжуються утворенням частинок, що вилітають з області взаємодії. Зазвичай ядерна реакція викликається бомбардуванням ядер деякої речовини потоком прискорених частинок: протонів, α -частинок, нейтронів тощо. У більшості експериментальних випадків більш важка частинка нерухома й на неї налітає легка частинка. Нерухоми частинку називають *ядром-мішенню*.

Відомі різні реакції й існують різні типи їх класифікацій. Розглянемо деякі з них. Наприклад, залежно від типу частинок, що налітають, їх класифікують на реакції під дією нейтронів, під дією заряджених частинок (α -частинок, протонів, дейтронів, електронів), гамма-квантів (фотоядерні реакції), важких іонів тощо. Фотоядерні реакції відбуваються при дії електромагнітного поля на ядро, але також відносяться до ядерних реакцій, тому що електромагнітна взаємодія відбувається в області ядра, де діє ядерна взаємодія, яка приводить до збудження ядерних станів і перебудови структури ядра.

Ядерні реакції також відрізняють залежно від характеру перетворень ядра: непружне розсіювання з переходами на збуджені стани ядра-мішені; радіаційне поглинання (захоплення), коли енергію забирає гамма-випромінювання і виліт частинки стає неможливим; кулонівське збудження, коли ядру передається енергія кулонівського поля частинки, що пролітає; процеси поділу; ядерний синтез; реакції передачі нуклонів тощо. Кулонівське збудження належить до ядерних реакцій, тому що при цьому процесі відбувається зміна внутрішнього стану ядра, незважаючи на те, що заряджена частинка, яка взаємодіє з ядром, не проникає в нього. Реакції поділу важких ядер та термоядерні реакції синтезу

вивчаються окремо, бо вони приводять до значної перебудови ядер з виділенням великої кількості енергії.

Окрім того, ядерні реакції класифікують залежно від масових чисел ядер-мішеней як реакції на легких ($A \leq 50$), середніх ($50 \leq A \leq 100$) та важких ($A \geq 100$) ядрах. Ядерні реакції також розділяють за величиною енергії частинок, що налітають, а саме: за областю малих ($E < 1$ кеВ), низьких ($1 \text{ кеВ} \leq E \leq 1 \text{ МеВ}$), середніх ($1 \text{ МеВ} < E \leq 100 \text{ МеВ}$), великих ($100 \text{ МеВ} < E < 1 \text{ ГеВ}$), високих ($1 \text{ ГеВ} < E < 500 \text{ ГеВ}$) та надвисоких ($E \geq 500 \text{ ГеВ}$) енергій.

Ядерні реакції поділяються на класи залежно від моделей зіттовхування частинок у ядрі; у теорії ядерних реакцій такі моделі називаються *механізмами ядерних реакцій*.

З погляду фундаментальних знань вивчення ядерних реакцій дає змогу отримати інформацію про процеси, які відбуваються під час перебудови ядер, про характеристики основних та збуджених станів ядер та про властивості ядерних сил. З прикладної точки зору ядерні реакції важливі для їх використання у вивільненні внутрішньої енергії ядер, для виробництва ядерних ізотопів, при вивченні дії різного випромінювання на матеріали тощо.

Найпоширенішими є бінарні ядерні реакції, під час яких зіштовхуються дві частинки. Для ядерних реакцій бінарного типу, коли як на початку реакції, так і в її кінці з'являються дві частинки, прийняті такі позначення

$$a + X \rightarrow b + Y, \text{ або } X(a, b)Y, \quad (6.1)$$

де вважається, що частинка a налітає на ядро X , унаслідок чого утворюється ядро Y та частинка b . Загалом, зіткнення частинок a та X може супроводжуватися реакціями різного типу:

$$a + X \rightarrow \begin{cases} X + a, \\ X^* + a, \\ Y + b, \\ Z + b + c, \\ \dots \end{cases} \quad (6.2)$$

Процес $X(a, a)X$, під час якого не змінюється склад та внутрішні стани частинок називається *пружним розсіянням*. Процеси $X(a, a)X^*$, що відбуваються зі зміною внутрішнього стану ядра мішені, але зі збереженням складу кожної з частинок, називається *непружним розсіянням*. Реакція непружного розсіяння відбувається зі збудженням ядра-мішені та зміною за рахунок цього кінетичної енергії частинки a , що налітає. Під час інших непружних процесів має місце перерозподіл нуклонів в ядрах та утворення нових частинок.

Початкові та кінцеві стани в реакціях характеризуються сортом частинок, енергією відносного руху та набором інших квантових чисел, відповідних за їх внутрішній стан та відносний рух. Кожен із шляхів здійснення реакції, що відповідає індивідуальному набору характеристик системи, називається *каналом реакції*. Частинки a та X перед зіткненням вважають за такі, що перебувають у

6.2. Закони збереження в ядерних реакціях

вхідному каналі. Результат зіткнення відповідає вихідному каналу. Пружне розсіяння називають також *пружним каналом реакції*.

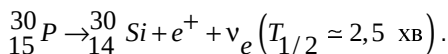
Історично першою ядерною реакцією, яку викликала людина, була реакція (α, p) на азоті (Е. Резерфорд, 1919):



Реакція (α, n) призвела до відкриття нейтрона (Дж.Чедвик, 1932):



При дослідженні продуктів реакції (α, n) : ${}^4_2\text{He} + {}^{27}_{13}\text{Al} \rightarrow n + {}^{30}_{15}\text{P}$, тобто ${}^{27}_{13}\text{Al}(\alpha, n){}^{30}_{15}\text{P}$, було вперше відкрито явище штучної радіоактивності (І. та Ф. Жоліо-Кюрі, 1934), а саме, перетворення фосфору в кремній



6.2. Закони збереження в ядерних реакціях

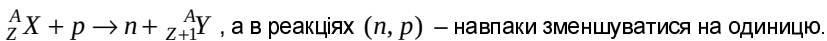
Ядерні реакції є різновидом фізичних процесів і тому, як і будь-який фізичний процес, вони можуть відбуватися лише тоді, коли виконуються всі необхідні закони збереження. Якщо конкретна реакція дозволена законами збереження, то вона обов'язково відбувається з деякою відмінною від нуля ймовірністю. *Вихідний канал*, що їй відповідає, називають *відкритим*. Зокрема, пружний канал є завжди відкритим. Коли утворення даного вихідного каналу заборонено хоча б одним законом збереження, то ядерна реакція не відбувається за даним каналом, і такий вихідний канал називають *закритим*. Така ситуація може, наприклад, виникнути у випадку реакції, яка відбувається з поглинанням енергії, за малих енергій частинок, що налітають. Для таких реакцій вихідні канали з вильотом нуклонів можуть бути закритими, бо для відриву нуклона від ядра його енергія має перевищувати енергію відриву ($\approx 7 \div 8 \text{ Мев}$ у важких ядрах).

Експериментальне дослідження ядерних процесів виявило, що в усіх без винятку випадках виконується збереження електричного та баріонного зарядів, згідно з яким відповідні сумарні заряди продуктів реакції дорівнюють сумарним зарядам початкових частинок. Закон збереження електричного заряду означає, що електричний заряд будь-якого вихідного каналу має дорівнювати заряду вхідного каналу, наприклад для реакції $X(a, b)Y$

$$Z_a + Z_X = Z_b + Z_Y, \quad (6.3)$$

де Z_q – атомний (порядковий) номер ядра типу q ($q = a, b, X, Y$) в одиницях заряду протона, наприклад, для електрона $Z_e = -1$. Із закону збереження (6.3), на-

приклад, маємо, що в реакціях (p, n) електричний заряд ядра зростає на одиницю:



Баріонний заряд нуклонів дорівнює $+1$ і значенню -1 для їх античастинок; для електронів та фотонів баріонний заряд дорівнює нулю. При енергіях, нижчих за порогову (3 ГеВ) утворення антинуклонів, античастинки в ядерних реакціях не народжуються й закон збереження баріонного заряду для ядерних реакцій означає, що сумарна кількість нуклонів не змінюється. Збереження електричного заряду (для ядер – атомного номера Z) та баріонного заряду B (для ядер в реакціях з енергіями < 3 ГеВ – масового числа A) дозволяє легкообразити конкретну схему реакції. При енергіях > 3 ГеВ можливо народження нуклон-антинуклонних пар $N_{nucl}, \tilde{N}_{nucl}$. У цьому випадку зберігається не кількість нуклонів, а різниця кількості нуклонів та анти-нуклонів: $(N_{nucl} - \tilde{N}_{nucl})$.

Під час здійснення ядерної реакції вплив зовнішніх збурень та детектуючої апаратури на частинки дуже малий через велику інтенсивність ядерної взаємодії. Можна вважати, що в області ядерної взаємодії частинки утворюють замкнену систему й тому виконуються закони збереження енергії, імпульсу, моменту кількості руху, парності та інших величин, які є інтегралами руху для даної системи частинок за відсутності зовнішніх полів.

В ядерних реакціях можуть брати участь ядра з різним складом і енергіями зв'язку. Суми мас частинок на початку реакції та в її кінці зазвичай різні. Звідки зрозуміло, що закон збереження енергії в ядерних реакціях необхідно формулювати з врахуванням (енергетичного еквіваленту) можливої зміни мас частинок. Наприклад, закон збереження енергії для бінарної реакції $X(a, b)Y$ у випадку нерелятивістського руху частинок має вигляд:

$$T_\alpha + E_a^* + E_X^* = T_\beta + E_b^* + E_Y^*, \quad (6.4)$$

де T_α – сума кінетичних енергій ядер a та X до зіткнення (тобто сума енергій зовні області ядерної взаємодії), а T_β – сума кінетичних енергій ядер b та Y після зіткнення; $E_a^*, E_X^*, E_b^*, E_Y^*$ – повні енергії частинок у стані спокою у вхідному (E_a^*, E_X^*) та вихідному (E_b^*, E_Y^*) каналах. Для ядра типу ${}_Z^AR$ енергія E_R^* у стані спокою є сумою енергії збудження ядра U_R та енергії $M(A, Z)c^2$, що відповідає його масі спокою:

$$E_R^* = U_R + M(A, Z)c^2, \quad M(A, Z)c^2 = (m_p Z + m_n(A - Z))c^2 - B_R, \quad (6.5)$$

де B_R – енергія зв'язку ядра R , а U_R – його енергія збудження, що відраховується від енергії основного стану. Якщо ядро R – нуклон, то в нерелятивістському випадку енергії збудження та зв'язку дорівнюють нулю: $B_R = U_R = 0$, $R = p, n$.

Поява енергій зв'язку в законі збереження енергії обумовлені зміною структури і складу ядер в ядерних реакціях. Зазвичай, закон збереження енергії переписують в більш простому вигляді, шляхом введення енергій відділення S_{aC}, S_{bC} частинок a, b від (складеного) ядра $C = a + X = b + Y$, яке із закону

6.2. Закони збереження в ядерних реакціях

збереження баріонного заряду, при енергіях $T_\alpha < 3$ ГеВ складається з однакової кількості нуклонів для будь-якого каналу розпаду. Енергії відділення частинок a і b від складеного ядра C визначаються таким чином:

$$\begin{cases} S_{aC} = B_C - B_a - B_X, \\ S_{bC} = B_C - B_b - B_Y, \end{cases} \quad (6.6)$$

де B_C – енергія зв'язку нуклонів у складеному ядрі C з $A_C = A_a + A_X \equiv A_b + A_Y$ нуклонами і зарядом $Z_C = Z_a + Z_X \equiv Z_b + Z_Y$. Енергії S_{aC} , S_{bC} легко обчислити за таблицями мас частинок. Такі обчислення були зроблені й зараз існують багато таблиць енергій відділення нуклонів і легких іонів від ядер. З врахуванням формул (6.5), (6.6) закон збереження енергії (6.4) можна переписати у вигляді

$$T_\alpha + S_{aC} + U_a + U_X = T_\beta + S_{bC} + U_b + U_Y, \quad (6.7)$$

або

$$T_\beta = T_\alpha + Q_{\alpha\beta}, \quad (6.8)$$

де величина

$$Q_{\alpha\beta} = Q + (U_a + U_X) - (U_b + U_Y), \quad Q = S_{aC} - S_{bC}, \quad (6.9)$$

визначає різницю кінетичних енергій руху частинок у вихідному та вхідному каналах і називається *енергією каналів α і β* , або *тепловим ефектом* (теплотою) каналів α і β . Ця величина також характеризує передачу енергії з початкового каналу α у кінцевий канал β .

Якщо значення енергії T_α таке, що кінетична енергія T_β каналу β , яка обчислена за (6.8), виявляється від'ємною, то він є закритим. У такому випадку реакція з вхідним каналом α і вихідним – β неможлива. Якщо $T_\beta > 0$, то канал реакції β є відкритим і реакція (α , β) можлива.

В експериментах, зазвичай, налітаюча частинка і ядро-мішень перебувають у своїх основних станах $U_a = U_X = 0$; такий вхідний канал позначаємо як α_0 . Часто експериментаторів цікавить мінімальна кінетична енергія T_{α_0} частинки a , що необхідна для виникнення реакції $X(a, b)Y$, незалежно від характеристик вихідного каналу, за яким виплітає частинка b . Така мінімальна енергія відповідає каналу, коли частинка, що виплітає, і кінцеве ядро перебувають у основних станах $U_b = U_Y = 0$. Позначимо такий канал як β_0 . Енергія каналів α_0 і β_0

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_0\beta_0} &\equiv Q = S_{aC} - S_{bC} \equiv B_b + B_Y - B_a - B_X = \\ &= [M(A_a, Z_a) - M(A_X, Z_X) - M(A_b, Z_b) - M(A_Y, Z_Y)]c^2, \end{aligned} \quad (6.10)$$

що є різницею мас частинок на початку і в кінці реакції, називається *енергією* або *тепловим ефектом* (теплотою) реакції $X(a,b)Y$. Згідно з (6.8) вона визначає максимальну кінетичну енергію ($T_{\beta_0} \equiv T_{bY}$), яку можуть мати частинка, що вилітає, і кінцеве ядро:

$$T_{\beta_0} \equiv T_{bY} = T_{\alpha_0} + Q, \quad (6.11)$$

де T_{α_0} – кінетична енергія вхідного каналу, коли частинка a і ядро X перебувають у своїх основних станах.

Реакція $X(a,b)Y$ можлива лише при додатній сумарній кінетичній енергії у вихідному каналі $T_{\beta} > 0$, або згідно з (6.11) лише у випадку, коли енергія частинки, що налітає, перевищує значення $-Q$:

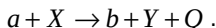
$$T_{\alpha} > -Q. \quad (6.12)$$

Реакція називається *екзотермічною*, якщо $Q > 0$ та *ендотермічною* при $Q < 0$. Відповідно до (6.12) маємо, що екзотермічні реакції також відбуваються за нульової кінетичної енергії в початковому каналі, а ендотермічні реакції мають поріг і можливі лише при

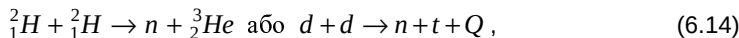
$$T_{\alpha} > |Q|. \quad (6.13)$$

Пружне розсіяння – процес з нульовою енергією реакції й тому завжди відбувається при зіткненні частинок.

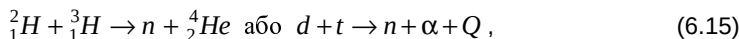
Енергію Q часто вводять до позначень реакції, записуючи, наприклад, реакцію $X(a,b)Y$ у вигляді:



Прикладом екзотермічної реакції є реакція злиття двох дейтронів $d(d,n){}_2^3\text{H}$:



в якій енергія вивільнюється у вигляді кінетичної енергії продуктів реакції ($Q = 3,266$ МеВ). Ще більше енергії вивільнюється в реакції злиття дейтрона з тритієм $d(t,n){}_2^4\text{He}$:



де $Q = 17,6$ МеВ, що становить 0,5% енергії спокою частинок. Обидва ці процеси відносяться до реакцій синтезу легких елементів і використовуються для створення потоків нейтронів у штучних джерелах нейтронів, що отримали на-

6.2. Закони збереження в ядерних реакціях

зву *генераторів нейтронів*. До сильно екзотермічних реакції належать і реакції вимушеного поділу важких ядер під дією нейтронів; у таких реакціях енерговиділення сягає ~ 200 MeV на ядро.

Закон збереження імпульсу для реакції $X(a,b)Y$ має вигляд:

$$\vec{P}_a + \vec{P}_X \equiv \vec{P}_C = \vec{P}_b + \vec{P}_Y, \quad (6.16)$$

де $\vec{P}_a, \vec{P}_b$ – імпульси частинок, що налітають і вилітають відповідно; $\vec{P}_X, \vec{P}_Y$ – імпульси материнського і дочірнього ядер; $\vec{P}_C$ – повний імпульс частинок.

При дослідженні зіткнення двох частинок або ядер зазвичай користуються двома системами координат: лабораторною (система L), в якій одна з частинок до розсіяння нерухома (зазвичай ядро-мішень X), а інша рухається щодо неї; та системою центра інерції (система C), в якій нерухомим є спільний центр інерції частинок, що зіштовхуються. Схематичне зображення процесу взаємодії двох частинок у різних системах наведено на рис. 6.1.

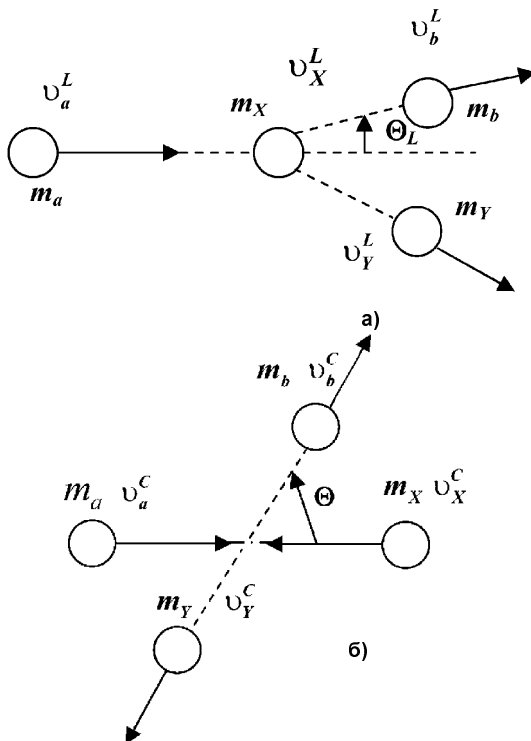


Рис. 6.1. Зіткнення частинок a та X : а) L -система; б) C -система;

v_j^L, v_j^C – швидкості частинки j у L - та C -системах

Закон збереження імпульсу має вигляд (6.16) у довільній системі координат. За визначенням у L -системі в цих рівняннях треба покласти

$$\vec{P}_X = 0, \quad (6.17)$$

а в C -системі:

$$\vec{P}_C = \vec{P}_a + \vec{P}_X = 0. \quad (6.18)$$

Згідно з (6.18) та законом збереження імпульсів при пружному розсіянні в системі центра інерції частинки у вхідному каналі рухаються назустріч одна одній; після розсіяння вони розлітаються в протилежні напрямки з рівними за модулем, але з протилежно спрямованими імпульсами $\vec{P}_b = -\vec{P}_Y$.

У нерелятивістському наближенні кінетичні енергії T_α та T_β руху частинок, що входили в закон збереження енергії (див. (6.4), (6.7), (6.8)), мають вигляд

$$T_\alpha = \frac{P_a^2}{2m_a} + \frac{P_X^2}{2m_X} = \varepsilon_\alpha + E_C, \quad T_\beta = \frac{P_b^2}{2m_b} + \frac{P_Y^2}{2m_Y} = \varepsilon_\beta + E_C, \quad (6.19)$$

де $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ – енергії відносного руху в каналах α, β ; E_C – енергія руху центра мас:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\vec{P}_\alpha^2}{2\mu_\alpha}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{\vec{P}_\beta^2}{2\mu_\beta}, \quad E_C = \frac{\vec{P}_C^2}{2M}, \quad M = m_a + m_X = m_b + m_Y. \quad (6.20)$$

Тут $\vec{P}_\alpha, \vec{P}_\beta$ та μ_α, μ_β – відносні імпульси та зведені маси частинок у каналах α, β :

$$\vec{P}_\alpha = \frac{m_X \vec{P}_a - m_a \vec{P}_X}{m_a + m_X}, \quad \vec{P}_\beta = \frac{m_Y \vec{P}_b - m_b \vec{P}_Y}{m_b + m_Y},$$

$$\mu_\alpha = \frac{m_a m_X}{m_a + m_X}, \quad \mu_\beta = \frac{m_b m_Y}{m_b + m_Y}. \quad (6.21)$$

У системі центра мас $E_C = 0$ із співвідношень (6.19) маємо, що кінетична енергія в довільному каналі збігається з кінетичною енергією відносного руху в даному каналі; наприклад, у вхідному:

$$T_\alpha = \varepsilon_\alpha \equiv \frac{1}{2M} \left(\sqrt{\frac{m_X}{m_a}} \vec{P}_a - \sqrt{\frac{m_a}{m_X}} \vec{P}_X \right)^2. \quad (6.22)$$

Звідси отримуємо, що енергія відносного руху зв'язана з кінетичною енергією $E_\alpha^L = \vec{P}_a^2 / 2m_a \equiv (\vec{P}_a^L)^2 / 2m_a$ частинки, що налітає, у лабораторній системі координат (6.17) співвідношенням:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{m_X}{m_a + m_X} E_\alpha^L. \quad (6.23)$$

6.2. Закони збереження в ядерних реакціях

Мінімальна кінетична енергія частинки, що налітає, у лабораторній системі координат, починаючи з якої реакція стає енергетично можливою, називається *порогом реакції* ($E_{\text{порог}}^L$). Відповідно до (6.12), (6.13) та (6.23) енергія порогу екзотермічної реакції дорівнює нулю, а ендотермічної

$$E_{\text{порог}}^L = \frac{m_a + m_X}{m_X} |Q|. \quad (6.24)$$

Якщо не враховувати внутрішні ступені свободи частинок, що зіштовхуються, то правила переходу від L -системи до C -системи аналогічні тим, що розглядаються в класичній механіці. Коли система центра мас рухається в лабораторній системі координат зі швидкістю:

$$\vec{V} \equiv \frac{\vec{P}_C}{m_a + m_X} = \frac{\vec{P}_a + \vec{P}_X}{m_a + m_X} \equiv \frac{\vec{P}_a^L + \vec{P}_X^L}{m_a + m_X} = \frac{m_a \vec{V}_a^L}{m_a + m_X},$$

то виміряний на експерименті кут розсіювання θ_L у лабораторній системі відліку відрізняється від кута розсіювання θ у системі центра мас і $\theta > \theta_L$. Із законів збереження енергії та імпульсу можна отримати співвідношення між кутами θ та θ_L для реакції $X(a,b)Y$:

$$\text{tg } \theta_L = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \gamma}, \quad \gamma = \left(\frac{m_a m_b}{m_X m_Y} \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha + Q} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.25)$$

або

$$\cos \theta_L = \frac{\cos \theta + \gamma}{\sqrt{1 + 2\gamma \cos \theta + \gamma^2}}. \quad (6.26)$$

При пружному розсіянні частинок $Q = 0$ і $\gamma = m_a / m_X$.

Із співвідношення (6.25) випливає, що при $\gamma < 1$ кут розсіювання θ_L у лабораторній системі координат монотонно зростає від 0 до π , коли в тому ж інтервалі зростає й кут θ . При $\gamma > 1$ кут розсіювання θ_L завжди менший за $\pi/2$. При $\gamma = 1$ цей кут розсіювання завжди в 2 рази менший, ніж кут розсіювання в системі центра мас: $\theta_L = \theta/2$.

При пружному розсіянні двох нуклонів однакової маси отримуємо з (6.21), (6.23), (6.25) вирази для зведеної маси, кінетичної енергії відносного руху ε і кута розсіювання в C -системі:

$$\begin{cases} m_a = m_X = m, \\ \mu_\alpha = \frac{m_a m_X}{m_a + m_X} = \frac{m}{2}, \\ \theta = 2\theta_L, \\ \varepsilon_\alpha = \frac{1}{2} E_a^L. \end{cases} \quad (6.27)$$

Звідси бачимо, що тільки половина повної енергії E^L нуклона в лабораторній системі є його енергією руху відносно центра інерції, а решта енергії – кінетична енергія руху центра мас.

В ядерних реакціях часто маса частинки, що налітає, набагато менше за масу ядра-мішені. У такій ситуації центр інерції буде майже збігатися з координатою ядра-мішені, тому енергія відносного руху ε_α буде мало відрізнятися від енергії налітаючої частинки в лабораторній системі; будуть дуже близькими й кути розсіяння; дійсно, згідно з (6.21), (6.23) і (6.25) маємо

$$\begin{cases} m_X \gg m_a, \\ \mu_\alpha \cong m_a, \\ \theta \cong \theta_L, \\ \varepsilon_\alpha \cong E_a^L. \end{cases} \quad (6.28)$$

Тобто можна вважати, що за умови $m_X \gg m_a$ система центра мас і лабораторна система збігаються.

Закони збереження енергії та імпульсу визначають так звану кінематику ядерних реакцій. Під якою розуміють сукупність значень енергій та кутів розльоту частинок (або імпульсів), а також обмеження на ці величини, які накладаються законами збереження. Розглянемо кінематичні обмеження, що існують у лабораторній системі координат для бінарної реакції, коли всі частинки перебувають у своїх основних станах. Згідно з законами збереження енергії (6.11) та імпульсу (6.16), (6.17) маємо:

$$E_a^L + Q = E_b^L + E_Y^L, \quad E_\alpha^L = \vec{P}_a^2 / 2m_a, \quad \vec{P}_a = \vec{P}_b + \vec{P}_Y, \quad (6.29)$$

де для спрощення запису опущено верхній індекс L у позначеннях імпульсів у лабораторній системі координат. Із закону збереження імпульсів отримуємо:

$$\begin{aligned} \vec{P}_Y^2 &= (\vec{P}_a - \vec{P}_b)^2 = \vec{P}_a^2 + \vec{P}_b^2 - 2P_a P_b \cos \theta_L = \\ &= 2m_a E_a^L + 2m_b E_b^L - 4\sqrt{m_a m_b E_a^L E_b^L} \cos \theta_L, \end{aligned}$$

тобто

$$E_Y^L = \vec{P}_Y^2 / 2m_Y = \frac{m_a}{m_Y} E_a^L + \frac{m_b}{m_Y} E_b^L - 2 \frac{\sqrt{m_a m_b E_a^L E_b^L}}{m_Y} \cos \theta_L.$$

Після підстановки цього виразу в закон збереження енергії (6.29) знаходимо таке співвідношення

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_Y}\right) E_b^L - \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right) E_a^L - \frac{2}{m_Y} \sqrt{m_a m_b E_a^L E_b^L} \cos \theta_L, \quad (6.30)$$

яке визначає можливі значення енергій та кутів розльоту частинок у лабораторній системі координат для реакції $X(a,b)Y$. Отримуємо вираз для можливих значень енергії за даних E_α^L та θ_L :

6.3. Ефективні перерізи розсіяння і реакцій

$$E_b^L = \frac{m_a m_b E_a^L}{(m_b + m_Y)^2} \left\{ \cos \theta_L \pm \sqrt{\cos^2 \theta_L + (m_b + m_Y)[(m_Y - m_a)E_a^L + m_Y Q]/(m_a m_b E_a^L)} \right\}^2.$$

Якщо в останній формулі другий доданок під коренем додатний або дорівнює нулю, то перед коренем маємо знак плюс і величина кута θ_L може набувати всіх значень від 0 до π . Якщо ж другий доданок під коренем від'ємний, то значення кута θ_L обмежено областю гострих кутів від 0 до $\theta_{\max}^L$, для яких корінь є дійсним. У цьому випадку при даному куті θ_L величина E_b^L може мати або два значення, або жодного.

Залежність енергії вилітаючої частинки E_b^L від кута θ_L має велике практичне застосування, тому що дозволяє отримувати вилітаючі частинки різних енергій, використовуючи бомбардуючі частинки з одним і тим самим значенням енергії. Ця обставина широко застосовується, наприклад, у генераторах нейтронів, що використовують реакції $d(d,n)_2^3\text{H}$, $d(t,n)_2^4\text{He}$ ((6.14), (6.15)) для отримання потоків моноенергетичних нейтронів різних енергій.

6.3. Ефективні перерізи розсіяння і реакцій

Кількісною характеристикою інтенсивності ядерної реакції є величина, яка називається *ефективним перерізом*. При визначенні перерізу зазвичай виходять з припущення про адитивність подій, які відбуваються на окремих ядрах у мішені, що має макроскопічні розміри. Вважають, що окремі ядра речовини є незалежними центрами взаємодії з частинками, що налітають. і розсіяння на окремих ядрах є некогерентним. З практики відомо, що в усіх ядерних реакціях, окрім випадку розсіяння дуже повільних нейтронів на кристалах (з довжиною хвилі нейтронів, що перевищує розмір їхньої ґратки), це припущення справджується.

У найпростіших випадках експерименти з дослідження реакцій зводяться до того, що на деяке ядро примушують падати частинки й вивчається розподіл частинок, що вилітають. Схематично таку ситуацію зображено на рис. 6.2. На нерухому мішень, яка складається з частинок сорту 2, падає (паралельний) пучок частинок сорту 1. Частинки 1 та 2 зіштовхуючись вступають у реакцію $1+2 \rightarrow 3+4$, унаслідок якої з мішені вилітають частинки 3. Вимірюється кількість частинок сорту 3 на відстані r , яка достатньо віддалена від розташованої на початку координат мішені, що значно перевищує область дії ядерної взаємодії. А саме, вимірюється кількість частинок ΔN , що проходять за час Δt через елемент поверхні dS з нескінченно малим елементом суцільного кута $d\Omega$, під яким видно цю поверхню: $dS = r^2 d\Omega$.

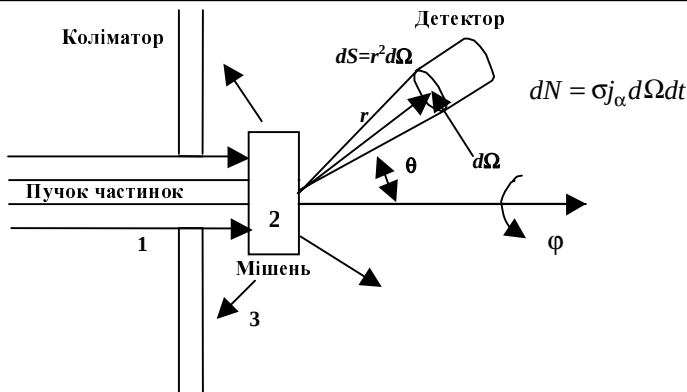


Рис. 6.2. Схематичне зображення експерименту взаємодії частинок з реєстрацією частинок типу 3 з припущенням, що налітаюча частинка має масу значно меншу за масу ядра-мішені. Згідно з (6.28) системи центра мас і лабораторна збігаються

З досліджень знаходять фізичну величину, яка визначає кількість частинок $\Delta N / \Delta t$, що пролітають за 1 с через поверхню dS . А саме обчислюють так званий переріз розсіювання $\sigma(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$, що дорівнює відношенню кількості розсіяних частинок (що вилітають під кутами θ та φ у межах суцільного кута $d\Omega$) до падаючих, за умови, що в одну секунду через одиничну поверхню проходить одна частинка падаючого пучка. Позначимо кількість частинок, що падає за 1 с/см² площі мішені, розташованої перпендикулярно до осі пучка, через j_α . Тоді коефіцієнт пропорційності $\sigma(\theta, \varphi)$ між кількістю $\Delta N / \Delta t$ частинок, що влітають в одиницю часу в елемент суцільного кута $d\Omega$ (під яким видно площадку dS) та густиною потоку падаючих частинок j_α є диференціальним ефективним перерізом розсіювання або реакції (часто таку величину називають *перерізом взаємодії частинок*):

$$\Delta N / \Delta t = \sigma(\theta, \varphi) \cdot j_\alpha \cdot d\Omega. \quad (6.31)$$

Оскільки величини j_α та $\Delta N / \Delta t$ мають розмірності $[j_\alpha] = \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ та $[\Delta N / \Delta t] = \text{с}^{-1}$, то диференціальний ефективний переріз $\sigma(\theta, \varphi)$ має розмірність площі. Саме тому цю величину й назвали *ефективним перерізом*. Залежність диференціального перерізу від кутів θ та φ називається *кутовим розподілом*. Полярний кут θ відносно траєкторії падаючого пучка називають *ку-*

6.3. Ефективні перерізи розсіяння і реакцій

том розсіяння. Інтеграл від $\sigma(\theta, \varphi)$ за суцільним кутом називається *інтегральним ефективним перерізом розсіяння* (реакції):

$$\sigma = \int \sigma(\theta, \varphi) d\Omega \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (6.32)$$

Інтегральний ефективний переріз має просту фізичну інтерпретацію. А саме, його можна розглядати як площу поверхні мішені, поперечної до пучка, попадання в яку з достовірністю призводить до реакції.

Значення ефективних перерізів для різних реакцій різні. Масштаб величини σ можна оцінити таким чином. Припустимо, що ядро є сферою радіуса R і лінійні розміри налітаючих частинок набагато менші за його радіус. Припустимо далі, що кожне попадання частинки в ядро призведе до ядерної реакції. Тоді можна очікувати, що ефективний переріз реакції буде дорівнювати площі поперечного перерізу ядра:

$$\sigma \equiv \sigma_{geom} = \pi R^2. \quad (6.33)$$

Радіуси легких ядер з $A \approx 10$ за порядком величини дорівнюють $1 \text{ фм} = 10^{-13} \text{ см}$, а важких з $A \approx 200$ – $10 \text{ фм} = 10^{-12} \text{ см}$. Згідно з оцінкою (6.33) маємо, що ядерні ефективні перерізи можуть бути величинами масштабу $10^{-24} - 10^{-26} \text{ см}^2$. Тому в ядерній фізиці та фізиці елементарних частинок за одиницю вимірювання перерізів приймають спеціальну одиницю – барн:

$$1 \text{ б} = 1 \text{ барн} \equiv 10^{-24} \text{ см}^2 = 100 \text{ фм}^2,$$

$$1 \text{ мб} = 1 \text{ мілібарн} = 10^{-3} \text{ б} = 10^{-27} \text{ см}^2 = 0,1 \text{ фм}^2,$$

$$1 \text{ мкб} = 1 \text{ мікробарн} = 10^{-6} \text{ б} = 10^{-30} \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ фм}^2.$$

Диференціальний та інтегральний перерізи розсіяння залежать від енергії частинки, що налітає. Інтегральний переріз як функція енергії ϵ_α відносного руху у вхідному каналі називається *функцією збудження*. Інтегральний переріз характеризує інтенсивність реакції і відповідно до формул (6.31) та (6.32) визначає ймовірність w за одиницю часу здійснення реакції під дією потоку падаючих частинок:

$$w = \sigma \cdot j_\alpha, \text{ с}^{-1}. \quad (6.34)$$

Очевидно, що інтегральні величини σ та w не залежать від вибору системи координат. Диференціальний переріз, на відміну від інтегрального, залежить від такого вибору. Співвідношення між диференціальними перерізами розсіяння в лабораторній системі (σ_L) та системі центра інерції (σ) знаходиться з очевидної умови, що кількості частинок, розсіяних у відповідні один одному елементи суцільних кутів у двох системах відліку, мають бути однаковими й не залежати від системи, тобто:

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_L} d\Omega_L = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (6.35)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\frac{d\sigma_L(\theta_L, \varphi_L)}{d\Omega_L} \cdot \sin \theta_L \cdot d\theta_L \cdot d\varphi_L = \frac{d\sigma(\theta, \varphi)}{d\Omega} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi, \quad (6.36)$$

де $\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta, \varphi)$ – диференціальний переріз у C -системі з полярним і азимутальним кутами θ, φ . Диференціюючи вираз (6.26), знаходимо співвідношення між $\sin \theta_L \cdot d\theta_L \equiv -d \cos \theta_L$ і $\sin \theta \cdot d\theta \equiv -d \cos \theta$. Після врахування рівності $\varphi_L = \varphi$ отримуємо з (6.36) співвідношення між перерізами розсіяння лабораторній системі та в системі центра інерції:

$$\sigma_L(\theta_L, \varphi_L) = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{|1 + \gamma \cos \theta|} \sigma(\theta, \varphi). \quad (6.37)$$

З (6.37) та (6.28) бачимо, що якщо маса налітаючої частинки значно менша маси ядра, тобто при $\gamma \ll 1$, диференціальні перерізи в L - та C -системах збігаються.

Як було зазначено вище, при фіксованому вхідному каналі можливі реакції з різними вихідними каналами. Часто необхідно знати переріз реакції деякого конкретного типу. Такий переріз називається *парціальним ефективним перерізом* і позначається як σ_i . Залежно від характеру ядерної реакції йдеться про переріз пружного розсіяння σ_{el} , переріз непружного розсіяння σ_{in} та перерізи різних реакцій. Сума всіх парціальних перерізів має назву *повного ефективного перерізу* $\sigma_t = \sum_i \sigma_i$. Часто з усіх можливих взаємодій виділяють пружне розсіяння і повний переріз подають у вигляді

$$\sigma_t \equiv \sum_i \sigma_i = \sigma_{el} + \sigma_r. \quad (6.38)$$

Це співвідношення фактично є визначенням ефективного перерізу реакції σ_r , куди входить і непружне розсіяння.

Переріз реакції з вхідним каналом α і вихідним β зазвичай позначають як $\sigma_{\alpha\beta}$. Цей парціальний переріз пов'язаний з ймовірністю $w_{\alpha \rightarrow \beta}$ в одиницю часу переходу з каналу α в β під дією падаючих частинок з густиною потоку j_α співвідношенням (6.34), а саме $w_{\alpha \rightarrow \beta} = \sigma_{\alpha\beta} \cdot j_\alpha$. Тому, якщо ймовірність переходу $w_{\alpha \rightarrow \beta}$ відома, то переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ переходу з каналу α в β можна знайти як

6.3. Ефективні перерізи розсіяння і реакцій

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{w_{\alpha\rightarrow\beta}}{j_{\alpha}}. \quad (6.39)$$

Часто диференціальний парціальний переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ обчислюють використовуючи означення (6.31), в якому кількість розсіяних частинок у каналі β записують у вигляді добутку густини j_{β} частинок розсіяних у каналі β на елемент поверхні $dS = r^2 d\Omega$ на великих відстанях від радіуса R області ядерної взаємодії, тобто

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta, \varphi) \cdot d\Omega = \frac{dN_{\beta}}{j_{\alpha}} = \frac{j_{\beta}}{j_{\alpha}} dS = \frac{j_{\beta} r^2 d\Omega}{j_{\alpha}}, \quad r \gg R. \quad (6.40)$$

В експерименті, зображеному на рис. 6.1, процес розсіяння вважався стаціонарним. При такому описі розсіяння припускається, що існує неперервний потік частинок, який після взаємодії з центром розсіяння переходить у потік розсіяних частинок. Задача розсіяння в такий постановці складається з обчислення потоку j_{β} розсіяних частинок на нескінченній відстані від центра розсіяння як функції потоку j_{α} падаючих частинок. Переріз обчислюють за формулами (6.40) після розрахунку j_{α} і j_{β} . Такий підхід тотожний задачі про розсіяння хвиль у класичній фізиці. Єдина відмінність та, що квантово-механічна хвилю-ва функція є хвилею ймовірності.

Можливий і інший – нестационарний підхід, що полягає в слідкуванні за зміною з часом початкового квантового стану системи α і визначенні ймовірності переходу $w_{\alpha\rightarrow\beta}$ у кінцевий стан β в одиницю часу. Це суто квантовий підхід. Він має застосування не тільки в порівняно простій задачі про взаємне розсіяння двох частинок, взаємодія яких характеризується деяким потенціалом, але й при розсіянні на мішенях, що мають складну будову, а також у системах квантових полів. Такий нестационарний підхід дозволяє описати також індивідуальний акт розсіяння однієї мікрочастинки на іншій. Він є більш загальним, ніж стаціонарний підхід також і тому, що його можна використовувати і в таких нестационарних процесах, де ймовірність переходу залежить від часу.

Різницю між стаціонарним та залежним від часу нестационарним підходам до розсіяння можна пояснити такою класичною аналогією. Нехай зі шлангу б'є вода. Перекриємо її рух важким каменем. Зіткнувшись з каменем, потік води розлетиться на всі сторони. Якщо вода тече достатньо довго, то картина буде стаціонарною й її можна сфотографувати з невеликою різкістю такою, що положення кожної з краплин води перекриваються. Така фотокартка буде показувати незмінну з часом картину розсіяння падаючої води каменем і символізуватиме стаціонарний підхід до розсіяння. Інший залежний від часу підхід – це слідкування за окремою краплинкою води, що вилітає зі шланга, відмічаючи, як вона рухається протягом часу при розсіянні.

Стаціонарний підхід використовується лише до стаціонарних процесів розсіяння, для яких можливо визначити незалежну від часу ймовірність переходу $w_{\alpha\rightarrow\beta}$ в одиницю часу з початкового каналу α у кінцевий β . У цьому випадку

перерізи можна обчислювати як за допомогою формули (6.39), так і виразу (6.40). Це впливає з рівняння неперервності, яке зв'язує зміну в часі ймовірності перебування системи в деякій точці простору з потоком частинок. Наприклад, для однієї частинки маси m , що рухається в дійсному потенціалі рівняння неперервності в диференціальній формі має вид:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = 0, \quad (6.41)$$

де $\text{div } \vec{j} \equiv \partial j_x / \partial x + \partial j_y / \partial y + \partial j_z / \partial z$ – операція дивергенції,

$$\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (6.42)$$

– густина ймовірності знаходження частинки в точці $\vec{r}$ у момент часу t ; $\psi(\vec{r}, t)$ – хвильова функція частинки, що задовольняє рівняння Шредінгера. Вектор, що визначається співвідношенням

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi), \quad (6.43)$$

є вектором густини потоку ймовірності. Останнє впливає з інтегрального вигляду виразу (6.41), а саме:

$$-\frac{\partial P(t)}{\partial t} = \oint_S j_r dS, \quad P(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad j_r = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial}{\partial r} \psi^* - \psi^* \frac{\partial}{\partial r} \psi \right), \quad (6.44)$$

який отримуємо після інтегрування (6.41) за об'ємом та використання теореми Гауса – Остроградського. Співвідношення (6.44) визначає зміну ймовірності $P(t)$ перебування частинки в деякому об'ємі V , обмеженому поверхнею S . Згідно з цим виразом зміна ймовірності відбувається внаслідок вильоту частинок з потоком j_r у радіальному напрямку. Інтеграл від j_r (нормальної складової вектора $\vec{j}$ по поверхні) є повною ймовірністю того, що частинка вилетить за поверхню в одиницю часу. Тому, ймовірність в одиницю часу того, що частинка після розсіяння перетне поверхню dS , дорівнює

$$w = j_\beta dS. \quad (6.45)$$

Величина $\rho(\vec{r}, t)$ є густиною частинок, і тому величину j_r треба розглядати, як перпендикулярний до поверхні середній потік частинок, що пролітають через одиничну площу в 1 с (наприклад, через площу 1 см^2 , якщо частинка перебуває в 1 см^3). Густина потоку ймовірності $\vec{j}$, як це безпосередньо впливає з формули (6.43), завжди обертається на нуль, якщо стан системи описується дійсною хвильовою функцією ψ . Це означає, що для зв'язаних станів потоки відсутні, тому що хвильові функції зв'язаних станів є дійсними з точністю до сталого фазового множника.

6.4. Стаціонарний опис пружного розсіяння безспінових частинок

Розглянемо пружне розсіяння в рамках стаціонарного підходу на прикладі розсіяння безспінової частинки маси m на силовому центрі з потенціалом $V(\vec{r})$ скінченного радіуса дії R , який перевищує суму радіусів ядер, що розсіюються:

$$V(\vec{r}) \equiv V(\vec{r})\theta(R-r). \quad (6.46)$$

Така задача відповідає взаємодії частинки з ядром, маса якого значно перевищує масу частинки m і тому центр тяжіння можна вважати таким, що збігається з центром ядра.

Помістимо нерухомий розсіючий центр у початок координат і за напрямком потоку падаючих частинок приймемо вісь Z . На великій відстані від розсіючого центра падаюча частинка рухається вільно й тому її хвильова функція має вигляд плоскої хвилі:

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0\vec{r}} = e^{ikz}, \quad \vec{k}_0 = k\hat{e}_z, \quad (6.47)$$

де $\hat{e}_z$ – орт уздовж вісі Z . Ця функція є розв'язком рівняння Шредінгера для вільного руху,

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi + E\varphi = 0, \quad (6.48)$$

з хвильовим числом $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$, яке зв'язане з імпульсом руху частинки p співвідношенням: $p = \hbar k$. Функція φ нормована так, що густина потоку падаючих частинок дорівнює швидкості v її руху в напрямку Z . Використовуючи (6.43), знаходимо

$$\vec{j} = j\hat{e}_z = \hat{e}_z \frac{\hbar}{2mi} \left(\varphi_{\vec{k}_0}^* \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{\vec{k}_0} - \varphi_{\vec{k}_0} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{\vec{k}_0}^* \right) = \hat{e}_z \frac{\hbar k}{m} = \hat{e}_z \frac{p}{m} = \hat{e}_z v. \quad (6.49)$$

Поблизу силового центра частинка взаємодіє з полем та розсіюється. Вигляд її хвильової функції змінюється й на досить великих відстанях $r \gg R$ разом з плоскою хвилею (6.47) існує розсіяна хвиля. Якщо потік розсіяних частинок направлений від центра розсіяння, то рух розсіяних частинок має описуватися сферичної розбіжною хвилею, а саме:

$$\Psi_{out} = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6.50)$$

де $f(\theta, \varphi)$ – амплітуда розбіжної хвилі, яка називається *амплітудою розсіювання*

і залежить від кутів θ , φ . Радіальна функція e^{ikr}/r у виразі (6.50) забезпечує додатний потік розсіяних частинок обернено пропорційний квадрату радіуса r . Саме тому стає можливим реєстрація на великих відстанях незалежної від відстані r сталої кількості частинок, що проходять через елемент сферичної поверхні $dS = r^2 d\Omega$ пропорцій квадрату радіуса сфери.

Повна хвильова функція, що описує рух налітаючих та розсіяних частинок на великих відстанях від центра розсіювання буде дорівнювати суперпозиції двох хвиль – плоскої падаючої (6.47) та сферичної розбіжної (6.50)

$$\psi = e^{ik_0 z} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \gg R. \quad (6.51)$$

Згідно із співвідношенням (6.40) для обчислення диференціального перерізу необхідно розрахувати потоки падаючих та розсіяних частинок. Густина потоку падаючих частинок (6.49) дорівнює швидкості частинок v . Згідно з (6.43) та (6.50), знаходимо вираз для радіальної густини потоку в розбіжній хвилі:

$$j_r \equiv \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_{out}^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_{out} - \psi_{out} \frac{\partial}{\partial r} \psi_{out}^* \right) = \frac{v}{r^2} |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (6.52)$$

Відношення розсіяного потоку (6.52) до падаючого (6.49) визначає відповідно до (6.40) диференціальний ефективний переріз

$$\frac{d\sigma(\theta, \varphi)}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{j_\beta r^2}{j_\alpha} = |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (6.53)$$

Таким чином, ефективний переріз повністю визначається величиною амплітуди розсіювання, яка характеризує поведінку хвильової функції на великих відстанях.

Знайдемо загальне співвідношення між амплітудою розсіювання та потенціалом $V(\vec{r})$. Для цього запишемо розв'язок рівняння Шредінгера, що задовольняє граничні умові (6.51), за допомогою функції Гріна $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$ у формі інтегрального рівняння, яке називається *рівнянням Ліппмана – Швінгера*:

$$\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \int G_0(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (6.54)$$

де функція ϕ є розв'язком рівняння Шредінгера (6.48) за відсутності взаємодії: $(\Delta + k^2)\phi = 0$ і має вигляд плоскої хвилі (6.47). Функція Гріна $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$ є функцією, що задовольняє рівняння Шредінгера без взаємодії (6.48) з точковим джерелом, а саме:

$$(\Delta + k^2)G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (6.55)$$

Неважко перевірити, що хвильова функція (6.54) з (6.55) задовольняє рівнянню Шредінгера із взаємодією:

6.4. Стаціонарний опис пружного розсіяння безспінових частинок

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + [E - V(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = 0. \quad (6.56)$$

Розв'язок (6.55), що відповідає розбіжним хвилям, має вигляд

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') \equiv G_0^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp[ik|\vec{r} - \vec{r}'|]}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.57)$$

Тому, формулу (6.54) можна переписати як

$$\psi(\vec{r}) = e^{ik_0 z} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \equiv \psi^{(+)} \quad (6.58)$$

Розглянемо далі інтеграл з (6.58) і знайдемо його значення на великих відстанях r . Конкретизуємо поняття великих відстаней. Для потенціалу скінченного радіуса дії (6.46) область значень $|\vec{r}'|$, в якій підінтегральна функція відмінна від нуля, має розміри R , тобто $|\vec{r}'| \leq R$. Тому, великими будемо називати відстані, для яких $|\vec{r}| \gg R$. Вони існують і для взаємодій $V(r)$, які не мають вигляд функції типу сходинок (6.46), але такі, що достатньо швидко спадають з відстанню. Очевидно, що при обчисленні інтегралу з (6.58) на великих відстанях, завжди виконується умова $r \gg r'$. Розкладаючи $|\vec{r} - \vec{r}'|$ у ряд маємо:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} \approx \sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} \approx r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}. \quad (6.59)$$

Підставляючи цей розклад у (6.58), знаходимо при $r \gg R$

$$\psi(\vec{r}) = \varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) - \frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r} \int e^{-ik\vec{r}\vec{r}'} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (6.60)$$

де, як і раніше, $\varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_0 \vec{r}) = \exp(ikz)$, а

$$\vec{k} = k\vec{n}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6.61)$$

є хвильовим вектором $\vec{k}$ частинки після розсіявання. Він характеризує напрям поширення розбіжної сферичної хвилі і направлений уздовж радіус-вектора $\vec{r}$. У падаючій хвилі $\varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_0 \vec{r}) = \exp(ikz)$ хвильовий вектор направлений уздовж осі Z . Порівняння (6.60) з (6.51) підтверджує, що асимптотична поведінка хвильової функції, що задовольняє рівняння Ліппмана – Швінгера, має загальний вигляд (6.51) з амплітудою розсіяння

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_{\vec{k}} | V | \psi \rangle, \quad (6.62)$$

$$\varphi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) = e^{-ik\vec{r}},$$

де зірочкою позначено операцію комплексного спряження.

Відмітимо, що задача про рух двох частинок з масами m_1 та m_2 , взаємодія між якими залежить лише від відносної координати $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, після переходу до системи центра мас зводиться до задачі про рух однієї частинки з ефективною зведеною масою $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Тому, після заміни m на μ , ототожнюючи кут θ з полярним кутом у системі центра мас, а енергію E – з енергією відносного руху ε , маємо, що формула (6.62) також визначає амплітуду розсіяння двох частинок у системі центра мас:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \Phi_k^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \equiv -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_k | V | \Psi \rangle. \quad (6.63)$$

Для обчислення амплітуд розсіяння за допомогою цієї формули необхідно знати функцію $\Psi(\vec{r})$ або вміти її розрахувати. Її можна знайти або як розв'язок диференціального рівняння Шредінгера (6.57) з граничною умовою (6.51), або розв'язавши інтегральне рівняння (6.54). Обчислення $\Psi(\vec{r})$ і $f(\theta, \varphi)$ у реалістичних задачах зазвичай пов'язане з достатньо великими математичними труднощами й тому в теорії розсіяння широко застосовуються наближені методи.

6.5. Наближення Борна для амплітуди розсіяння

Одним із найважливіших серед наближених методів обчислення хвильових функцій та амплітуд розсіяння є метод послідовних наближень. В основі цього методу лежить припущення про те, що енергію взаємодії $V(\vec{r})$ можна розглядати, як мале збурення. У такому випадку інтегральне рівняння Ліппмана – Швінгера (6.54) розв'язується методом ітерацій (послідовних наближень) вигляду:

$$\Psi = \sum_{N=0}^{\infty} \Psi^{(N)}, \quad (6.64)$$

$$\Psi^{(0)} = \Phi_{\vec{k}_0}, \quad \Psi^{(N)} = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G_0 V \Psi^{(N-1)} d\vec{r}', \quad N \geq 1, \quad (6.65)$$

тобто

$$\Psi(\vec{r}) = \Phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \Phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}') d\vec{r}' + \dots \quad (6.66)$$

Підставляючи (6.66) у (6.63), отримуємо вираз для амплітуди розсіяння у вигляді ряду з кількості зіткнень (взаємодій):

$$f(\theta, \varphi) = f_B(\theta, \varphi) + \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \int \Phi_k^*(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}) V(\vec{r}') \Phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' + \dots, \quad (6.67)$$

3

$$\begin{aligned} f_B(\theta, \varphi) &= f_B(\vec{k}_0, \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \Phi_k^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \Phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) d\vec{r} = \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \equiv -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_{\vec{k}} | V | \Phi_{\vec{k}_0} \rangle, \end{aligned} \quad (6.68)$$

де вектор $\vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}$ називають вектором зіткнень, а відповідний йому імпульс $\vec{p} = \hbar\vec{q}$ – вектором передачі імпульсу.

6.5. Наближення Борна для амплітуди розсіяння

Такий метод знаходження $f(\theta, \varphi)$ називається *методом послідовних наближень Борна*. Якщо цей ряд збігається і враховуються тільки перші N члени, а інші відкидаються, то отримане значення амплітуди розсіяння називається N -им борнівським наближенням. Вираз (6.68), що відповідає першому борнівському наближенню, має назву *формули Борна*, або *борнівського наближення*. У цьому наближенні замість хвильової функції ψ підставляється її нульове наближення, тобто падаюча плоска хвиля $\varphi_{\vec{k}_0}$.

Модуль вектора зіткнень $\vec{q}$ залежить від кута розсіяння θ між напрямками руху частинки у вхідному ($\hat{e}_z$) і вихідному ($\hat{n}$) каналах: $\hat{n} \cdot \hat{e}_z = \cos \theta$. З рис. 6.3 випливає, що $\vec{k}\vec{k}_0/k^2 \equiv \hat{n} \cdot \hat{e}_z = \cos \theta$, Тому маємо для модуля $\vec{q}$:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\vec{q}\vec{q}} = \sqrt{(\vec{k} - \vec{k}_0)(\vec{k} - \vec{k}_0)} = k\sqrt{(\hat{n} - \hat{e}_z)(\hat{n} - \hat{e}_z)} = \\ &= k\sqrt{\hat{n}^2 + \hat{e}_z^2 - 2\hat{n} \cdot \hat{e}_z} = k\sqrt{2(1 - \cos \theta)} = 2k \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

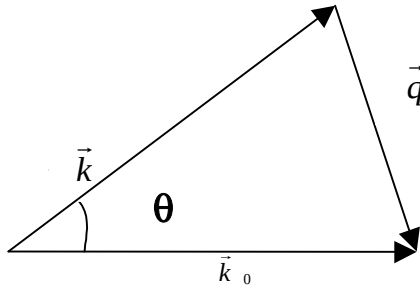


Рис. 6.3. Напрямки хвильових векторів до ($\vec{k}_0$) та після ($\vec{k}$) пружного розсіяння

Якщо потенціал $V(\vec{r})$ не залежить від кутів, тобто є сферично-симетричним $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$, то в (6.68) можна виконати інтегрування за кутами вектора $\vec{r}$ внутрішніх координат при фіксованому $\vec{q}$; маємо:

$$\begin{aligned} f_B(\theta, \varphi) &\equiv f_B(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r)r^2 dr \int_0^\pi e^{iqr \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' = \\ &= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r)r^2 dr \cdot \int_{-1}^1 e^{iqry} dy = -\frac{2\mu}{qh^2} \int_0^\infty V(r)r \sin(qr) dr. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Звідси видно, що у сферично-симетричних потенціалах амплітуда розсіяння не залежить від азимутального кута. Згідно з (6.53) диференціальний переріз пружного розсіяння частинок у першому борнівському наближенні набуває вигляду

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_b(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2}{q^2\hbar^2} \left| \int_0^\infty V(r)r \sin(qr) dr \right|^2. \quad (6.71)$$

При доведенні цієї формули не враховувався принцип Паулі і тому вираз (6.71), строго кажучи, можна застосовувати лише при розсіянні нетотожних частинок.

Відмітимо, що для швидкої збіжності рядів послідовних наближень (6.66) та (6.67) потрібно, щоб поправка першого наближення $\psi^{(1)}$ до хвильової функції була малою в порівнянні з хвильовою функцією нульового наближення $\psi^{(0)} = \phi_{\vec{k}_0}$, тобто має виконуватися нерівність $|\psi^{(1)}| \ll |\psi^{(0)}|$. Дослідження показують, що за деяких умов перше борнівське наближення може бути застосовним при будь-яких енергіях. Аналітичні оцінки умов його виконання для потенціалу у вигляді сходинок з радіусом дії R були отримані в двох граничних випадках, а саме: у випадку розсіяння частинок повільних енергій

$$\varepsilon \ll \frac{\hbar^2}{\mu R^2} \quad (6.72)$$

та у випадку розсіяння швидких частинок з енергіями

$$\varepsilon \gg \frac{\hbar^2}{\mu R^2}. \quad (6.73)$$

При розсіянні повільних частинок умова застосовності формули Борна (6.68) набуває вигляду:

$$\frac{\hbar^2}{\mu R^2} \gg |\bar{V}|, \quad (6.74)$$

де $\bar{V}$ – середнє значення потенціальної енергії взаємодії в області R

$$\bar{V} \equiv \frac{1}{R^3} \int r^2 V(\vec{r}) dr d\Omega. \quad (6.75)$$

Якщо вираз $\hbar^2/\mu R^2$ за порядком величини дорівнює мінімальній глибині потенціальної ями радіуса R , при якій виникає зв'язаний стан (див. п. 2.2), то умова застосування формули Борна при розсіянні повільних частинок енергій (6.72) має простий зміст. А саме, як кінетична, так і потенціальна середні енергії взаємодії частинки мають бути малими щодо мінімальної потенціальної енергії, при якій утворюється зв'язаний стан:

$$\frac{\hbar^2}{\mu R^2} \gg \varepsilon, \bar{V}.$$

У випадку великої енергії частинки область застосовності формули Борна набуває вигляду

$$\hbar v \gg |\bar{V}| R.$$

6.5. Наближення Борна для амплітуди розсіяння

У важливому випадку кулонівського поля потенціал спадає так повільно,

$$V(\vec{r}) \equiv V_c(r) = \pm \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad (6.76)$$

що неможливо ввести поняття ефективного розміру взаємодії R . Для такої взаємодії можна показати, що формула Борна буде справедлива для швидкостей

$$\hbar v \gg Ze^2. \quad (6.77)$$

Кулонівський потенціал є дальнодіючим і асимптотика хвильової функції у такому потенціалі не має вигляду плоскої та розсіяної хвилі. Разом з тим виявляється, що і при розгляді розсіяння в кулонівському полі, можна користуватися методом борнівського наближення з плоскими хвилями, якщо замінити кулонівський потенціал на екранований кулонівський потенціал вигляду

$$V_c(r) \Rightarrow V_\alpha(r) = \pm \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} e^{-\alpha r}, \quad (6.78)$$

і в кінці обчислень покласти $\alpha \rightarrow +0$.

Обчислимо диференційний переріз розсіяння двох частинок, що взаємодіють за законом Кулона, використовуючи перше борнівське наближення з екранованою кулонівською взаємодією. У такому наближенні амплітуда розсіяння (6.70) набуває вигляду

$$\begin{aligned} f_B(\theta) &= \mp \frac{2\mu e^2 Z_1 Z_2}{q \hbar^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \sin(qr) dr = \\ &= \mp \frac{\mu e^2 Z_1 Z_2}{\hbar^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr = \mp \frac{2\mu e^2 Z_1 Z_2}{\hbar^2 q^2} = \\ &= \mp \frac{\mu e^2 Z_1 Z_2}{2\hbar^2 k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned} \quad (6.79)$$

де враховано співвідношення (6.69). Таким чином, знаходимо вираз для диференціального перерізу (6.71) розсіяння кулонівським полем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_B(\theta)|^2 = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (6.80)$$

Ця формула повністю збігається з формулою Резерфорда для перерізу розсіяння заряджених частинок, яка була вперше отримана в класичній механіці. Хоча вираз (6.80) для перерізу отримано в першому борнівському наближенні, але виявляється, що він є точним, і всі наступні борнівські наближення змінюють лише фазу амплітуди розсіяння $f(\theta)$, а її модуль, який визначає переріз розсіяння, залишається незмінним. Зазначимо, що формула (6.80) не містить сталої Планка $\hbar$, формально саме це і приводить до того, що результати, які були отримані за методами квантової та класичної фізики, збігаються.

6.6. Метод парціальних хвиль у теорії розсіювання. Фазові зсуви розсіювання

Якщо потенціал поля, в якому відбувається розсіювання, має сферичну симетрію, то момент кількості руху є інтегралом руху (гл. 2) і тому частинка в станах, що відповідають різним значенням кутового моменту, розсіюється незалежно. У цьому випадку падаючу хвилю зручно представити у вигляді суперпозиції так званих парціальних хвиль, що відносяться до кожного значення орбітального кутового моменту. Зокрема, парціальний розклад хвильової функції вільного руху частинки, яка має вигляд плоскої хвилі, є

$$\Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (6.81)$$

де l – момент кількості руху, θ – кут між векторами $\vec{k}$ та $\vec{r}$, $P_l(x)$ – поліноми Лежандра, а $j_l(kr)$ – регулярні сферичні функції Бесселя, які були визначені в гл. 3. Враховуючи те, що на великих відстанях сферична функція Бесселя зводиться до простого виразу, а саме:

$$j_l(kr) \cong \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}, \quad kr \gg l,$$

асимптотичне значення (6.81) можна подати у вигляді

$$\Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \simeq (kr)^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)i^l \chi_l^{(0)}(r) P_l(\cos \theta), \quad (6.82)$$

де

$$\chi_l^{(0)}(r) = \sin(kr - l\pi/2) = \frac{i}{2} \left\{ e^{-i(kr - l\pi/2)} - e^{i(kr - l\pi/2)} \right\}. \quad (6.83)$$

Згідно з обчисленнями радіального компонента густини потоку, подібного до (6.52), другий доданок у фігурних дужках (6.83) відповідає розбіжним від центра сферичним хвилям, а перший доданок – збіжним хвилям. Отже, кожна парціальна хвиля розкладу (6.81) на великих відстанях від центра є суперпозицією розбіжної від центра та збіжної до центра сферичних хвиль. Розв'язок рівняння Шредінгера (6.56), що описує розсіювання частинки у сферичному потенціалі, також можна шукати у вигляді суперпозиції парціальних хвиль вигляду (6.81), а саме:

$$\psi(r) = (kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l \chi_l(r) P_l(\cos \theta). \quad (6.84)$$

Оскільки поліноми Лежандра P_l пропорційні сферичним функціям $Y_{l0}(\theta)$:

$P_l(\cos \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\theta)$, а функція $Y_{l0}(\theta)$ є власною функцією оператора кутового моменту (див. п. 3.5), то хвильова функція $\chi_l(r)$ описує радіальний рух частинки в

6.6. Метод парціальних хвиль у теорії розсіяння. Фазові зсуви розсіяння

стані з фіксованим кутовим моментом l . Відмітимо, що для запису функції (6.84) у довільній системі координат необхідно використовувати теорему додавання :

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2), \quad (6.85)$$

де θ – кут між напрямками векторів $\vec{k}$ і $\vec{r}$, що характеризуються кутами θ_1, φ_1 та θ_2, φ_2 .

На відміну від випадку зв'язаних станів з дискретним спектром енергій, при розсіянні частинок енергія є додатною і може мати довільні неперервні значення, тому кажуть, що хвильова функція задачі розсіяння належить неперервному спектру. Переходячи в рівнянні Шредінгера (6.56) до сферичної системи координат (п. 3.5) і використовуючи розклад (6.84), отримаємо радіальне рівняння Шредінгера:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] \chi_l(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} \chi_l(r), \quad (6.86)$$

якому задовольняє радіальна функція $\chi_l(r)$.

Для однозначного обчислення функції $\chi_l(r)$, що відповідає задачі розсіяння, вона має задовольняти відповідним граничним умовам. По-перше, повна хвильова функція $\psi(r)$ має бути скінченною при $r = 0$, тому радіальна функція повинна задовольняти граничній умові

$$\chi_l(0) = 0. \quad (6.87)$$

За цієї умови можна отримати наближений вираз для радіальної функції біля центра взаємодії. Дійсно, якщо $r \rightarrow 0$ і потенціал $V(r)$ змінюється не швидше ніж $1/r$, то в цій області за умови (6.87) рівняння (6.86) переходить у таке:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l(r) = 0. \quad (6.88)$$

З нього випливає, що при $r \rightarrow 0$

$$\chi_l(r) \sim r^{l+1}. \quad (6.89)$$

Другу граничну умову можна отримати з наступних міркувань. В задачі розсіяння розв'язки рівняння (6.86) мають бути відмінними від нуля в будь-якій точці простору і такими, що на великих відстанях від центра вони є суперпозицією розбіжної та збіжної хвиль. Взаємодія з силовим полем згідно з (6.51) та (6.60) змінює тільки розбіжну хвилю, але не збіжну. Тому в асимптотичній області радіальна функція $\chi_l(r)$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} \chi_l(r) &= \frac{i}{2} \left\{ e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_l e^{i(kr - l\pi/2)} \right\} = \\ &= \sin(kr - l\pi/2) + \frac{i}{2} (-i)^l (1 - S_l) e^{ikr}, \quad kr \gg l. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Коефіцієнт S_l , що визначає у (6.90), зміну амплітуди хвилі, що розбігається від центра, залежить від енергії відносного руху і називається *діагональним елементом матриці розсіювання* (з фіксованим орбітальним моментом l). Підставляючи (6.90) у (6.84) та використовуючи (6.81), (6.85) і вираз $f(\theta) = [\psi - \phi_{i_0}] r e^{-ikr}$ для амплітуди розсіювання через асимптотику ψ згідно з (6.51), знаходимо співвідношення для амплітуди розсіювання у вигляді розкладу за парціальними хвилями:

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-S_l) P_l(\cos \theta). \quad (6.91)$$

Таким чином, розв'язуючи рівняння (6.86) за умов (6.89), (6.90) і неперервності радіальної хвильової функції та її першої похідної в усіх точках координатного простору, можна знайти матричні елементи матриці розсіювання S_l , яка однозначно визначає амплітуду розсіювання. Відмітимо, що розсіювання у сферично-симетричному потенціалі не залежить від азимутального кута.

Елементи матриці розсіювання можна подати у вигляді $S_l = e^{2i\delta_l}$. У випадку дійсного потенціалу величини δ_l є дійсними (див. п. 7.1) і називаються *фазовими зсувами* або *фазами розсіювання*. За таких умов маємо

$$S = e^{2i\delta_l} = 1 + e^{2i\delta_l} - e^{i\delta_l - i\delta_l} = 1 + 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l. \quad (6.92)$$

Оскільки експоненціальна функція від уявного аргументу є періодичною функцією, то матриця розсіювання (6.92) і фазові зсуви зв'язані між собою неоднозначно. Однозначно визначені фази розсіювання можуть лежати або в інтервалі $[0, \pi]$ або $[-\pi/2, \pi/2]$. Далі ми користуємось інтервалом

$$\delta_l \in [0, \pi]. \quad (6.93)$$

Оскільки для розсіювання вперед ($\theta = 0$) поліноми Лежандра дорівнюють одиниці, то з (6.91) випливає простий зв'язок між уявною частиною амплітуди розсіювання вперед $f(0)$ та дійсними частинами елементів матриці розсіювання:

$$\text{Im} f(0) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \text{Re } S_l). \quad (6.94)$$

За допомогою (6.91) та (6.92) диференціальний переріз пружного розсіювання (6.53) при взаємодії з дійсним потенціалом можна записати через фази розсіювання:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta)|^2 = \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}). \end{aligned} \quad (6.95)$$

6.6. Метод парціальних хвиль у теорії розсіяння. Фазові зсуви розсіяння

Коли $P_{l=0}(x) = 1$, то з (6.95) видно, що в розсіянні беруть участь тільки s -хвилі ($l = 0$), тоді диференціальний переріз не залежатиме від кута розсіяння, тобто є ізотропним і дорівнює

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2}. \quad (6.96)$$

Якщо в розсіянні беруть участь хвилі з декількома значеннями l , то згідно з (6.95) диференціальний переріз розсіяння залежить від інтерференції хвиль з різними значеннями l . Наприклад, якщо в розсіянні беруть участь s - і p -хвилі, що відповідають $l = 0$ і 1 , то

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left[\sin^2 \delta_0 + 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1) \cos \theta + 9 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta \right]. \quad (6.97)$$

Видно, що за відсутності інтерференції s - та p -хвиль, тобто коли $\cos(\delta_0 - \delta_1) = 0$, має місце симетрія розсіяння вперед і назад щодо кута в системі центра мас, а інтерференція хвиль призводить до порушення такої симетрії.

Якщо розсіяння характеризується невеликою кількістю відмінних від нуля фаз розсіяння, то досліджуючи диференціальний переріз розсіяння як функцію кута θ , можна за допомогою (6.95) обчислити фази розсіяння. Така обробка експериментальних даних називається *фазовим аналізом перерізу розсіяння*.

Інтегруючи вираз (6.95) для диференціального перерізу за кутами θ і враховуючи умову ортогональності поліномів Лежандра,

$$\int P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'},$$

отримаємо вираз для інтегрального перерізу пружного розсіяння у вигляді суми парціальних перерізів σ_l з фіксованими значеннями l :

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l, \quad (6.98)$$

де

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - S_l|^2. \quad (6.99)$$

Множник $2l+1$ у (6.99) є статистичною вагою l парціальної хвилі, яка визначає кількість станів, що розрізняються магнітним квантовим числом m орбітального руху. З (6.99) випливає, що максимальне можливе значення парціального перерізу пружного розсіяння досягається при $S_l = -1$ і дорівнює

$$(\sigma_l)_{\max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1). \quad (6.100)$$

За малих значень k (тобто й енергій) ця величина може значно перевищувати "геометричне" значення перерізу $\sigma_{geom} = \pi R^2$ (див. (6.33)). Згідно з (6.94) і (6.92) маємо, що уявна частина амплітуди розсіяння вперед, дорівнює

$$\text{Im } f(0) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \text{Re } S_l) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (6.101)$$

Порівнюючи це значення з виразами (6.98), (6.99) бачимо, що інтегральний переріз є пропорційним уявній частині амплітуди розсіяння

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0) = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1 - \text{Re } S_l). \quad (6.102)$$

Це співвідношення називається *оптичною теоремою*.

Застосування методу парціальних хвиль особливо зручно у випадку, коли сили взаємодії, що визначають потенціальну енергію $V(r)$, мають малий радіус дії R (або спадають швидше ніж $1/r$). У такому випадку в розсіянні частинок братиме участь тільки скінченна кількість парціальних хвиль. Дійсно, на частинку з орбітальним моментом l з боку розсіювального центра діє відцентрова сила відштовхування з потенціальною енергією $V_l(r) = \hbar^2 l(l+1)/(2\mu r^2)$, яка є потенціальним бар'єром для частинки, що рухається на відстані r . З квазікласичних міркувань маємо, що частинка може перебувати лише в області, де її кінетична енергія $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ перевищує енергію бар'єра $V_l(r)$. Тому найбільш ймовірно, що частинка буде рухатися на відстанях r , що задовольняють нерівність:

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \geq \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}, \quad (6.103)$$

а саме на відстанях з $r^2 \geq l(l+1)/k^2 \equiv b^2$. Звідки маємо, що величина

$$b = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} \quad (6.104)$$

можна вважати відстанню найбільшого зближення частинок з кінетичною енергією $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ і орбітальним моментом l . На відстанях $r < b$ діє відцентровий бар'єр і ймовірність знайти частинку з енергією ε та орбітальним моментом l дуже мала.

Якщо радіус дії ядерного потенціалу R менший за деяке значення $b_m = \sqrt{l_m(l_m+1)}/k$, то частинки з орбітальними моментами $l \geq l_m$ майже не потрапляють у область дії потенціалу й не беруть участь у розсіянні. Таким чином, у розсіянні беруть участь переважно парціальні хвилі з l , що задовольняють нерівність

$$b \leq R \text{ або } \sqrt{l(l+1)} \leq kR. \quad (6.105)$$

Час затримки частинки в області взаємодії

З погляду класичної механіки величина b у (6.104), (6.105) є прицільним параметром частинки з кутовим моментом L , тобто параметр b є відстанню найменшого зближення траєкторії падаючої частинки до центра потенціалу взаємодії. Дійсно, значення кутового моменту L частинки, що прямолінійно рухається з прицільним параметром b , дорівнює $L = bp = \hbar kb$; тобто $b \equiv L / \hbar k$ за визначенням. Згідно з квантовою механікою $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, і тому величина b у (6.104) є прицільним параметром, а співвідношення (6.105) означає, що в зіткненні беруть участь лише частинки з прицільними параметрами меншими за радіус ядра:

$$b = \frac{L}{\hbar k} \equiv \frac{l}{k} \leq R. \quad (6.106)$$

При значеннях $l = 0$ ($b = 0$) зіткнення називається *центральною* або *лобовою*, а при $l \geq 1$ – *нецентральними*. З (6.105) випливає, що при зіткненнях повільних частинок з $kR \ll 1$, тобто з довжиною хвилі $\lambda \equiv 1/k \gg R$, у розсіянні беруть участь тільки S -хвилі ($l = 0$) і тому відмінною від нуля є лише фаза розсіяння δ_0 . У цьому випадку, згідно з (6.96) та (6.99), диференціальний переріз є ізотропним і має вигляд

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_0}{4\pi} \leq \frac{1}{k^2}, \quad (6.107)$$

де $\sigma_0 = 4\pi \sin^2 \delta_0 / k^2$ – інтегральний переріз розсіяння для S -хвилі.

6.7. Резонанси потенціального розсіяння.**Час затримки частинки в області взаємодії**

Перерізи, як і фази розсіяння, залежать від енергії відносного руху ϵ . Як видно з (6.99), парціальний переріз розсіяння буде максимальним з $S_l \equiv \exp(2i\delta_l) = -1$, тобто при $\delta_l = \pi/2$. Такі максимуми в перерізах називаються *резонансами*. Припускаючи, що біля резонансу з енергією E_r фаза розсіяння δ_l лінійно залежить від енергії, маємо

$$\delta_l(\epsilon) \equiv \frac{\pi}{2} + (\epsilon - E_r) \left. \frac{d\delta_l}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=E_r} = \frac{\pi}{2} - \frac{(E_r - \epsilon)}{\Gamma_r / 2}, \quad \Gamma_r \equiv 2 \left(\frac{d\delta_l}{d\epsilon} \right)^{-1}_{\epsilon=E_r}. \quad (6.108)$$

Величина Γ_r визначає форму перерізу біля резонансу і називається *шириною резонансу*. Зазвичай вона залежить і від значення орбітального момен-

ту. Якщо значення Γ_r велике, то резонанс називають широким, якщо мале, то вузьким. В околі резонансу маємо:

$$\operatorname{tg} \delta_l = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(E_r - \varepsilon)}{\Gamma_r / 2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{E_r - \varepsilon}{\Gamma_r / 2} \right) \approx \frac{\Gamma_r / 2}{(E_r - \varepsilon)}. \quad (6.109)$$

Отже,

$$\delta_l(\varepsilon \approx E_r) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\Gamma_r / 2}{E_r - \varepsilon} \right)$$

і

$$\begin{aligned} S_l(\varepsilon \approx E_r) &= e^{2i\delta_l} = \cos 2\delta_l + i \sin 2\delta_l = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \delta_l}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_l} + i \frac{2 \operatorname{tg} \delta_l}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_l} = \\ &= \frac{1 + i \operatorname{tg} \delta_l}{1 - i \operatorname{tg} \delta_l} = \frac{E_r - \varepsilon + i \Gamma_r / 2}{E_r - \varepsilon - i \Gamma_r / 2} = 1 + \frac{i \Gamma_r}{E_r - \varepsilon - i \Gamma_r / 2}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

З (6.108) і вигляду функції $\operatorname{tg} \delta_l$ випливає, що при зміні енергії в резонансній області від $\varepsilon < E_r$ до $\varepsilon > E_r$ фаза розсіяння змінюється на π . Тобто, якщо при енергіях, менших резонансного значення фаза δ_l близька до нуля, то при енергіях, більших резонансного значення вона сягає значення π . У резонансі фаза дорівнює $\pi/2$.

Підставляючи вираз (6.110) у формулу (6.99) отримуємо для перерізу пружного розсіяння формулу

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma_r^2}{(\varepsilon - E_r)^2 + (\Gamma_r^2 / 4)}. \quad (6.111)$$

Цей вираз називається *формулою Брейта – Вігнера* і визначає переріз розсіяння частинок у присутності ізольованого резонансу.

Розглянемо детальніше процес пружного розсіяння частинок з ядром для того, щоб визначити характер явищ, що виникають при проходженні частинки через область взаємодії з енергією, близькою до резонансної. Для цього побудуємо залежну від часу радіальну хвильову функцію $\chi_l(r, t)$. Відповідно до залежного від часу рівняння Шредінгера (1.80), у стаціонарному стані з енергією $\varepsilon = \hbar \omega$ маємо $\chi_l(r, t) = \chi_l(r) \exp(-i\omega t)$. Тому згідно з (6.90) залежна від часу радіальна хвильова функція в асимптотичній області зовні взаємодії має вигляд:

$$\chi_l(r, t) = e^{-i\omega t} [e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_l e^{i(kr - l\pi/2)}], \quad (6.112)$$

де $S_l = \exp(i2\delta_l)$ – матриця розсіяння.

Час затримки частинки в області взаємодії

Енергія налітаючої частинки завжди має розкид в деякому інтервалі енергій $\Delta\varepsilon$, тому розглянемо хвильовий пакет, що є суперпозицією станів (6.112) у випадку деякого вузького діапазону енергій $\Delta\varepsilon$ поблизу середнього значення $\varepsilon_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2\mu$. Нехай амплітуда $A(k)$ внесків станів (6.112) у хвильовий пакет ψ_I є функцією вигляду сходинок з відмінним від нуля й сталим значенням A у вузьких межах від $k_0 - \Delta k / 2$ до $k_0 + \Delta k / 2$, тобто:

$$\psi_I(r, t; k_0) = A \int_{k_0 - \Delta k / 2}^{k_0 + \Delta k / 2} \chi_I(r, t) dk. \quad (6.113)$$

Порівняємо амплітуди збіжної й розбіжної хвиль у хвильовому пакеті (6.113). Позначимо $\xi = k - k_0$ та розкладемо частоту $\omega = \varepsilon / \hbar$ і фазу розсіяння δ_I у ряд Тейлора поблизу k_0 , маємо

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\hbar k^2}{2\mu} \approx \omega_0 + \frac{d\omega(k_0)}{dk} \xi = \omega_0 + v_0 \xi, \\ \delta_I(k) &\approx \delta_I^{(0)} + \frac{d\delta_I(k_0)}{dk} \xi = \delta_I^{(0)} + v_0 \hbar \left. \frac{d\delta_I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\hbar\omega_0} \cdot \xi, \end{aligned} \quad (6.114)$$

де

$$\omega_0 = \hbar k_0^2 / 2\mu, \quad \delta_I^{(0)} = \delta_I(k_0), \quad v_0 = \hbar k_0 / \mu.$$

Підставляючи (6.112) з (6.114) у (6.113) знаходимо явний вираз для хвильового пакету ψ_I :

$$\psi_I = e^{-i\omega_0 t} \left[B_{in}(r, t) e^{-i(k_0 r - l\pi/2)} - B_{out}(r, t) e^{2i\delta_I^{(0)}} e^{i(k_0 r - l\pi/2)} \right]. \quad (6.115)$$

Амплітуди збіжної хвилі B_{in} , що відповідає вільному руху, і розбіжної хвилі B_{out} , що спотворюється взаємодією, мають вигляд

$$\begin{aligned} B_{in}(r, t) &= 2A \frac{\sin[(r + v_0 t)\Delta k / 2]}{r + v_0 t}, \\ B_{out}(r, t) &= 2A \frac{\sin[(r - v_0 t')\Delta k / 2]}{r - v_0 t'}, \quad t' = t - \tau_d, \end{aligned} \quad (6.116)$$

де $\tau_d \equiv \tau_d(\varepsilon = \varepsilon_0)$ з

$$\tau_d(\varepsilon) = + \frac{2}{v_0} \frac{d\delta_I}{dk} = + 2\hbar \frac{d\delta_I}{d\varepsilon} \equiv -i\hbar S_I^{-1} \frac{dS_I}{d\varepsilon} \equiv -i\hbar \frac{d \ln S_I}{d\varepsilon}. \quad (6.117)$$

Із цих співвідношень видно, що взаємодія приводить не тільки до появи фазового множника $\exp(2i\delta_l^{(0)})$ у розсіяній хвилі, але й до відставання на час τ_r максимального значення в амплітуді B_{out} розбіжної хвилі у порівнянні з вільним рухом. Свого максимального значення амплітуда розбіжної хвилі B_{out} сягає в точці $r = v_0 t' = v_0(t - \tau_d)$, а за відсутності взаємодії – у точці $r = v_0 t$. Тобто розсіяний хвильовий пакет затримується на час τ_d в області взаємодії і цей час називається *часом затримки*. Співвідношення (6.117) для визначення часу затримки називається *формулою Вігнера*.

Відмітимо, що за відсутності взаємодії максимальний час τ_0 перебування частинки, що рухається з енергією ε_0 у внутрішній області сфери радіуса R , дорівнює

$$\tau_0 = (2R + k_0^{-1}) / v_0, \quad (6.118)$$

де доданок k_0^{-1} , який є довжиною зведеної хвилі де Бройля частинки, враховує її хвильові властивості.

Згідно з (6.108), (6.117) для енергій, близьких до резонансного значення ($\varepsilon \approx E_r$), маємо такий вираз для часу затримки:

$$\tau_d(\varepsilon) = \frac{\hbar \Gamma_r}{(\varepsilon - E_r)^2 + (\Gamma_r / 2)^2}. \quad (6.119)$$

За визначенням (6.39) переріз σ_l є пропорційним ймовірності $P_r(\varepsilon) \sim w$ розпаду системи ядро + налітаюча частинка з енергією ε біля резонансної енергії. Користуючись виразом (6.111) маємо таку формулу для $P_r(\varepsilon)$ (з урахуванням умови нормування $P_r(\varepsilon)$ на одиницю)

$$P_r(\varepsilon) = \frac{(\Gamma_r / 2\pi)}{(\varepsilon - E_r)^2 + (\Gamma_r / 2)^2}. \quad (6.120)$$

Звідки отримуємо для середнього часу τ_r перебування системи в околі резонансу (F.T.Smith, 1960)

$$\tau_r \equiv \int_0^\infty P_r(\varepsilon) \tau_d(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\hbar}{\Gamma_r}. \quad (6.121)$$

Коли час τ_r значно більший, ніж час перебування частинки біля ядра за відсутності взаємодії $\tau_r \gg \tau_0$, то система довгий час не розпадається і тому вважається, що вона перебуває в квазістаціонарному стані з часом життя τ_r .

Глава 7

Елементи теорії ядерних реакцій

7.1. Аналіз парціальних хвиль для розсіюння з поглинанням

У попередньому розділі розглянуто процес пружного розсіюння. Зі зростанням енергії частинок, що налітають, стає можливим непружне зіткнення та ядерні реакції з утворенням частинок різного типу у вихідному каналі. У непружних процесах змінюється природа частинок, що зіштовхуються, і не зберігається кінетична енергія їх відносного руху. Це призводить до зменшення інтенсивності потоку частинок у пружному каналі, тобто до поглинання падаючих частинок. Базуючись на методі парціальних хвиль, можна одночасно описати як пружне зіткнення, так і поглинання частинок як процес вибування частинок із вхідного каналу незалежно від причин. Розглянемо такий підхід. Для простоти спін частинок не враховуємо та вважаємо кулонівський потенціал екранованим. Уявно обмежимо центрально-симетричний центр розсіюння сферою достатньо великого радіуса R . Розглянемо асимптотичну поведінку хвильової функції, яка відповідає l -ї парціальній хвилі з $r \gg R$, у трьох випадках:

- 1) у початку координат немає центра розсіюння;
- 2) центр розсіюння розміщено в початку координат, але частинка зазнає лише пружних зіткнень;
- 3) у початку координат розташовано атомне ядро, на якому частинки одночасно розсіюються й поглинаються.

У першому випадку частинки рухаються вільно й їх хвильова функція є плоскою хвилею $\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}\vec{r})$. Відповідно до (6.81) – (6.83) її асимптотику можна подати таким чином

$$\begin{aligned}\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= e^{i\vec{k}\vec{r}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^{\frac{1}{2}} i^l \chi_l^{(0)} Y_{l0}(\theta) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} \{J_l(kr) - O_l(kr)\} Y_{l0}(\theta) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{l,k}(r) Y_{l0}(\theta);\end{aligned}\tag{7.1}$$

де θ – кут між векторами $\vec{k}$ та $\vec{r}$, а функції $J_l(kr)$ та $O_l(kr)$ мають вигляд

$$J_l(kr) = \frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r}, \quad O_l(kr) = \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r}. \quad (7.2)$$

Функція $J_l(kr)$ відповідає частинкам, що рухаються з імпульсом $\hbar k$ та моментом lh уздовж радіуса в початок координат, тобто є збіжною хвилею. Дійсно, радіальна густина потоку частинок, що відповідає цій хвилі дорівнює

$$j_{r,l} \equiv j_{r,l}^{(in)} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ J_l^* \frac{\partial}{\partial r} J_l \right\} = -\frac{v}{r^2}. \quad (7.3)$$

Знак мінус вказує на те, що частинки рухаються в протилежному напрямку від центра ядра; $v = \hbar k / m$ – швидкість частинки. Функція O_l є розбіжною хвилею та описує частинки, що виходять з початку координат з густиною потоку:

$$j_{r,l} \equiv j_{r,l}^{out} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ O_l^* \frac{\partial}{\partial r} O_l \right\} = \frac{v}{r^2}. \quad (7.4)$$

Той факт, що обидва потоки частинок $j_{r,l}^{in}$ та $j_{r,l}^{out}$ мають однакові за абсолютною величиною значення, означає, що при проходженні через початок координат з частинками нічого не трапляється і (7.1) є дійсно незбуреною хвилею. При цьому повний потік частинок N_r , що рухаються в радіальному напрямку крізь сферу довільного радіуса r буде дорівнювати нулю, тому що згідно з (7.3) та (7.4) потоки частинок, що рухаються з центра координат і до нього однакові, але протилежні за знаком. Справді, використовуючи (7.1) і (7.2) та враховуючи ортогональність сферичних функцій, отримуємо для повного потоку частинок скрізь поверхню ядра:

$$\begin{aligned} N_r &\equiv \int j_r dS = \int \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ \Phi_k^* \frac{\partial}{\partial r} \Phi_k \right\} r^2 d\Omega = \\ &= \sum_l \left(N_{r,l}^{(+)} - N_{r,l}^{(-)} \right) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \pi \left(\frac{2l+1}{k^2} \right) \left[n_{l,r}^{(out)} - n_{l,r}^{(in)} \right], \end{aligned} \quad (7.5)$$

де $n_{r,l}^{(out)}$ та $n_{r,l}^{(in)}$ – потоки вільних частинок, що входять до сфери радіуса r через її поверхню та виходять з неї:

$$\begin{aligned} n_{r,l}^{(in)} &\equiv -\int j_{r,l}^{(in)} r^2 dS = -\frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ J_l^* \frac{\partial}{\partial r} J_l \right\} 4\pi r^2, \\ n_{r,l}^{(out)} &\equiv \int j_{r,l}^{(out)} r^2 dS = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ O_l^* \frac{\partial}{\partial r} O_l \right\} 4\pi r^2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Підставляючи (7.3), (7.4) у (7.6) маємо:

$$n_{r,l}^{in} = 4\pi v, \quad n_{r,l}^{out} = 4\pi v. \quad (7.7)$$

Тому згідно з (7.5)

7.1. Аналіз парціальних хвиль для розсіювання з поглинанням

$$N_r = 0. \quad (7.8)$$

Зазначимо, що в повний потік (7.5) компоненти вигляду $J_l^* \cdot \partial O_l / \partial r$ та $O_l^* \cdot \partial J_l / \partial r$, які визначають інтерференцію вхідних та вихідних хвиль, не дають внесок.

Розглянемо можливі зміни амплітуд розбіжних та збіжних хвиль (7.2) за наявності центра розсіювання. У випадку тільки пружного зіткнення амплітуда парціальної збіжної хвилі $J_l(kr)$ не змінюється, тому що збіжна хвиля описує потік частинок, які рухаються в початок координат, і ще не відчуває, чи існує там щось, з чим вона має взаємодіяти, чи ні. Ефект має виявитися в доданку, пов'язаному з розбіжною хвилею O_l , що описує частинки, які виходять з початку координат. При пружному зіткненні зберігаються як відносний імпульс $\hbar k$, так і кількість частинок. Тому потоки частинок, що рухаються в початок координат та з нього однакові за абсолютною величиною і повний потік частинок, що пересікає сферу нескінченно великого радіуса, буде дорівнювати нулю. Оскільки, вхідний потік збігається з потоком вільних частинок, то вирази для потоків (7.6), (7.7) у випадку лише пружного розсіювання можна записати у вигляді:

$$n_{r,l}^{in} = 4\pi v, \quad n_{r,l}^{out} = |S_l|^2 4\pi v, \quad (7.9)$$

де

$$|S_l|^2 = 1 \text{ або } |S_l| = 1. \quad (7.10)$$

Ці співвідношення означають, що в асимптотичній області для пружного розсіювання амплітуди збіжної та розбіжної хвиль відрізняються одна від одної лише фазовим множником S_l . Тому, згідно з (7.1) і (7.9) в асимптотичній області $r \gg R$ хвильова функція задачі пружного розсіювання повинна мати вигляд:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} \{J_l(kr) - S_l O_l(kr)\} Y_{l0}(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \Psi_{k,l} Y_{l0}(\theta). \quad (7.11)$$

Така картина пружного розсіювання повністю узгоджується з описом п. 6.6, а функція (7.11) збігається з асимптотикою хвильової функції (6.84), (6.90), що описує пружне розсіювання з діагональними елементами матриці розсіювання S_l .

Умова (7.10) нормування модуля матриці розсіювання на одиницю виконується за наявності тільки пружного розсіювання і є частковим випадком співвідношення унітарності матриці розсіювання, яке приводить до обмежень значень матриці розсіювання в загальному випадку переходів між різними каналами в присутності реакцій (див. далі (7.75)). Умова унітарності є наслідком збереження потоків ймовірності при взаємодії частинок й у випадку пружного зіткнення дає можливість запису елементів матриці через дійсні фази розсіювання (6.92).

Кількість пружно розсіяних частинок, а також інтегральний переріз пружного розсіяння для даного кутового моменту l визначається відношенням потоку частинок $n_{r,l}^{(+)}$, що відповідає розсіяній парціальній хвилі $\delta\psi_l$,

$$\begin{aligned}\delta\psi_l &\equiv \psi_{l,k} - \phi_{l,k} = a_l(1 - S_l)O_l(kr), \\ a_l &\equiv \frac{\sqrt{\pi}}{k} \sqrt{2l+1} i^{l+1},\end{aligned}\quad (7.12)$$

до потоку частинок у падаючій хвилі $n_{r,l}^{(in)} = 4\pi\nu$. Оскільки

$$n_{r,l}^{(+)} \equiv \int \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ \delta\psi_l^* \frac{\partial}{\partial r} \delta\psi_l \right\} dS = |a_l|^2 \cdot |1 - S_l|^2 \cdot 4\pi\nu,$$

то маємо вираз для парціального інтегрального перерізу пружного розсіяння σ_l :

$$\sigma_{el}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - S_l|^2. \quad (7.13)$$

Повний інтегральний переріз пружного розсіяння дорівнює:

$$\sigma_{el} = \sum_l \sigma_{el}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |1 - S_l|^2. \quad (7.14)$$

Ці формули повністю збігаються з виразами, що були отримані в п. 6.6 іншим методом.

Тепер розглянемо асимптотичний вигляд хвильової функції та вигляд перерізу, коли центр розсіяння також поглинає частинки. Поглинання означає, що вихідних частинок менше, ніж вхідних, і тому коефіцієнт $|S_l|^2$, що визначає потік вилітаючих частинок, має бути менший за одиницю. Схематично потоки частинок у цьому випадку показано на рис. 7.1.

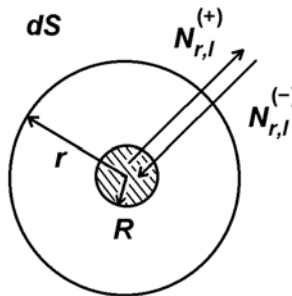


Рис. 7.1. Схематичне зображення потоків частинок, що виникають

при взаємодії з центром розсіяння: $N_{r,l}^{(+)} \sim (2l+1) |S_l|^2 n_{r,l}^{(in)}$; $N_{r,l}^{(-)} \sim (2l+1) n_{r,l}^{(in)}$

7.1. Аналіз парціальних хвиль для розсіяння з поглинанням

Очевидно, що парціальний переріз поглинання $\sigma_l^{(r)}$ дорівнює відношенню потоку частинок $\delta N_l \equiv N_{r,l}^{(+)} - N_{r,l}^{(-)}$, що вибувають з пучка, до потоку падаючих частинок з $n_{r,l}^{(in)} = 4\pi v$. Згідно з (7.5) і (7.6)

$$\delta N_l \equiv \frac{\pi(2l+1)}{k^2} [n_{r,l}^{(in)} - n_{r,l}^{(out)}] = \frac{\pi(2l+1)}{k^2} (1 - |S_l|^2) n_{r,l}^{(in)}, \quad (7.15)$$

тому

$$\sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1)(1 - |S_l|^2). \quad (7.16)$$

Цей переріз називається *перерізом реакцій*, бо саме з реакціями, під якими розуміють довільне непружне зіткнення, пов'язано зменшення інтенсивності падаючого пучка. Інтегральний переріз реакції отримуємо сумуванням парціальних перерізів:

$$\sigma_r = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1 - |S_l|^2). \quad (7.17)$$

Величина

$$T_l = 1 - |S_l|^2, \quad (7.18)$$

що визначає переріз реакції, називається *коефіцієнтом проходження*. Цей коефіцієнт є відношенням кількості поглинених часток до повної кількості падаючих часток з даними l та k , і його можна інтерпретувати як ймовірність поглинання частинок за фіксованого значення l .

З (7.13) та (7.16) бачимо, що переріз реакції дорівнює нулю, якщо $|S_l| = 1$, при цьому переріз пружного розсіяння може бути відмінним від нуля. Хоча пружне розсіяння й можливе без поглинання, але реакції без розсіяння неможливі. Парціальний переріз пружного розсіяння $\sigma_{el}^{(l)}$ залежить від фази комплексної величини S_l , у той час, як у вираз для σ_r^l входить лише її модуль.

Максимум парціального перерізу $\sigma_{el}^{(l)}$ пружного розсіяння (див. п. 6.6) досягається при $S_l = -1$ і, відповідно до (6.100), (7.13) дорівнює: $\sigma_{el, \max}^{(l)} = 4\pi(2l+1)/k^2$. Згідно з (7.16), за таких значень матриці розсіяння переріз реакцій дорівнює нулю:

$$S_l = -1 \Rightarrow \sigma_r^{(l)} = 0. \quad (7.19)$$

Максимум парціального перерізу реакції (7.16) досягається за умови повного поглинання парціальної хвилі, тобто за $S_l = 0$ (або $T_l = 1$) і дорівнює:

$$\sigma_{r, \max}^{(l)} = \pi \lambda^2 (2l+1), \quad \lambda = 1/k. \quad (7.20)$$

Тобто, максимальне значення перерізу розсіяння в 4 рази перевищує максимальне значення перерізу реакції. Цей ефект є результатом інтерференції збіжної та розбіжної хвиль у пружному розсіянні.

Повний переріз взаємодії σ_r частинки з ядром є сумою перерізів пружного розсіювання та реакцій і має вигляд:

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left[|1 - S_l|^2 + 1 - |S_l|^2 \right] = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \text{Re } S_l) \quad (7.21)$$

Ця формула збігається з виразом (6.102) для повного перерізу, який раніше було отримано за відсутності реакцій.

У присутності реакцій модифікується оптична теорема (6.102), яка зв'язувала амплітуду розсіювання з перерізом розсіювання. Із порівняння (7.22) з виразом (6.101) для амплітуди розсіювання вперед, знаходимо, що в присутності реакцій, оптична теорема набуває вигляду:

$$4\pi\lambda \text{Im } f(0) = \sigma_{el} + \sigma_r \equiv \sigma_t. \quad (7.22)$$

Тобто уявна частина амплітуди розсіювання вперед визначає повний переріз взаємодії частинок з ядром.

Проілюструємо співвідношення між перерізами пружного розсіювання та реакції на прикладі абсолютно "чорного" ядра. У цьому випадку ядро розглядається, як сфера радіуса R і вважається, що всі частинки, які рухаються з приціальними параметрами меншими за радіус ядра ($b \leq R$) поглинаються ядром і призводять до реакцій. З урахуванням квазікласичного співвідношення (6.106) між приціальним параметром та кутовим моментом, а саме $b = l/k$, ця модель математично записується таким чином:

$$S_l = \begin{cases} 0, & l \leq l_{\max}, \\ 1, & l > l_{\max}, \end{cases} \quad \text{або} \quad T_l = \begin{cases} 1, & l \leq l_{\max}, \\ 0, & l > l_{\max}, \end{cases} \quad (7.23)$$

де $l_{\max} = kR$. Тоді з (7.14) та (7.17) маємо

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_{el} &= \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) = \frac{\pi}{k^2} \left[2 \frac{l_{\max}(l_{\max}+1)}{2} + (l_{\max}+1) \right] = \\ &= \frac{\pi}{k^2} (l_{\max}+1)^2 = \frac{\pi}{k^2} (kR+1)^2 = \pi(R+\lambda)^2. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Таким чином, перерізи пружного розсіювання та поглинання частинок абсолютно чорним ядром збігаються між собою і при $R \gg \lambda$ повний переріз дорівнює подвоєному геометричному перерізу ядра:

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_r = 2\pi R^2. \quad (7.25)$$

З виразу (7.24) видно, що при малих енергіях $\epsilon \ll 1$, тобто за $\lambda \gg 1$ перерізи σ_r та σ_{el} значно перевищують площу геометричного перерізу через центр ядра πR^2 .

Детальні дослідження показують, що повний переріз σ_t взаємодії нейтронів з ядрами сягає свого асимптотичного значення (7.25) за енергій налітаючих нейтронів більших або порядку 50 MeV.

7.2. Оптична модель пружного розсіювання

Поглинання частинок можна описати, якщо ввести комплексний потенціал

$$V(r) = V_R(r) + iV_I(r), \quad (7.26)$$

де V_R та V_I є дійсною та уявною частинами потенціалу. Уявна частина потенціалу V_I призводить до зміни кількості частинок біля центра розсіювання. Продемонструємо це. У цьому випадку залежне від часу рівняння Шредингера набуває вигляду:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_R + iV_I \right] \psi. \quad (7.27)$$

Обчислимо зміну з часом густини ймовірності $\rho(\vec{r}, t) = |\psi|^2$, користуючись (7.27) маємо:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div } \vec{j} - 2\frac{V_I}{\hbar} \rho, \quad (7.28)$$

де $\vec{j} = i\hbar(\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)/(2m)$ – вектор потоку ймовірності.

Співвідношення (7.28) з $V_I = 0$ є стандартним рівнянням неперервності (6.41). Присутність уявної частини потенціалу приводить до зміни, що залежить від знака V_I , кількості частинок, які проходять через поверхню, що оточує центр розсіювання. З виразу (7.28) видно, що при $V_I < 0$ кількість частинок зменшується (тобто, можна вважати, що вони поглинаються ядром), а при $V_I > 0$ частинки народжуються й їх кількість збільшуватиметься.

Підхід, в якому взаємодія частинок з ядром описується комплексним потенціалом, вигляду (7.26) з $V_I < 0$, що призводить до поглинання частинок, називається *оптичною моделлю пружного розсіювання*, а сам потенціал називається *оптичним потенціалом*.

У 1954 р. Фешбах, Портер і Вайскопф уперше показали, що за допомогою моделі з комплексним потенціалом можна дуже добре описати дані з розсіювання частинок низьких енергій. Зокрема, вони аналізували дані з розсіювання нейтронів з енергіями від $\approx 0,05$ до 3 MeV . Вдалося описати одночасно диференціальні перерізи розсіювання як функції кутів, енергій та масових чисел для ядер з $A \leq 238$, використовуючи простий потенціал прямокутної ями

$$V(r) = \begin{cases} -(V_0 + iW) = -V_0(1 + i\xi), & r \leq R, \\ 0, & r > R = r_0 A^{1/3}, \end{cases} \quad (7.29)$$

з параметрами: $V_0 = 42 \text{ MeV}$, $W = 1,26 \text{ MeV}$ ($\xi = 0,03$), $r_0 = 1,45 \text{ фм}$.

Аналогічно випадку поширення світла в середовищі з заломленням і поглинанням, у частинки, що рухається в ядерному середовищі з комплексним по-

тенціалом, показник заломлення набуває комплексного значення. Саме тому такий потенціал і названо оптичним.

Обчислимо показник заломлення частинки, що рухається в комплексному потенціалі у вигляді одновимірної прямокутної ями ширини x_0 :

$$V(x) = -(V_0 + iW)\theta(x_0 - x). \quad (7.30)$$

У цьому випадку рівняння Шредінгера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon + V_0 + iW)\psi = 0 \quad (7.31)$$

у внутрішній області $x < x_0$ має розв'язок у вигляді плоских хвиль

$$\psi = e^{\pm ikx}, \quad (7.32)$$

де знак плюс відповідає розбіжним хвилям, а знак мінус — хвилям, що рухаються в початок координат. Хвильовий вектор k є комплексним,

$$k = \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [(\epsilon + V_0) + iW] \right\}^{1/2}, \quad (7.33)$$

і його можна записати у вигляді дійсної та уявної частин:

$$k = k_r + iK_i. \quad (7.34)$$

Використовуючи наближення $\epsilon + V_0 \gg W$, яке для потенціалу такого типу (7.29) добре виконується в реалістичній ситуації, маємо

$$k_r \equiv \frac{1}{\lambda_{in}} \equiv \left[\frac{2m}{\hbar^2} (\epsilon + V_0) \right]^{1/2}, \quad K_i = \frac{1}{2} \frac{W}{\epsilon + V_0} k_r. \quad (7.35)$$

Звідси видно, що дійсна частина хвильового числа k_r у внутрішній області ядра значно більша, ніж хвильове число $k_0 \equiv (2m\epsilon/\hbar^2)^{1/2}$ зовні потенціалу, тобто, довжина хвилі λ_{in} частинки всередині ядра значно менша за її довжину зовні ядра $\lambda \equiv 1/k_0$.

Згідно з (7.34) в ядерному середовищі показник заломлення $n \equiv k/k_0$ є комплексним

$$n = \frac{k}{k_0} = \left(\frac{\epsilon + V_0 + iW}{\epsilon} \right)^{1/2}. \quad (7.36)$$

Його дійсна частина n_r наближено дорівнює

$$n_r = k_r / k_0 \equiv \lambda / \lambda_{in} \equiv \left(\frac{\epsilon + V_0}{\epsilon} \right)^{1/2}. \quad (7.37)$$

Наприклад, у випадку розсіяння нейтрона комплексним потенціалом при значеннях $\epsilon = 10 \text{ MeV}$, $V_0 = 40 \text{ MeV}$ і $W = 10 \text{ MeV}$ маємо:

$$k_r = 1,6 \text{ фм}^{-1}; \quad K_i = 0,1 k_r \approx 0,16 \text{ фм}^{-1},$$

7.2. Оптична модель пружного розсіювання

$$\tilde{\lambda} = 1,4 \text{ фм}; \tilde{\lambda}_{in} = 0,65 \text{ фм}; n_r = 2,2. \quad (7.38)$$

Після підстановки (7.34) у (7.32) бачимо, що розбіжний розв'язок рівняння Шредінгера (7.31) є хвилею з експоненціальним поглинанням,

$$\psi = \exp(ik_r x) \exp(-K_i x), \quad (7.39)$$

з коефіцієнтом поглинання K_i . За визначенням, довжина загасання ймовірності $|\psi|^2$ у координатному просторі є середньою довжиною пробігу Λ частинки в ядерному середовищі; тому згідно з (7.39) маємо

$$\Lambda = \frac{1}{2K_i} = \frac{\varepsilon + V_0}{Wk_r} = \frac{\varepsilon + V_0}{W} \tilde{\lambda}_{in}. \quad (7.40)$$

Для вищенаведених значень параметрів потенціалу (7.29), а саме: $V_0 = 40 \text{ МеВ}$ і $W = 10 \text{ МеВ}$, довжина пробігу нуклону з енергією $\varepsilon = 10 \text{ МеВ}$ у п'ять разів перевищує довжину його хвилі в ядерному середовищі

$$\Lambda = 5\tilde{\lambda}_{in} = 3,2 \text{ фм}. \quad (7.41)$$

Зазвичай, у випадку нейтронів використовують такий загальний вираз для оптичного потенціалу, що враховує як об'ємне, так і поверхневе поглинання частинок ядром:

$$V(r) = -V_0 f(r; R_0, a_0) - iW_{vol} f(r; R_V, a_V) - iW_{surf} g(r; R_S, a_S) + V_{ls}(r), \quad (7.42)$$

де $f(r; R_j, a_j)$ – зосереджений в об'ємі ядра радіальний формфактор:

$$f(r; R_j, a_j) = \left[1 + \exp\left(\frac{r - R_j}{a_j}\right) \right]^{-1}. \quad (7.43)$$

Формфактор $g(r; R_S, a_S)$ зосереджений на поверхні і вибирається або в вигляді функції Гаусса

$$g(r; R_S, a_S) = \exp\left[-\frac{(r - R_S)^2}{a_S^2}\right],$$

або похідної від функції Фермі (7.43):

$$g(r; R_S, a_S) = -4a_S \frac{d}{dr} f(r; R_S, a_S) = 4 \exp\left(\frac{r - R_S}{a_S}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{r - R_S}{a_S}\right) \right]^{-2}. \quad (7.44)$$

Компонент V_{ls} – спин-орбітальна взаємодія, де також часто враховується можливість поглинання,

$$V_{ls}(r) = \frac{\tilde{\lambda}_\pi^2}{r} \left[V_{SO} \frac{d}{dr} f(r; R_{VSO}, a_{VSO}) + iW_{SO} \frac{d}{dr} f(r; R_{WSO}, a_{WSO}) \right] (\vec{\sigma} \cdot \vec{l}),$$

де $\tilde{\lambda}_\pi = 1/k_\pi = \hbar/m_\pi c$ – зведена (комптонівська) довжина хвилі π -мезона ($\tilde{\lambda}_\pi^2 \cong 2,0 \text{ фм}^2$); $\vec{\sigma}$, $\vec{l}$ – вектори спінових матриць Паулі й оператора кутового моменту.

У цих виразах параметри середніх радіальних розмірів ядра R_j беруться у вигляді $R_j = r_{0j} A^{1/3}$; параметри дифузностей a_j визначають швидкість зміни потенціалів у поверхневій області ядра. Множник V_0 є глибиною дійсної частини потенціалу і його значення наближується до величин, що використовуються для розрахунків зв'язаних станів. Амплітуди W_{vol} , W_{surf} визначають глибину уявної частини потенціалу. Для опису розсіяння заряджених частинок вводять також доданок, що враховує кулонівську взаємодію.

Оптичний потенціал є потенціалом з об'ємним поглинанням, якщо форм-фактор для уявної частини береться у вигляді функції Фермі, і поверхневим – коли використовується або функція Гаусса, або похідна від функції Фермі. Експериментальні дані з інтегральних перерізів розсіяння нейтронів з енергіями $1 \div 25$ MeV можна досить якісно описати за допомогою оптичного потенціалу з поверхневим поглинанням, що має такі значення параметрів (потенціал Вілмора – Ходгсона),

$$\begin{aligned} V_0 &= 47,01 - 0,267\varepsilon - 0,00118\varepsilon^2; \\ W_{surf} &= 9,25 - 0,053\varepsilon; \quad W_{VOL} = V_{SO} = W_{SO} = 0; \\ r_0 &= 1,322; \quad a_0 = 0,66; \quad r_s = 1,266; \quad a_s = 0,48; \end{aligned} \quad (7.45)$$

де ε – енергія нейтрона в системі центра мас; глибини потенціалів і енергія наведені в одиницях MeB; а параметри r_0 , r_s і дифузності – у фм.

Оптична модель широко застосовується для опису взаємодії з ядрами не лише нуклонів, а й складних частинок. За її допомогою можна описати диференціальні та інтегральні перерізи пружного розсіяння нуклонів і легких іонів. Вона дозволяє обчислити сумарну величину перерізів усіх реакцій, тобто дає змогу описати відтік частинок із вхідного каналу, як процес їхнього поглинання ядром.

7.3. Резонансна структура перерізів розсіяння і реакцій. Формула Брейта – Вігнера для перерізів розсіяння і реакцій

У п. 6.6 розглянуто поведінку перерізу пружного розсіяння σ_{el} в околі свого максимального значення й було продемонстровано, що σ_{el} має вигляд кривої Брейта – Вігнера (6.111). Дослідження реакцій, викликаних нейтронами низьких енергій показали, що не лише перерізи пружного розсіяння, але й перерізи реакції залежно від енергії мають вигляд кривих з максимумами. Максимуми відповідають досить вузьким інтервалам енергій і перерізи мають виразний резонансний характер.

Розглянемо одночасно резонансну структуру перерізів пружного розсіяння й реакцій на простому прикладі зіткнення безспінових частинок з нульовим орбітальним моментом (s -розсіяння з $l = 0$) з ядрами нульового спіну.

Формула Брейта – Вігнера для перерізів розсіяння і реакцій

У першому наближенні ядерну взаємодію можна апроксимувати деякими сферично-симетричними потенціалами радіуса R . В області $r > R$ ядерна взаємодія відсутня й відповідно до (7.11), (7.2) хвильова функція відносного руху частинки та ядра має свій асимптотичний вигляд:

$$\begin{aligned}\psi(r) &= a \frac{u(r)}{r}; \quad a = \frac{i}{2k}; \quad k = 1/\lambda = \sqrt{2\mu\epsilon}/\hbar; \\ u(r) &= e^{-ikr} - S_0 e^{ikr}; \quad S_0 \equiv S_{l=0}(\epsilon),\end{aligned}\quad (7.46)$$

де S_0 – матриця розсіяння парціальної хвилі з нульовим орбітальним моментом.

Запишемо вираз для S_0 через значення хвильової функції та її похідної на межі потенціалу (метод граничних умов). Хвильова функція та її похідна визначають такі неперервні фізичні величини, як густина ймовірності й густина потоку, тому вони також мають бути неперервними функціями для довільних значень координат; звідки на межі взаємодії виконуються співвідношення:

$$\psi_{in}(R) = \psi(R); \quad \frac{d}{dr} \psi_{in} \Big|_{r=R} \equiv \psi'_{in}(R) = \psi'(R), \quad (7.47)$$

де $\psi_{in}(R)$ та $\psi'_{in}(R)$ – значення внутрішньої хвильової функції та її похідної на межі дії потенціалу. Ці рівності означають, що мають бути неперервними й безрозмірними логарифмічними похідними f_{in} , f_{out} , які будуються в точці $r = R$ із хвильових функцій всередині й зовні потенціалу:

$$\begin{aligned}f_{in}(\epsilon) &= R \left\{ \frac{d(r\psi_{in})/dr}{r\psi_{in}} \right\}_{r=R}, \quad f_{out}(\epsilon) = R \left\{ \frac{d(r\psi)/dr}{r\psi} \right\}_{r=R} = \frac{R}{u(R)} u'(R), \quad (7.48) \\ f(\epsilon) &= f_{in}(\epsilon) = f_{out}(\epsilon).\end{aligned}\quad (7.49)$$

Використовуючи формули (7.46), матрицю розсіяння S_0 можна подати у вигляді функції логарифмічну похідної $f(\epsilon)$; знаходимо

$$if(\epsilon) = x \frac{e^{-ix} + S_0 e^{ix}}{e^{-ix} - S_0 e^{ix}}, \quad x = kR, \quad (7.50)$$

звідки

$$S_0(\epsilon) = -e^{-2ix} \frac{x - if(\epsilon)}{x + if(\epsilon)}. \quad (7.51)$$

У випадку розсіяння з поглинанням $|S_0| < 1$ і тому функція $f(\epsilon)$ є комплексною. Відокремимо в логарифмічній похідній дійсну (f_0) та уявну ($-h$) частини:

$$f(\epsilon) = f_0(\epsilon) - ih(\epsilon), \quad (7.52)$$

тоді

$$S_0 = -e^{-2ix} \frac{(x-h) - if_0}{(x+h) + if_0}. \quad (7.53)$$

Підставляючи формулу (7.53) у вираз (7.13) для перерізу пружного розсіяння, знаходимо:

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} |1 - S_0|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{e^{ix} [x \cos x - f \sin x]}{x + if} \right|^2. \quad (7.54)$$

Після перетворення

$$e^{ix} x \cos x = x \cos^2 x + i x \cos x \sin x = x + i x e^{ix} \sin x,$$

маємо

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} |1 - S_0|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{x}{i(x+h) - f_0} + e^{ix} \sin x \right|^2. \quad (7.55)$$

Для перерізу реакцій (7.16) отримуємо

$$\sigma_r \equiv \frac{\pi}{k^2} (1 - |S_0|^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{xh}{(x+h)^2 + f_0^2}. \quad (7.56)$$

Якщо функція f є дійсною, тобто $h = 0$, то $|S|^2 = 1$ і $\sigma_r = 0$. У цьому випадку є лише пружне розсіяння, яке не супроводжується реакціями.

За заданої взаємодії після обчислення хвильових функцій усередині ядра можна розрахувати логарифмічну похідну $f = f_{in}$ і за формулами (7.55), (7.56) точно обчислити перерізи розсіяння й реакцій. Отримаємо наближений вираз для перерізів біля їх максимумів, користуючись деякими загальними властивостями функції $f(\epsilon)$. Оскільки присутність реакцій означає, що $\sigma_r > 0$, то з (7.56) маємо: $h(r) > 0$. Згідно з цією умовою, переріз має максимальне значення, коли $f_0(\epsilon = E_r) \equiv \text{Re } f(\epsilon = E_r) = 0$. Корінь цього рівняння E_r називають *резонансною енергією*. В околі цієї енергії функцію $f_0(\epsilon)$ можна розкласти в ряд за степенями $(\epsilon - E_r)$ та обмежитися першим членом розкладу:

$$f_0(\epsilon) = \left(\frac{df_0}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=E_r} (\epsilon - E_r). \quad (7.57)$$

Введемо позначення:

$$\Gamma_{el} = - \frac{2x}{\left(\frac{df_0}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=E_r}}; \quad \Gamma_r = - \frac{2h}{\left(\frac{df_0}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=E_r}}; \quad \Gamma = \Gamma_{el} + \Gamma_r. \quad (7.58)$$

Можна показати, що для комплексних потенціалів з поглинанням похідна $(df_0/d\epsilon)$ з $\epsilon = E_r$ є від'ємною й тому $\Gamma_{el}, \Gamma_r > 0$. Для дійсних потенціалів $h = 0$ і $\Gamma_r = 0$.

Після підстановок (7.57) та (7.58) у формули (7.55), (7.56) знаходимо такі вирази для перерізів реакцій та розсіяння в області, близькій до резонансної енергії:

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{el}\Gamma_r}{(\epsilon - E_r)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (7.59)$$

$$\sigma_{el} = 4\pi |A_r + A_p|^2, \quad (7.60)$$

де величина

$$A_r \equiv \frac{1}{k} \frac{\Gamma_{el}/2}{\varepsilon - E_r + i\Gamma/2} \quad (7.61)$$

називається *амплітудою резонансного* (або внутрішнього) *розсіяння* в пружному каналі. Компонент

$$A_p \equiv \frac{1}{k} e^{ikR} \sin kR \quad (7.62)$$

називається *амплітудою потенціального* (або зовнішнього) *розсіяння*, оскільки ця частина повної амплітуди залежить лише від радіуса взаємодії та від енергії відносного руху ε , що визначає хвильове число $k = \sqrt{2\mu\varepsilon/\hbar^2}$. Величину A_p також називають *амплітудою розсіяння на непроникливій сфері*. Така назва обумовлена тим, що, якби ядро дійсно було абсолютно відбиваючою сферою радіуса R , то для $r \geq R$ хвильова функція оберталася б на нуль, а логарифмічна похідна прямувала б до нескінченності $f \rightarrow \infty$ і тому $A_r = 0$. Як наслідок, переріз розсіяння був би обумовлений лише амплітудою A_p і дорівнював

$$\sigma_{el} = 4\pi |A_{nom}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 kR.$$

Звідки у випадку розсіяння на непроникливій сфері повільних частинок з довжиною хвилі $\lambda = 1/k = \hbar/\sqrt{2\mu\varepsilon} \gg R$, що значно перевищує радіус ядра, маємо

$$\sigma_{el} \approx 4\pi R^2. \quad (7.63)$$

У загальному випадку вираз (7.60) – (7.62) для пружного s -розсіяння можна записати у вигляді

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \left\{ 4 \sin^2 kR + \frac{\Gamma_{el}^2}{(\varepsilon - E_r)^2 + \Gamma^2/4} + \frac{4\Gamma_{el} \cdot \sin kR}{(\varepsilon - E_r)^2 + \Gamma^2/4} [(\varepsilon - E_r) \cos kR - \Gamma \sin kR] \right\} \quad (7.64)$$

Перший доданок описує потенціальне розсіяння, другий – резонансне розсіяння, третій – інтерференцію між потенціальним і резонансним розсіянням.

У областях енергій, що майже не відрізняються від E_r , амплітуда резонансного розсіяння значно більша амплітуди потенціального розсіяння. Тому за таких енергій переріз пружного розсіяння буде визначатися квадратом резонансної амплітуди:

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{el}^2}{(\varepsilon - E_r)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (7.65)$$

Для енергій $\varepsilon < E_r$ інтерференційний компонент у формулі (7.64) може мати від'ємний знак, що може привести до появи мінімуму на правому схилі від резонансного значення перерізу пружного розсіяння.

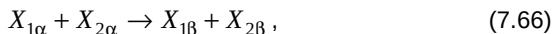
Вирази (7.59) та (7.65) є узагальненням формули Брейта – Вігнера (6.111) на випадок розсіяння з поглинанням. Іноді їх називають *дисперсійними формулами для ізольованого резонансного рівня*. З (7.59) та (7.65) видно, що для значень енергій $|\varepsilon - E_r| = \Gamma/2$ перерізи зменшуються вдвічі порівняно з їхніми максимальним значенням; тобто величина Γ визначає ширину резонансної кривої. Зазвичай її називають *шириною резонансу*. Вона визначає середній час життя системи $\tau_r = \hbar / \Gamma$ (п. 6.6). Величини Γ_{el} та Γ_r є парціальними ширинами, що визначають ймовірності пружного та непружного зіткнень.

7.4. Матриця розсіяння

У попередніх параграфах розглянуто реакції як процес поглинання, а також наведено прості методи обчислення повного перерізу реакцій σ_r . Перейдемо тепер до більш детального опису всіх можливих бінарних реакцій, що виникають у зіткненнях двох частинок A_1 та A_2 :

$$A_1 + A_2 \rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2, \\ B_1 + B_2, \\ C_1 + C_2, \\ \dots \end{cases}$$

Бінарні реакції можна позначити компактніше, якщо ввести індекс каналу α , що характеризує розбиття системи двох частинок на окремі невзаємодіючі фрагменти (п. 6.1); а саме, як перехід з деякого початкового каналу α у кінцевий β :



або спрощено як перехід $\alpha \rightarrow \beta$.

У таких позначеннях пружному зіткненню відповідає випадок $\beta = \alpha$. Частинки, що перебувають у різних станах збудження, розглядаються як різні, і пружне та непружне розсіяння належать до різних каналів реакції. При непружному розсіянні $\beta \neq \alpha$ і змінюються лише відносні швидкості частинок v_α , v_β :

$$v_\alpha = \frac{\hbar k_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad v_\beta = \frac{\hbar k_\beta}{\mu_\beta}, \quad k_\alpha = \frac{\sqrt{2\mu_\alpha \varepsilon_\alpha}}{\hbar}, \quad k_\beta = \frac{\sqrt{2\mu_\beta \varepsilon_\beta}}{\hbar}, \quad (7.67)$$

де k_ρ – хвильове число, ε_ρ – відносна енергія, а μ_ρ – зведена маса частинок у каналі $\rho = \alpha, \beta$.

7.4. Матриця розсіювання

Індекс каналу $\rho = \alpha, \beta$ визначає всю сукупність характеристик ядер-фрагментів – їх ізотопічний склад, внутрішні енергетичні стани, спин (I_i) і парність (π_i) i -го фрагмента в даному енергетичному стані, один із компонентів проекції спіну M_i . Такий набір характеристик позначаємо індексом n . Індекс каналу також містить квантові числа, що визначають відносний рух фрагментів зовні ядерної взаємодії. У реакціях з утворенням пари фрагментів такий рух можна характеризувати різними способами. Наприклад, можна описувати відносний рух плоским хвилями і тому стани характеризувати хвильовим вектором $\vec{k}$. У такому випадку для ідентифікації каналу вибирається набір квантових чисел $\{n(I_1 I_2 M_1 M_2) \vec{k}\}$ або $\{n(I_1 I_2 M_1 M_2) S v \vec{k}\}$, де S – значення сумарного спіну каналу $\vec{S}$,

$$\vec{S} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \quad (7.68)$$

з проекцією v (для спрощення позначень не вказані парності станів).

Інша можливість полягає у використанні представлення, в якому стани мають визначений момент відносного руху l з проекцією m_l і вміщують у собі весь інтервал кутів. Тоді, відповідно до закону збереження моменту кількості руху зберігається повний кутовий момент $\vec{J}$ і парність π системи частинок, що розсіюються. Можливі дві схеми формування повного моменту кількості руху $\vec{J}$ з утворенням або спіну каналу $\vec{S}$, або повного спіну каналу налітаючої частинки $\vec{j} = \vec{I}_1 + \vec{I}$:

$$\vec{J} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I} = \vec{S} + \vec{I} = \vec{j} + \vec{I}_2, \quad (7.69)$$

У таких випадках канал характеризують або сукупністю квантових чисел $\{n(I_1 I_2 M_1 M_2) l m_l S v J M\}$, або набором $\{n(I_1 I_2 M_1 M_2) l j m_j J M\}$, де M – проекція повного моменту кількості руху, зазвичай, на вісь Z і для спрощення позначень в індексах каналів не вказані парності. Значення проекцій моментів кількості руху задовольняють співвідношення

$$M_1 + M_2 + m_l = v + m_l = m_j + M_2 = M. \quad (7.70)$$

Закон збереження парності (п. 1.6) означає, що виконується рівність

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot (-1)^l = \pi. \quad (7.71)$$

Відмітимо, що рух нуклонів в ядрі за оболонковою моделлю (п. 3.5) визначається одночастинковими кутовими моментами $l, j = l \pm 1/2$ і проекцією m_j . В ядерних реакціях з нуклонами такому опису відповідає визначення каналу реакції за допомогою чисел $\{n(I_1 I_2 M_1 M_2) l j m_j J M\}$.

Існують загальні правила переходу між різними представленнями для опису каналів. Загальні результати теорії зіткнень не залежать від типу представлення.

Розглянемо найпростіші бінарні реакції, а саме, пружне й непружне розсіювання частинок з нульовими спінами. За межами ядерної взаємодії у вхідному

каналі (який відповідає пружному розсіянню) має бути присутня як розбіжна, так і збіжна хвилі, а в непружних каналах мають бути присутні тільки розбіжні хвилі. Як наслідок, парціальний розклад повної хвильової функції можна записати в такому вигляді (див. (7.11) для порівняння):

$$\psi(\vec{r}, \{\vec{x}\}) = \frac{\sqrt{\pi}}{k_\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} Y_{l0}(\theta) \times \\ \times \left\{ J_l(k_\alpha r) \Phi_\alpha(\{\vec{x}\}) - \sum_{\beta} S_{\beta\alpha}^l \sqrt{\frac{v_\alpha}{v_\beta}} Q_l(k_\beta r) \Phi_\beta(\{\vec{x}\}) \right\}, \quad (7.72)$$

де r – відносна відстань між центрами мас частинок; $J_l(k_\beta r)$ і $Q_l(k_\beta r)$ – розбіжна й збіжна хвилі вигляду (7.2):

$$J_l(k_\beta r) = \frac{1}{r} \exp \left\{ -i \left(k_\beta r - \frac{l\pi}{2} \right) \right\}, \quad Q_l(k_\beta r) = \frac{1}{r} \exp \left\{ i \left(k_\beta r - \frac{l\pi}{2} \right) \right\}, \quad (7.73)$$

$\Phi_\beta(\{\vec{x}\})$ – внутрішні хвильові функції частинок у каналі β ; а $\{\vec{x}\}$ – сукупність координат частинок. Підсумовування за β у (7.72) проводиться за всіма можливими каналами.

Величини $S_{\beta\alpha}^l$ у формулі (7.72) визначають амплітуду розбіжної хвилі в каналі β і тим самим ефективний переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ будь-якого процесу $\alpha \rightarrow \beta$. Коефіцієнти $S_{\beta\alpha}^l$ є матричними елементами матриці розсіяння (у даному випадку з фіксованим значенням орбітального моменту l). Цю матрицю також називають *матрицею зіткнень* або просто *S-матрицею*. Для реакції з N відкритими каналами, $S_{\beta\alpha}^l$ буде квадратною матрицею порядку N .

Для ермітової взаємодії між частинками, що зіштовхуються, виконується умова унітарності матриці розсіяння:

$$\sum_{\gamma=1}^N S_{\gamma\alpha}^{J*} S_{\gamma\beta}^J = \delta_{\alpha\beta}; \quad \hat{S}^+ \hat{S} = \hat{S} \hat{S}^+ = 1, \quad (7.74)$$

де $S_{\beta\alpha}^J$ – матриця розсіяння при заданому значенні повного кутового моменту J (7.69); $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера; $\hat{S}$ – оператор розсіяння з матричними елементами, що будуються на асимптотичних хвильових функціях ($|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$) у відповідних каналах, і які збігаються з величинами $S_{\beta\alpha}^J: \langle\beta|\hat{S}|\alpha\rangle \equiv S_{\beta\alpha}^J$. Зірочка в (7.74) визначає операцію комплексного спряження, а знак плюс – ермітове спряження. У випадку бінарної реакції частинок з нульовими спінами, повний кутовий момент збігається з орбітальним, $J = l$ і умова унітарності (7.7) має вигляд

7.4. Матриця розсіяння

$$\sum_{\gamma=1}^N S_{\gamma\alpha}^{I*} S_{\gamma\beta}^I = \delta_{\alpha\beta}. \quad (7.75)$$

Як і при пружному розсіянні (7.10) умова унітарності (7.74), (7.75) має простий фізичний зміст, а саме, вона означає збереження повної ймовірності всіх можливих процесів у системі. Це можна показати, якщо скористатися тим, що величини $S_{\beta\alpha}^J$ є матричними елементами оператора $\hat{S}$, який переводить залежну від часу хвильову функцію системи до взаємодії $\psi_i(t \rightarrow -\infty)$ у хвильову функцію системи після взаємодії $\psi_f(t \rightarrow +\infty)$:

$$\psi_f(t \rightarrow +\infty) = \hat{S}\psi_i(t \rightarrow -\infty). \quad (7.76)$$

З виразу (7.76) і умови збереження ймовірності $\psi_f \psi_f^+ = \psi_i \psi_i^+ = 1$, знаходимо співвідношення

$$\psi_f \psi_f^+ = \hat{S} \psi_i \psi_i^+ \hat{S}^+ = \hat{S} \hat{S}^+ = 1,$$

яке збігається з (7.74).

Умова (7.74) призводить до скорочення кількості незалежних параметрів, що визначають матрицю розсіяння. Матриця розсіяння є комплексною величиною і якщо, наприклад, відкрито N каналів, то в загальному випадку вона може складатися з $2N^2$ дійсних параметрів. Співвідношення унітарності (7.74) накладає $N(N+1)/2$ зв'язків між її елементами і тому лише $N(3N-1)/2$ з параметрів, що визначають матрицю розсіяння, будуть незалежними.

Коли між частинками існує тільки сильна ядерна взаємодія, S -матриця інваріантна щодо обернення часу. Це призводить до умови симетрії між її елементами (теорема взаємності):

$$S_{\beta\alpha}^J = S_{-\alpha-\beta}^J, \quad (7.77)$$

де від'ємні знаки в індексах означають зміну напрямків спінів на протилежні.

Коли ж гамільтоніан системи також інваріантний відносно просторових обертань, то матриця розсіяння не залежить від проекції спінів і буде симетричною:

$$S_{\beta\alpha}^J = S_{\alpha\beta}^J. \quad (7.78)$$

Якщо характеризувати відносний рух плоским хвилями (7.1) з відповідними хвильовими векторами $\vec{k}$, то вираз (7.72) для асимптотики повної хвильової функції можна переписати у вигляді:

$$\psi(\vec{r}, \{\vec{x}\}) = e^{i\vec{k}_\alpha \vec{r}} \Phi_\alpha(\{\vec{x}\}) + \sum_{\beta} f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta) \frac{e^{i\vec{k}_\beta \vec{r}}}{r} \Phi_\beta(\{\vec{x}\}), \quad (7.79)$$

де $f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta)$ – амплітуда розсіяння або реакції:

$$f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta) \equiv f_{\alpha \rightarrow \beta}(\theta) = \frac{i}{2\sqrt{k_\alpha k_\beta}} \sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}} \sum_l (2l+1) (\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l) P_l(\cos \theta), \quad (7.80)$$

де θ – кут розсіювання, тобто кут між напрямками хвильових векторів $\vec{k}_\alpha$ і $\vec{k}_\beta$; P_l – поліноми Лежандра.

Користуючись формулою (7.7), обчислимо аналогічно випадку пружного розсіювання (п. 6.4, 7.1) густини радіальних потоків відносного руху у вхідному (j_α) і вихідному (j_β) каналах за межами взаємодії (вважатимемо, що взаємодія у вхідному каналі відсутня за сферою радіуса R_α , а у вихідному – радіуса R_β):

$$j_\alpha = \frac{\hbar}{2\mu_\alpha i} \left(\Phi_{\vec{k}_\alpha}^* \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{\vec{k}_\alpha} - \Phi_{\vec{k}_\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{\vec{k}_\alpha}^* \right) = \frac{\hbar k_\alpha}{\mu_\alpha},$$

$$j_\beta \equiv \frac{\hbar}{2\mu_\beta i} \left(\Psi_{out,\beta}^* \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{out,\beta} - \Psi_{out,\beta} \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{out,\beta}^* \right) = \frac{\hbar k_\beta}{\mu_\beta} \frac{1}{r^2} \left| f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta) \right|^2,$$

де $\Phi_{\vec{k}_\alpha} = \exp(i\vec{k}_\alpha \vec{r})$ – хвильова функція відносного руху у вхідному каналі, а $\Psi_{out,\beta} = f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta) e^{ik_\beta r} / r$ – розбіжна хвиля, яка описує відносний рух у вихідному каналі.

Згідно з цими виразами та визначенням (6.40), отримуємо вираз для віднесенного до одиничного суцільного кута диференціального перерізу $\sigma_{\alpha\beta}(\theta, \varphi)$ переходу з каналу α в β .

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta, \varphi) \equiv \lim_{r \gg R_\alpha, R_\beta} \frac{j_\beta r^2}{j_\alpha} = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta} \frac{k_\beta}{k_\alpha} \left| f_{\alpha \rightarrow \beta}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta) \right|^2. \quad (7.81)$$

Після підстановки в цю формулу співвідношення (7.80), маємо

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta, \varphi) \equiv \sigma_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{1}{4k_\alpha^2} \left| \sum_l (2l+1) (\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l) P_l(\cos \theta) \right|^2. \quad (7.82)$$

Інтегральний переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ знаходимо з (7.82) інтегруванням за суцільним кутом:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \int \sigma_{\alpha\beta}(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (7.83)$$

Враховуючи ортогональність поліномів Лежандра, отримуємо вираз для інтегрального перерізу процесу $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi \tilde{\lambda}_\alpha^2 \sum_l (2l+1) \left| \delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l \right|^2, \quad \tilde{\lambda}_\alpha = \frac{1}{k_\alpha}. \quad (7.84)$$

Відповідно до (6.38) повний переріз взаємодії частинки з ядром можна записати у вигляді суми двох доданків:

$$\sigma_t \equiv \sum \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{el} + \sigma_r, \quad (7.85)$$

7.4. Матриця розсіяння

де σ_{el} – переріз пружних процесів,

$$\sigma_{el} = \pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_l (2l+1) \left| 1 - S_{\alpha\alpha}^l \right|^2, \quad (7.86)$$

а σ_r – переріз реакцій, що дорівнює сумі всіх непружних процесів:

$$\sigma_r = \pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_l (2l+1) \sum_{\beta \neq \alpha} \left| S_{\beta\alpha}^l \right|^2. \quad (7.87)$$

Згідно зі співвідношенням унітарності (7.75)

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \left| S_{\beta\alpha}^l \right|^2 + \left| S_{\alpha\alpha}^l \right|^2 = 1. \quad (7.88)$$

Тому вираз (7.87) для перерізу реакцій набуває вигляду

$$\sigma_r = \pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_l (2l+1) \left(1 - \left| S_{\alpha\alpha}^l \right|^2 \right). \quad (7.89)$$

Для повного перерізу (7.85) маємо

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_r = \sigma_r = 2\pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_l (2l+1) \left(1 - \text{Re } S_{\alpha\alpha}^l \right). \quad (7.90)$$

Статистичний фактор $(2l+1)$ у цих формулах для перерізів визначає кількість ступенів виродження стану з заданим орбітальним моментом за його проекцією.

Згідно з (7.86), (7.89) перерізи як пружного розсіяння, так і реакцій залежать лише від діагональних елементів матриці розсіяння. Саме завдяки цьому можливе їх одночасне обчислення за допомогою сферичної оптичної моделі розсіяння на комплексному потенціалі, яка дозволяє розраховувати лише діагональні елементи матриці розсіяння (п. 7.2).

У випадку бінарної реакції частинок зі спінами загальний вигляд інтегральних перерізів не змінюється. Наприклад, коли канал характеризується сукупністю квантових чисел $\{n(I_1 I_2 M_1 M_2) l j m_j J M\}$, вираз для інтегрального перерізу процесу $\alpha \rightarrow \beta$ з переходом у кінцевий стан ядер-фрагментів n_{β} при довільних характеристиках відносного руху має вигляд (для систем інваріантних відносно обертань):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_{J, \pi=\pm 1} \sum_{l j l' j'} \omega_l (\pi_1 \pi_2 \pi) \omega_{l'} (\pi_1' \pi_2' \pi) g(J) \left| \delta_{n_{\alpha} n_{\beta}} \delta_{l l'} \delta_{j j'} - S_{n_{\beta} l' j', n_{\alpha} l j}^{J \pi} \right|^2, \quad (7.91)$$

де штрихами позначено відповідні квантові числа, що відносяться до вихідного каналу; $S_{n_{\beta} l' j', n_{\alpha} l j}^{J \pi}$ – матриця розсіяння для фіксованого значення повного кутового моменту J і парності π ; індекси n_{α} , n_{β} також містять парності ядер-фрагментів; статистичний фактор $g(J)$, що визначає відносний ступінь виродженості станів, задається виразом

$$g(J) = \frac{2J+1}{(2I_1+1)(2I_2+1)}. \quad (7.92)$$

Підсумовування у формулі (7.91) мають виконуватися лише для тих значень квантових чисел моментів кількості руху, які не суперечать закону збереження повного моменту кількості руху (7.69):

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_1 + \vec{l} = \vec{j} + \vec{I}_2 = \vec{J} = \vec{j}' + \vec{I}_2' = \vec{I}_1' + \vec{I}_2' + \vec{l}' \quad (7.93)$$

Порядок підсумовувань у формулі (7.91) може бути довільним, але квантові числа змінюються на одиницю й мають бути в інтервалах, які визначаються правилами додавання кутових моментів. Наприклад, коли зовнішнє підсумовування відбувається, як це показано в (7.91), за квантовим числом повного моменту J , то в сумах необхідно враховувати лише члени, для яких виконуються співвідношення

$$J_{\min} \leq J < \infty, \quad |J - I_2| \leq j \leq J + I_2, \quad |j - I_1| \leq l \leq j + I_1, \\ |J - I_2'| \leq j' \leq J + I_2', \quad |j' - I_1'| \leq l' \leq j' + I_1'. \quad (7.94)$$

Мінімальне значення повного моменту $J_{\min}$ дорівнює нулю (коли величини I_1, I_2 є парними або одночасно непарними) або $1/2$ – якщо тільки одне із значень I_1, I_2 є непарним. У випадку з зовнішнім підсумовуванням за орбітальним моментом відносного руху у вхідному каналі в сумах (7.91) необхідно враховувати лише доданки, що характеризуються такими значеннями квантових чисел

$$0 \leq l < \infty, \quad |l - I_1| \leq j \leq l + I_1, \quad |j - I_2| \leq J \leq j - I_2, \\ |J - I_2'| \leq j' \leq J + I_2', \quad |j' - I_2'| \leq l' \leq j' - I_2'. \quad (7.95)$$

Закон збереження парності (7.70) додатково обмежує величини орбітальних моментів відносного руху, значеннями, які задовольняють умову

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot (-1)^l = \pi = \pi_1' \cdot \pi_2' \cdot (-1)^{l'}. \quad (7.96)$$

Це співвідношення можна записати в іншому вигляді. Помножимо його на парність π , врахувавши, що $\pi^2 = 1$, отримаємо умову (7.96), яка обмежує можливі значення парності системи й значення моменту відносного руху, у вигляді

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi \cdot (-1)^l = \pi_1' \cdot \pi_2' \cdot \pi \cdot (-1)^{l'} = 1. \quad (7.97)$$

Проекційні множники $\omega_l(\Pi)$ у виразі для перерізу (7.91) враховують закон збереження парності (7.97) і дорівнюють

$$\omega_l(\Pi) = \frac{1}{2} \{1 - \Pi \cdot (-1)^l\}. \quad (7.98)$$

Як і в перерізі пружного розсіяння й повного перерізу реакцій (п. 7.3), у перерізах парціальних реакцій $\alpha \rightarrow \beta$ при деяких значеннях повного моменту J і парності π можуть спостерігатися резонанси. У випадку ізольованих резона-

7.4. Матриця розсіяння

нсів аналогічно (7.59) можна показати, що в околі резонансу переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ має вигляд кривої Брейта – Вігнера:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi \lambda_{\alpha}^2 g(J) \frac{\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta}}{(\varepsilon - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (7.99)$$

де Γ_{α} і Γ_{β} є ширинами розпаду за вхідним та вихідним каналами відповідно,

$$\Gamma = \sum_{\beta'} \Gamma_{\beta'} \quad (7.100)$$

повна ширина резонансу; підсумовування виконується за всіма відкритими каналами зі значеннями J , π , що збігаються з резонансними.

Співвідношення (7.99) можна переписати таким чином:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_r(\alpha) G_{\beta}, \quad (7.101)$$

де $\sigma_r(\alpha) = \pi \lambda_{\alpha}^2 \Gamma_{\alpha} \Gamma / [(\varepsilon - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2]$ – повний переріз всіх можливих процесів, що відбуваються, коли вхідним каналом є канал α

$$\sigma_r(\alpha) = \sum_{\beta'} \sigma_{\alpha\beta'}, \quad (7.102)$$

а G_{β} – відносна ширина (ймовірність) розпаду за каналом β ,

$$G_{\beta} = \Gamma_{\beta} / \Gamma. \quad (7.103)$$

Вираз (7.101) має просте фізичне тлумачення. Величину $\sigma_r(\alpha)$ можна інтерпретувати, як переріз утворення складеного ядра внаслідок взаємодії налітаючої частинки з ядром мішені, а величину G_{β} можна розглядати як ймовірність вильоту частинки із такого ядра. Таким чином, співвідношення (7.101) означає можливість утворення деякого складеного ядра і незалежність процесів його утворення й розпаду.

Вперше такий погляд на механізм ядерних реакцій запропонував Н.Бор (1936). Згідно з його міркуваннями через сильну ядерну взаємодію частинка, що влітає в ядро, миттєво передає свою енергію внутрішнім нуклонам і втрачає індивідуальність. Енергія частинки-снаряду рівномірно розподіляється між всіма нуклонами, тому енергії, що припадає на одну частинку ядра, стає недостатньо для її вильоту. Це приводить до утворення деякого складеного (компаунд) ядра, що довго живе й може розпастися лише за умови, якщо одна із частинок накопичить у процесі випадкових зіткнень енергію, достатню для її вильоту. Тому, можна вважати, що ядерна реакція відбувається у два етапи:



Спочатку утворюється компаунд-ядро C , яке далі розпадається на продукти ядерних реакцій (часто його позначають як C^* , де зірочка вказує на перебування у збудженому стані). Обидві стадії реакції незалежні в тому розумінні, що розпад компаунд-ядра залежить лише від його енергії, моменту кількості руху й парності, але не залежить від способу його утворення. Це означає, що

згідно з гіпотезою Н.Бора, переріз довільної реакції можна подати у вигляді аналогічному до (7.101), а саме, як добуток перерізу утворення компаунд-ядра на ймовірність його розпаду. Експериментальні й теоретичні дослідження показали, що в загальному випадку не можна подати переріз реакцій у факторизованому вигляді (7.101); існують також і інші механізми взаємодії частинок з ядрами.

7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками

Згідно з розглядом у п. 7.2 процес, що відбувається при взаємодії частинки з ядром, у цілому можна описати за допомогою сферичної оптичної моделі схожою на ту, що використовуються для опису оболонкової структури ядер. А саме, ядро розглядається як система нуклонів у деякій сферичній потенціальній ямі. Оскільки, ймовірність передачі енергії від частинки-снаряду відмінна від нуля, то до середнього ядерного потенціалу, в якому рухаються нуклони, необхідно додати уявну частину. Звідки маємо модель, яку називають *оптичною моделлю ядра* (п. 7.2). Така модель успішно описує пружне розсіювання й "поглинання" нуклонів ядрами, якщо під останнім розуміти будь-який процес, що не є пружним розсіюванням. За її допомогою не можна детально відтворити резонанси складеного ядра, що виникають після "поглинання" повільних нейтронів, але можна описати загальну поведінку (грос-структуру) перерізів, тобто середні за сусідніми резонансами величини. Якщо енергія настільки мала, що в процесі беруть участь тільки s -нейтрони, то в грос-структурі спостерігаються резонанси в тих випадках, коли в потенціальній ямі утворюється стояча хвиля. При переході до іншого граничного випадку – високих енергій і дуже сильного поглинання (як це, наприклад, спостерігається в дослідах з α -частинками з енергіями близько 40 Мев) оптична модель передбачає картину розсіювання з максимумами й мінімумами у відповідних кутових розподілах, яка дуже схожа на картину оптичного розсіювання чорними шарами. Таке передбачення дуже добре підтверджується експериментальними дослідженнями.

Сферична оптична модель є потужним інструментом аналізу ядерних реакцій, але вона дає інформацію тільки про повну ймовірність ядерних реакцій. Щоб отримати більш детальну інформацію, треба глибше розглянути механізм поглинання частинки ядром.

Виявляється, що можна розглянути майже всі механізми ядерних реакцій з легкими частинками, якщо користуватися уявленням про незалежний рух частинок у середньому самоузгодженому полі й врахувати залишкову ядерну взаємодію (В.Вайскопф). Розглянемо в такій модифікованій моделі незалежного руху процеси, що відбуваються, коли частинка потрапляє в ядро й зіштовхується з однією із його складових частин. Деякі можливі процеси її взаємодії проілюстровано на рис. 7.2.

7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками

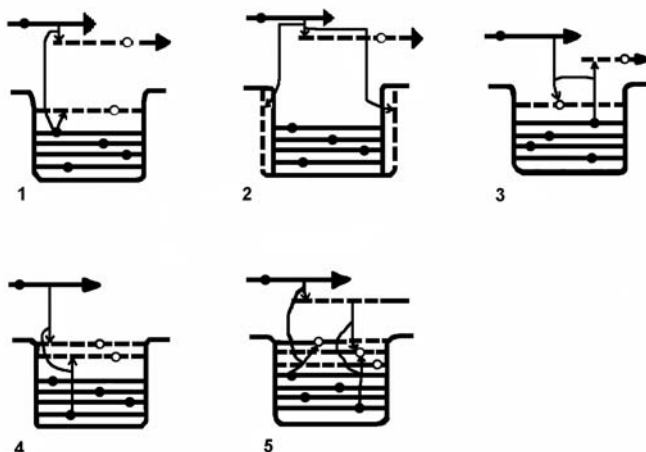


Рис. 7.2. Схематичне зображення процесу взаємодії частинки-снаряду з ядром:
 1 – пряме непружне розсіяння; 2 – пряме непружне розсіяння (колективне);
 3 – пряма реакція обміну; 4 – процес утворення складеного ядра (перший етап);
 5 – процес утворення складеного ядра (другий етап)

Частинка-снаряд, що налітає на ядро, може втратити частину своєї енергії, переводячи ядерну частинку в більш високий стан (рис. 7.2(1)). Це може привести до непружного розсіяння, якщо в частинки залишається достатньо енергії для вильоту. Такий процес називається *прямим непружним розсіянням*, оскільки він обумовлений розсіянням на одній частинці ядра. Частинка, яка налітає, може передати енергію колективному руху, що приводить до зміни характеристики середнього поля (див. рис. 7.2(2)); такий процес є також прямою взаємодією.

На рис. 7.2(3) зображено ситуацію, коли передана енергія достатньо велика для вибивання нуклону з ядра-мішені. Цей процес є прямою ядерною реакцією. Принципово він не відрізняється від процесу, зображеному на рис. 7.2(1), але відбувається з обміном частинками й тому називається *реакцією обміну*.

Частинка, що влітає у ядро, може втратити так багато енергії, що залишиться зв'язаною всередині ядра; її енергія може передатися нуклону, який має дуже малу енергію й тому після зіткнення не вилітає з ядра (рис. 7.2(4)). У результаті утворюється збуджена складена система частинка – снаряд + ядро-мішень. Стан такої складеної системи може бути таким, що шляхом внутрішніх зіткнень відбувається тільки подальше збудження нуклонів, причому енергія збудженої частинки в середньому зменшується, тому у більшості випадків ні один із нуклонів не може вилетіти. Після багатьох зіткнень утворюється стан з дуже великим часом життя з рівномірним розподілом енергії збудження між всіма нуклонами, який може розпастися лише за умови, якщо одна із частинок накопичить у процесі випадкових зіткнень достатню енергію для свого вильоту. Таку складену систему називають *складеним* або *компаунд ядром*.

Складена система може розпастися без утворення компаунд ядра, а саме, протягом двох або більше зіткнень (рис. 7.2(5)), якщо після процесів, подібних

до зображених на рис. 7.2(1), 7.2(2), нуклон-снаряд на своєму шляху зазнає зіткнень з іншим нуклонами й збуджує їх таким чином, що залишається можливим або його виліт, або інших частинок.

Рис. 7.2 пояснює яким чином у випадку слабкої залишкової взаємодії між нуклонами ядра можна зрозуміти як існування прямих реакцій, так і процеси з утворенням складеного ядра. Як зазначено вище, концепцію реакцій через компаунд-ядра вперше сформулював Н.Бор, припускаючи сильну взаємодію між усіма складовими частинами ядра. Коли стали виникати ідеї про слабку залишкову взаємодію між нуклонами в ядрах, то картина утворення складеного ядра була відхилена на другий план і іноді стверджувалося, що всі ядерні реакції мають бути прямими, але з моделі слабкої взаємодії це зовсім не випливає (див. рис. 7.2). У такій моделі вважається, що прямі реакції існують, але й не виключається, що час від часу додаткова енергія розподіляється між великою кількістю складових частин ядра, особливо якщо ця енергія не зовсім велика. Як наслідок виникає деякий складений стан з великим часом життя, який може бути значно більшим, ніж той, що очікується на основі моделі сильної взаємодії.

Таким чином, згідно з розглядом Вайскопфа маємо такі уявлення про процес взаємодії частинки з ядром. Спочатку частинка влітає в ядро й розсіюється комплексним потенціалом. При взаємодії з ядром завжди існує ймовірність поглинання частинки, що означає її участь в першому зіткненні, яке призводить до прямого непружного розсіювання або до прямих реакцій. Друге зіткнення ще може викликати реакцію, але вже з меншою ймовірністю, оскільки енергія розподіляється між трьома частинками. Далі відбуваються зростання кількості зіткнень, які рідко приводять до вильоту частинок, а частіше — до обміну енергією всередині ядра. Утворюється компаунд-ядро. Після множини таких обмінів одній із частинок (рідко тій самій, що влетіла в ядро) вдається вилетіти: складене ядро розпадається. Отже, концепція слабкої залишкової взаємодії приводить до можливості прямих реакцій, утворення компаунд-ядра та можливості вильоту частинок із складеної системи на різних етапах утворення компаунд-ядра. Останній тип реакцій називається *прекомпаунд* або *передрівноважними реакціями*. З цієї картини також ясно, що відносна ймовірність утворення складеного ядра зменшується зі збільшенням енергії частинки, що налітає на ядро. Дійсно, якщо ця енергія дуже велика, наприклад більше 30 або 40 MeV на нуклон, то енергія, яка може передатися частинці ядра, буде також значною і можна очікувати, що вже перші декілька зіткнень призведуть до вильоту частинки (унаслідок прямої або передрівноважної реакції). У таких випадках компаунд-ядро (тобто стан складеної системи, в якому енергія збудження розподілена між багатьма нуклонами так, що кожний з них не може вилетіти із ядра поки який-небудь нуклон не одержить "аномально" велику енергію) може утворитися тільки після вильоту одного (або більше) нуклонів і тому ймовірність його утворення не може бути значною.

У прямих реакціях енергія від частинки-снаряду до частинки, що вилітає, передається протягом характерного ядерного часу прольоту $\tau_{яд} \sim 10^{-22}$ с (п.1.2). За такий час частинка не встигає забути напрямку свого руху й кутовий розподіл продуктів прямих ядерних реакцій має асиметричний вигляд. Ймовірність прямої реакції можна обчислити за допомогою квантово-механічних методів, розглядаючи такий процес як зіткнення частинок в деякому середньому полі з поглинан-

7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками

ням. Наприклад, якщо розглядати всі реакції як процес поглинання, то диференціальний переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ прямого непружного розсіяння (рис. 7.2(1)) можна обчислити за формулою (7.81), користуючись аналогом наближення Борна (п. 6.5) до амплітуди розсіяння $f_{\alpha\rightarrow\beta}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta)$ вигляду

$$f_{\alpha\rightarrow\beta}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta) = -\frac{\mu_\beta}{2\pi\hbar^2} \left\langle \Phi_{\vec{k}_\beta} \left| V \right| \Psi_{\vec{k}_\alpha}^{(+)} \Phi_\alpha \right\rangle, \quad (7.105)$$

де $\Psi_{\vec{k}_\alpha}^{(+)}$ – хвильова функція відносного руху частинки у сферичному оптичному потенціалі з асимптотикою у вигляді розбіжної хвилі. Такий метод обчислення амплітуди враховує вплив ядерної взаємодії на частинку-снаряд і називається *наближенням Борна методу збурених (спотворених) хвиль (DWBA – distorted wave Born approximation)*. Більш точно описати внесок прямого механізму в пружне та непружне розсіяння можна за допомогою т. зв. методу зв'язаних каналів. Згідно з таким методом повна хвильова функція $\psi(\vec{r}, \{\vec{x}\})$ із заданою енергією відносного руху подається у вигляді розкладу за хвильовими функціями всіх станів залишкових ядер $\Phi_p(\{\vec{x}\})$:

$$\psi(\vec{r}, \{\vec{x}\}) = \sum_p \Psi_p^{(+)}(\vec{r}) \Phi_p(\{\vec{x}\}), \quad (7.106)$$

Після підстановки цього розкладу в рівняння Шредінгера знаходять систему зв'язаних рівнянь для функцій відносного руху $\Psi_p^{(+)}(\vec{r})$ і за допомогою граничних умов задачі розсіяння (7.72) обчислюють елементи матриці розсіяння.

У випадку вильоту двох нуклонів для опису прямого процесу зазвичай необхідно враховувати парні кореляції (п. 3.6). Чим більш складні частинки беруть участь у реакціях, тим більш складні кореляції руху нуклонів ядерної системи необхідно враховувати при розгляді прямих процесів. Зокрема, дослідження показали, що найважливіші в легких ядрах нуклони з помітною ймовірністю об'єднуються в групи (кластери) типу α -частинок. На такому підході базується модель нуклонних асоціацій або кластерів, яку також часто називають *єдиною моделлю ядра*.

Характерний час тривалості ядерних реакцій з утворенням компаунд-ядра значно перевищує час прольоту нуклона через ядро. Наприклад, у випадку реакцій з нейтронами низьких енергій час життя компаунд-ядра може становити $10^{-12} \div 10^{-16}$ с, що на багато перевищує час прямих процесів. Значна різниця між часом утворення й розпаду компаунд-ядра призводить до того, що ядро не пам'ятає своєї попередньої історії, тому два ці етапи можна вважати незалежними. Частинка, що попадає в ядро забуває напрям свого руху і кутовий розподіл частинок, що вилітають, виявляється в системі центра мас симетричним і майже ізотропним. Однак вигляд перерізу компаунд-процесів залежить від енергії збудження складеного ядра U ,

$$U = \varepsilon_\alpha + S_{aC}, \quad (7.107)$$

що складається з енергії відносного руху у вхідному каналі ε_α і енергії відділення S_{aC} частинки-снаряду від ядра $C = a + A$ (п. 6.2). Збуджені стани дові-

льного ядра є нестабільними з деякими ширинами розпаду Γ_i (з середнім значенням Γ). Зі зростанням енергії збудження змінюється енергетичний спектр ядра, а саме, змінюється співвідношення між середньою відстанню (D) між рівнями (рис. 7.3). За низьких енергій збуджень, менших за мінімальне значення $S_{\min}$ енергії відділення частинок (частіше нейтронів), найбільш ймовірним є зазвичай радіаційний розпад. Він обумовлюється несильною електромагнітною взаємодією, його ймовірність (ширина) мала й ядро з енергією збудження $U < S_{\min}$ можна вважати майже стабільним, а його енергетичні стани дискретні з відстанню між рівнями $D \gg \Gamma$. В області енергій $U \geq S_{\min}$ з'являється можливість вильоту частинок, ймовірність яких обумовлена сильною взаємодією і, як правило, значно перевищує ймовірність радіаційного розпаду. Тому нехтувати ширинами розпаду не можна. Відповідний енергетичний спектр ядра з $D > \Gamma$ називають *квазидискретним* спектром або випадком резонансів, що не перекриваються. З подальшим збільшенням енергії збудження зростає фазовий об'єм, в який може вилетіти частинка, а також кількість доступних кінцевих станів залишкових ядер і частинок, що вилітають. Це призводить до значного збільшення ширин розпаду, такого що вони дорівнюють або перевищують відстань між рівнями. Ситуацію з $\Gamma > D$ називають *випадком слабого перекриття резонансів*. Енергетичний спектр з $\Gamma \gg D$ називають *квазінеперервним* або *випадком з сильним перекриттям резонансів*.

В області квазидискретного спектра ($D > \Gamma$) процес утворення складеного ядра має резонансний характер, оскільки найімовірніше ядром-мішенню поглинатимуться частинки з енергіями, що відповідають значенням, близьким до резонансних енергій складеного ядра. Як наслідок, переріз утворення компаунд-ядра як функція енергії відносного руху матиме гострі максимуми, що відповідають послідовному захопленню частинок на енергетичні стани. Ці ж максимуми, що мають вигляд частоколу з вузьких резонансів, будуть проявлятися і в перерізах довільної реакції, що відбувається з утворенням даного компаунд-ядра. Тому такі реакції називають *резонансними* й їх переріз можна подати у вигляді суми кривих Брейта – Вігнера (7.99).

В областях, де стани складеного ядра перекриваються, енергетичний спектр фактично є неперервним. Ніяких виділених значень енергій не існує і переріз утворення компаунд-ядра незначно залежить від енергії. Це стосується й перерізів реакцій через компаунд-ядро. Реакції з плавною залежністю перерізів від енергії називаються *нерезонансними*. Компаунд-ядра з енергією збудження, що відповідає області неперервного спектра, можна характеризувати деякою температурою (див. (7.109) – (7.111)), тому їх називають *нагрітими ядрами*.

В області суцільного спектра резонанси перекриваються й гіпотеза про незалежність вхідного і вихідного каналів реакції може виконуватися лише в середньому. Через перекриття резонансів за даної енергії частинки-снаряду збуджується велика кількість рівнів. Утворюється суміш багатьох станів з різними співвідношеннями фаз між амплітудами їх ширин. Ці фази можуть залежати від способу утворення ядра, тому не можна стверджувати, що ймовірність його розпаду не залежить від фаз. Однак можна сподіватися, що при збудженні великої кількості станів інтерференційних компонентів розпаду за різними каналами буде багато. Вони матимуть різні знаки й тому будуть компенсуватися. Перерізи, що

7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками

спостерігаються, будуть деякими статистичними середніми величинами від внесків у процес розпаду великої кількості рівнів. Саме усереднення може призводити до відсутності інтерференції між вхідним і вихідним каналами, тому компаунд-ядерний механізм може бути адекватним лише для опису середніх значень перерізів $\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle$. Як наслідок, за даних квантових характеристик системи (енергії, повного спіну, парності) факторизований вигляд матиме середній переріз

$$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \sigma(\alpha) \cdot G_{\beta}, \quad \sum_{\beta} G_{\beta} = 1, \quad \sigma(\alpha) = \sum_{\beta} \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle, \quad (7.108)$$

де $\sigma(\alpha)$ є середнім перерізом утворення компаунд-ядра за вхідним каналом α , а G_{β} – середня ймовірності розпаду за вихідним каналом.

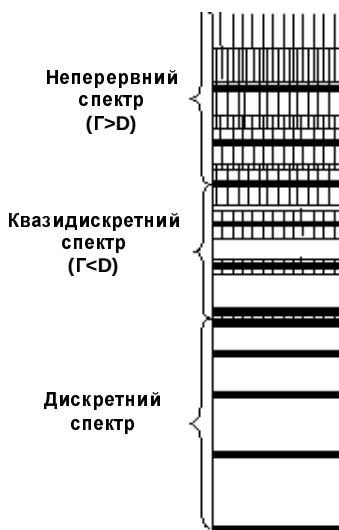


Рис. 7.3. Схематичне зображення енергетичного спектра збудженого ядра

Якщо резонанси мають сильне перекриття, то через випадковість фаз амплітуд ширин станів усереднення виконується автоматично й спостерігатимуться самоусереднені перерізи. Для отримання перерізів, що відповідають механізму компаунд ядра в області слабого перекриття необхідно виконати додаткове усереднення перерізу $\sigma_{\alpha\beta}$ на інтервалі енергій $\delta E \gg D, \Gamma$, що вміщує багато рівнів. Зазвичай таке усереднення в реальних експериментах виконується автоматично, тому що енергії частинок-снарядів завжди мають деякий розкид значень.

Уперше загальний вираз для обчислення перерізу компаунд-ядерного процесу в області неперервного спектра як складеного, так і залишкового ядер був отриманий В.Вайскопфом і Д.Евінгом (1940). Вони виходили з умови рівноваги між процесами утворення й розпаду складеного ядра (принцип деталь-

ного балансу). Вважалося, що компаунд-ядро перебуває в стані термодинамічної рівноваги з деякою температурою T . У такому стані енергія збудження U , (7.107), рівномірно розподілена між всіма збудженими нуклонами, і середня енергія, що приходить на один збуджений нуклон, дорівнює

$$\bar{\varepsilon} = T \cong \frac{U}{\bar{n}}, \quad (7.109)$$

де $\bar{n}$ – найбільш ймовірна кількість збуджених нуклонів при термодинамічній рівновазі. Згідно з моделлю збудженого фермі-газу (п. 3.3)

$$\bar{n} \cong \sqrt{2gU}. \quad (7.110)$$

Тут $g = D_0^{-1} \cong (6/\pi^2)(A/15 + A/7) \approx (0,04 + 0,09)A$ – середня густина одночастинкових рівнів в околі енергії Фермі в ядрі з A нуклонами; D_0 – середня відстань між такими рівнями. Згідно з (7.109), (7.110) енергія збудження і температура зв'язані співвідношенням

$$U \cong 2gT^2. \quad (7.111)$$

Вайскопф і Евінг показали, що частинки, які вилітають при розпаді компаунд-ядра, мають характерний енергетичний спектр, близький до максвеллівського розподілу за енергією,

$$\frac{d < \sigma_{\alpha\beta} >}{d\varepsilon} \sim \varepsilon e^{-\varepsilon/T} \equiv P(\varepsilon). \quad (7.112)$$

Згідно з кінетичною теорією газів, саме такий спектр мають молекули, що випаровуються з рідини. Тому його називають *спектром випаровування*, а сама теорія Вайскопфа – Евінга отримала назву *моделі випаровування*. Процес випаровування приводить до вильоту частинок переважно низьких енергій, середня енергія яких дорівнює

$$< \varepsilon > \equiv \int_0^{\infty} \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon / \int_0^{\infty} P(\varepsilon) d\varepsilon = 2T. \quad (7.113)$$

Вирази для обчислення перерізів компаунд-ядерних процесів з урахуванням законів збереження повного спіну, парності та (наближено) унітарності матриці розсіяння запропонували Л.Вольфенштейн (1951), В.Хаузер та Г.Фешбахом (1952); такий підхід має назву *теорії Хаузера – Фешбаха*. Особливостю його є точне врахування спектра дискретних станів залишкових ядер і їх квантових характеристик. З різними модифікаціями підхід Хаузера – Фешбаха широко використовується в практичних розрахунках. Він якісно узгоджується з великою кількістю експериментальних даних, хоча існують і кількісні розходження. Уперше вплив кореляцій між ширинами розпаду складеного ядра врахував П.Молдауєр (1964, 1980). У загальному випадку вирази для обчислень перерізів реакцій були отримані групою Г.Вайденмюллера (1975–1985). Зокрема, перший практичний метод обчислення перерізів реакцій, що базувався на числовому моделюванні елементів матриці розсіяння й узгоджувався з її унітарністю, був розроблений Г.Хофманом, Я.Рихертом, Я.Тепелем і Г.Вайденмюллером (1975). Загальні аналітичні вирази для перерізів були отримані Я.Вербааршотом, Г.Вайденмюллером і М.Цирнбауєром (1985). Точний метод обчислення перерізів

7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками

при інтерференції прямого і компаунд-ядерного механізмів реакцій започаткували К.Енгельбрехт і Г.Вайденмюллер (1973). Метод зводиться до переходу в простір деяких нових каналів, між якими будуть відсутні кореляції (перетворення Енгельбрехта – Вайденмюллера). Спрощений метод визначення перерізу компаунд-реакцій, що гарно апроксимує точні результати, і загальний метод обчислення перетворення Енгельбрехта – Вайденмюллера розробили С.Н.Єжов і В.А.Плюйко (1984–1993). Найпростішим випадком, коли необхідно враховувати кореляції між вхідним і вихідним каналами, є пружне розсіяння, де ці канали еквівалентні. Теоретично й експериментально показано, що в області сильного перекриття резонансів, врахування кореляцій збільшує переріз пружного розсіяння удвічі порівняно з теорією Хаузера – Фешбаха. Кореляції між вхідним і вихідним каналами також необхідно враховувати в разі невеликої кількості каналів розпаду (рис. 7.4). Після відкриття 4-5 непружних каналів впливом кореляцій зазвичай можна знехтувати.

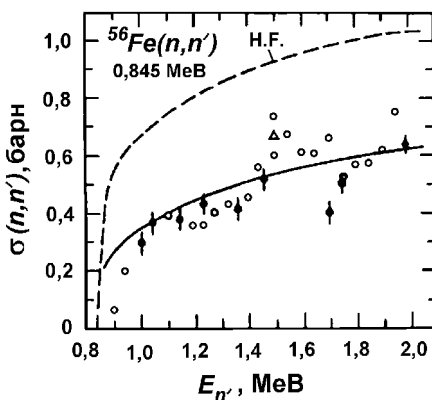


Рис. 7.4. Вплив кореляцій ширин на перерізи непружного розсіяння нейтронів ядрами ^{56}Fe . Криві: суцільна – розрахунки з врахуванням кореляцій ширин; штрих-пунктирна – теорія Хаузера – Фешбаха

Уперше статистичну теорію вильоту частинок на передрівноважних стадіях утворення ядра (рис. 7.2(4), 7.2(5)) запропонував Дж.Грифін (1966). Він використав такі положення: 1) кожному стадію утворення компаунд-ядра необхідно додатково характеризувати кількістю n збуджених квазічастинок (частинок і дірок або "екситонів" у термінології Грифіна); 2) у кожному екситонному стані енергія збудження рівномірно розподіляється між збудженими екситонами (умова парціальної рівноваги); 3) процеси утворення екситонного стану і вильоту з нього частинок можна вважати незалежними, а ймовірність вильоту частинки з даного екситонного стану можна обчислити з умови рівноваги між процесами його утворення й розпаду. Загальний вираз для перерізу прекомпаунд реакцій має вигляд

$$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \sigma(\alpha) \cdot \sum_{n=n_0}^{\bar{n}} \tau_n \cdot G_{\beta}^{(n)}, \quad (7.114)$$

де $\sigma(\alpha)$ – переріз утворення складеної системи частинка-снаряд + ядро-мішень; τ_n – час перебування складеної системи в стані з n екситонами;

$G_B^{(n)}$ – ймовірність вильоту частинки з такого стану. Початкова кількість n_0 збуджених квазічастинок залежить від типу частинки-снаряду; у реакціях з нуклонами можна вважати $n_0 = 3$. У моделі Грифіна величина τ_n обчислювалася як час, що витрачається для переходу з початкового в n -й стан з послідовним збільшенням кількості екситонів на два за рахунок парних зіткнень між нуклонами. Більш точний метод розрахунку τ_n , що базується на кінетичному рівнянні для ймовірності заселення екситонних станів з урахуванням всіх можливих внутрішньоядерних переходів і вильоту частинок, започаткував К.Клайн, М.Блан (1971) і І.Рибанські, П.Обложинські, Е.Бетак (1973). Виліт складних частинок вперше було розглянуто в роботах К.Клайн (1972) і І.Рибанські, П.Обложинські (1973). Дослідження вильоту гамма-квантів в екситонній моделі були започатковані в роботах В.А.Плюйка і Г.А.Прокопця (1978). Вперше закон збереження моменту кількості руху в такому підході врахував В.А.Плюйко (1978), що дало можливість розглядати кутовий розподіл продуктів прекомпаунд і компаунд реакцій єдиним чином.

Однією з найважливіших особливостей вильоту частинок на прекомпаундних стадіях реакцій є збільшення частинок високих енергій порівняно з їх вильотом із компаунд ядра. Дійсно, на передрівноважних стадіях кількість збуджених частинок менша за рівноважну. Звідси середня енергія $\bar{\epsilon} = U/n$ квазічастинки в стані з n екситонами буде більшою, ніж у стані термодинамічної рівноваги (7.109), тому буде більшою й середня енергія частинки, що вилітає. Типові спектри нейтронів і протонів в реакціях (n, n') і (n, p) на важких ядрах, що бомбардуються нейтронами енергії 14 MeV, показано на рис. 7.5. Видно, що при енергіях збудження ~ 20 MeV передрівноважна емісія приводить до значного збільшення кількості нуклонів високих енергій. На початкових стадіях прекомпаунд реакцій кутовий розподіл вилітаючих частинок асиметричний у системі центра мас.

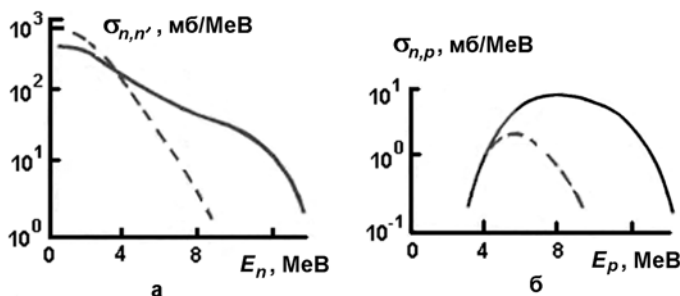


Рис. 7.5. Вплив прекомпаунд емісії на спектр нейтронів (а) і протонів (б) у реакціях (n, n') і (n, p) . Криві: суцільні – розрахунки з урахуванням передрівноважної емісії; штрих-пунктирні – випаровування з компаунд-ядра

7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками

Необхідно відмітити, що у феноменологічних екситонних моделях статистично враховуються як прямі процеси, що не зв'язані зі збудженням колективних станів (див. рис. 7.2(1)), так і власне передрівноважні, коли до вильоту частинки енергія збудження рівномірно розподіляється між збудженими екситонами (рис. 7.2(4)). Вперше питання про коректне розділення прямих та передрівноважних процесів було розглянуто А.В.Ігнатьюком, В.П.Луневим і В.Г.Проняєвим (1975) на прикладі непружного розсіяння нейтронів. Виявилося, що при енергіях збудження ~ 20 MeV емісія нейтронів із початкового стану з $n_0 = 3$ екситонами є на $\approx 80 \div 90$ % прямим непружним розсіянням. Мікроскопічні теорії багатостадійних ядерних реакцій з розділенням внесків прямих і передрівноважних процесів розроблено в роботах Х.Фешбаха, А.Кермана, С.Куніна (1980), Т.Тамури, Т.Удагави, Г.Ленске (1982), Г.Нішиоки, Г.Вайденмюллера, С.Іошиди (1988).

Глава 8

ПОДІЛ АТОМНИХ ЯДЕР

8.1. Механізм поділу важких ядер.

Модель рідкої краплини

Поділом ядер є процес перетворення важкого ядра на декілька з меншою масою. Спрощено процес поділу можна записати у вигляді:

$$(Z, A) \rightarrow (Z_l, A_l) + (Z_h, A_h) + Q_f, \quad (8.1)$$

де (Z, A) – материнське ядро, (Z_l, A_l) , (Z_h, A_h) – дочірні ядра (ядра-уламки), Q_f – енергія, що вивільняється при поділі. Окрім ядер-уламків при поділі випромінюються нейтрони, бета-частинки ($e^{(\pm)}$), нейтрино (антинейтрино) ($\nu_e, \bar{\nu}_e$) і гамма-кванти (γ). Тому енергія Q_f складається з кінетичної енергії відносного руху уламків (E_T) і енергії, що уноситься іншими частинками; наочно її можна зобразити як $Q_f = E_T + \nu \cdot n + \nu_\beta \cdot e^+ + \nu_{\bar{\nu}} \cdot \bar{\nu}_e + \gamma$, де явно вказані кількості випромінених нейтронів (ν), бета-частинок (ν_β) і нейтрино (антинейтрино) ($\nu_{\bar{\nu}}$).

Поділ енергетично можливий, якщо для деяких ядер A_l та A_h виконується нерівність:

$$M(Z, A) > M(Z_l, A_l) + M(Z_h, A_h) \Rightarrow Q_f > 0. \quad (8.2)$$

Ця умова виконується, наприклад, для ядер на лінії бета-стабільності з масовими числами $A > 110$. Експериментально поділ спостерігається не для всіх ядер. Це пов'язано з тим, що уламки поділу мають великий електричний заряд і тому їх вильоту заважає кулонівський бар'єр, коли енергія Q_f менша від висоти бар'єра.

Розрізняють спонтанний поділ, що відноситься до радіоактивних перетворень, та вимушений, який відбувається під дією різних типів частинок (нейтронів, фотонів та ін.). Спонтанний поділ – це мимовільний розпад ядер, що перебивають в основному енергетичному стані. Цей процес скорочено позначають літерами sf (від англ. spontaneous fission – спонтанний поділ). Вимушений

поділ під дією частинок типу x позначають, як реакцію (x, f) . При такому поділі ядро, що розпадається, перебуває в збудженому стані. Уперше ядра-уламки з великими значеннями масових чисел спостерігалися О.Ганом та Ф.Штрассманом (1938) при опроміненні нейтронами ядер урану. Фізичну інтерпретацію цього процесу, як поділ ядра з утворенням більш легких елементів, уперше запропонували Л.Мейтнер і О.Фріш (1939). Вони ввели термін "ядерний поділ", маючи на увазі подібність цього явища до поділу клітин у біології, та дали якісне пояснення цього процесу як обумовленого конкуренцією сил кулонівського відштовхування заряджених частинок в ядрі й поверхневого натягу. Спонтанний поділ відкрили Г.Н.Фльоров та К.А.Петржак у 1940 р. У важких ізотопів з $Z^2 / A < 44,5$ спонтанний поділ є досить рідкісним явищем у порівнянні з α -розпадом. Наприклад, спонтанний поділ ядра ${}_{92}^{238}\text{U}$ ($Z^2 / A = 35,6$) відбувається в $2 \cdot 10^6$ разів рідше, ніж α -розпад.

Процес поділу ядра супроводжується глибокою перебудовою структури ядра. Тому для його опису потрібно враховувати багаточастинкові кореляції, тобто колективні ступені свободи. Найпростішою колективною моделлю є краплинна модель ядра. Кількісну теорію поділу, що базується на розгляді ядра, як краплини ядерної рідини, запропонували й дослідили Н.Бор, Дж.Уілер та Я.І.Френкель (1939). За її допомогою вдалося побудувати простий та наглядний механізм процесу симетричного поділу ядер. Як вже зазначалося при розгляді масової формули (п. 1.4), у цій моделі потенціальна енергія складається з об'ємної, з енергії поверхневого натягу E_S , та електростатичної енергії E_C кулонівського відштовхування між протонами. Поверхнева енергія виникає через зменшення зв'язків між нуклонами на поверхні ядра: нуклони, які розташовані на поверхні, притягуються лише з внутрішньої сторони ядра. Енергія поверхневого натягу пропорційна площі поверхні ядра.

У краплинній моделі ядра поділ трактується, як розрив краплини зарядженої рідини. При цьому згідно з уявленнями класичної механіки можливість поділу ядра на частини є прямим наслідком існування коливань його поверхні й обумовлена нестабільністю ядра відносно поверхневих коливань з великою амплітудою. За рахунок поверхневих коливань ядро може трохи розтягнутися. При розтягненні об'єм краплі залишається приблизно сталим, але повна площа поверхні збільшується; тобто можна вважати, що об'ємна енергія не змінюється, у той час як поверхнева істотно зростає. При розтягненні середня відстань між нуклонами також зростає, тому електростатична енергія кулонівського відштовхування протонів зменшується. При малих деформаціях збільшення поверхневої енергії більше, ніж зменшення електростатичної енергії, тому потенціальна енергія системи:

$$E = E_S + E_C \quad (8.3)$$

збільшується (рис. 8.1). Але існує границя збільшення поверхневої енергії. При розтягненні на відстань трохи меншу за її значення крапля має форму, схожу на гантель; подальше віддалення двох половин вже не призводить до збільшення поверхні. Кожний із фрагментів намагається набутти сферичної форми, що призводить до ще більшого звуження шийки (перемички між фрагментами). Оскільки дві частини краплі з формою гантелі рухаються в різні боки, то куло-

8.1. Механізм поділу важких ядер. Модель рідкої краплини

нівська енергія продовжує зменшуватися, що призводить до зменшення швидкості зростання потенціальної енергії системи. При подальшому розтягненні шийка між гантелеподібними половинами краплини розривається та утворюються два ядра – продукти поділу, які вже не утримуються ні поверхневою, ні об'ємною силами. Відстань, на якій ядро розділяється на уламки називається *точкою розриву* ("scission point"). Після точки розриву відстань між фрагментами стає більшою за радіус дії короткодійних ядерних сил. Кулонівське відштовхування примушує продукти поділу розлітатися в різні боки й зі збільшенням відстані між ними потенціальна енергія зменшується та безупинно переходить у кінетичну енергію уламків.

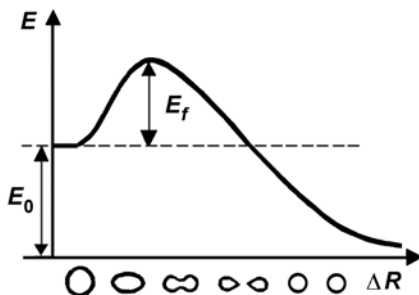


Рис. 8.1. Потенціальна енергія системи під час поділу, як функція відстані між центрами мас продуктів поділу; E_0 – енергія основного стану ядра

Розглянемо можливість кількісного опису симетричного поділу ядра за краплинною моделлю, припускаючи, що на першому етапі поділу ядро можна розглядати як еліпсоїд обертання. У цьому випадку зміну кулонівської та поверхневої енергій можна легко підрахувати. Радіус $R(\theta, \varphi)$, що визначає поверхню еліпсоїда обертання у внутрішній сферичній системі координат, має вигляд (див. п. 1.5, 1.7)

$$R(\theta, \varphi) = R_0'(\beta_2)(1 + \beta_2 \cdot Y_{20}(\theta, \varphi)) \equiv \\ \equiv R_0'(\alpha_2)(1 + \alpha_2 \cdot P_2(\theta)), \quad \alpha_2 = (5/4\pi)^{1/2} \beta_2, \quad (8.4)$$

де β_2 , α_2 – параметри квадрупольної деформації ядра; $Y_{20}(\theta, \varphi)$, $P_2(\theta)$ – сферична гармоніка і поліном Лежандра другого ступеня (див. п. 3.5); θ – полярний кут у внутрішній системі з віссю вздовж осі симетрії ядра; R_0' – параметр, що фіксує збереження об'єму ядра. Відповідно до (8.4) маємо такі вирази для великої півосі еліпсоїда a (що направлена вздовж осі симетрії) та малої – b (рис. 8.2):

$$a = R(\theta = 0, \varphi) = R_0'(\alpha_2)(1 + \alpha_2), \\ b = R(\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi) = R_0'(\alpha_2)(1 - 0,5 \cdot \alpha_2). \quad (8.5)$$

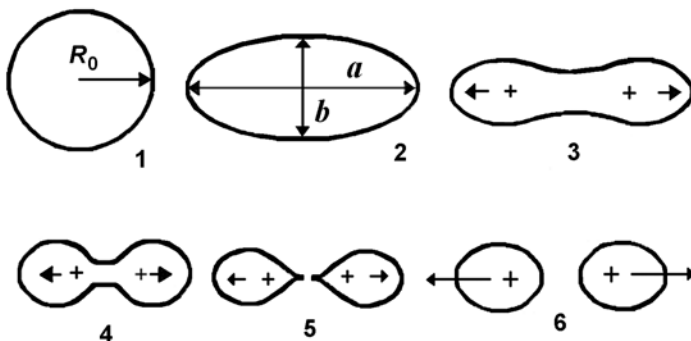


Рис. 8.2. Деформація ядра в процесі симетричного поділу

Умова нестисливості ядерної рідини приводить до збереження об'єму ядер незалежно від їх форми. Для ядер у вигляді еліпсоїда обертання ця умова записується як

$$V = \frac{4\pi}{3} ab^2 = \frac{4\pi}{3} R_0^3,$$

де $R_0 = r_0 \cdot A^{1/3}$ – радіус еквівалентного сферичного ядра. Звідки, з врахуванням (8.5) знаходимо вираз для параметру R_0' :

$$R_0'(\alpha_2) = R_0 \left(1 + \frac{3}{5} \alpha_2^2 + \frac{2}{35} \alpha_2^3 \right)^{-1/3} = R_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{5} - \frac{2\alpha_2^3}{105} + \dots \right). \quad (8.6)$$

Сили поверхневого натягу ядерної рідини відіграють роль пружних сил, що намагаються повернути ядро до початкової сферичної форми. У протилежність цьому кулонівське відштовхування двох додатних зарядів з центрами у фокусах еліпсоїда намагається збільшити деформацію та розділити ядро на два уламки однакової маси, що демонструються на рис. 8.2.

Потенціальна енергія поверхневого натягу ядра E_S пропорційна площі $S(\alpha_2)$ його поверхні:

$$E_S = \sigma S(\alpha_2) \quad (8.7)$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу. Площа поверхні витягнутого еліпсоїда обертання з півосями a та b (8.5) дорівнює:

$$S(\alpha_2) = 2\pi ab \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right), \quad (8.8)$$

де $\varepsilon = (\sqrt{a^2 - b^2})/a$ – ексцентриситет еліпсоїда. Підставляючи співвідношення (8.4), отримуємо вираз для розкладу площі поверхні в ряд за α_2 :

8.1. Механізм поділу важких ядер. Модель рідкої краплини

$$S(\alpha_2) = S_0 \left(1 + \frac{2\alpha_2^2}{5} - \frac{4\alpha_2^3}{105} + \dots \right), \quad S_0 = S(\alpha_2 = 0) = 4\pi R_0^2. \quad (8.9)$$

Тут S_0 – площа поверхні сфери. Тому згідно з (8.7) маємо такий вираз для перших двох компонентів розкладу потенціальної енергії поверхневого натягу ядра за параметром деформації:

$$E_S = E_S^{(0)} \left(1 + \frac{2\alpha_2^2}{5} - \frac{4\alpha_2^3}{105} \right), \quad E_S^{(0)} = 4\pi R_0^2 \sigma = a_{\text{нов}} A^{2/3}, \quad (8.10)$$

де $E_S^{(0)}$ – енергія поверхневого натягу сферичного ядра, а величину $a_{\text{нов}} = 4\pi R_0^2 \sigma$ можна ототожнити з коефіцієнтом a_2 при поверхневій компоненті масової формули Вейцекера (1.17): $a_{\text{нов}} \equiv a_2 = 17,8 \text{ МеВ}$. Видно, що поверхнева енергія спочатку зростає зі збільшенням деформації, як її квадрат, а далі зменшується, тобто має вигляд бар'єра.

Загальний вираз для кулонівської енергії має вигляд:

$$E_C = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \rho_p(\vec{r}) V(\vec{r}), \quad (8.11)$$

де $\rho_p(\vec{r})$ – густина протонів, а $V(\vec{r})$ – кулонівський потенціал взаємодії в точці $\vec{r}$ одиничного заряду з протонами ядра:

$$V(\vec{r}) = e^2 \int d\vec{r}' \rho_p(\vec{r}') \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^{-1}. \quad (8.12)$$

Для рівномірно зарядженого еліпсоїда після інтегрування цей вираз матиме вигляд (Р.Берінджер, В.Кнокс, 1961)

$$E_C = E_C^{(0)} \cdot \frac{(1-\epsilon^2)^{1/3}}{2\epsilon} \ln \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}, \quad E_C^{(0)} = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R_0} = a_{\text{кул}} \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (8.13)$$

З точністю до третього порядку за деформацією знаходимо

$$E_C = E_C^{(0)} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{5} - \frac{4\alpha_2^3}{105} \right), \quad (8.14)$$

де $E_C^{(0)}$ – кулонівська енергія рівномірно зарядженої кулі, $a_{\text{кул}} = 3e^2/5r_0 = 0,864/r_0 \text{ МеВ}$ – параметр кулонівської взаємодії; наприклад, у масовій формулі Вейцекера (1.17) використовується значення $a_{\text{кул}} \equiv a_3 = 0,71 \text{ МеВ}$.

Порівняння виразів (8.10) та (8.14) показує, що енергія поверхневого натягу E_S зростає швидше, ніж зменшується кулонівська енергія E_C , і в повній енергії утворюється потенціальний бар'єр. Сума поверхневої та кулонівської енергій (8.10), (8.14) має вигляд:

$$E(\alpha_2) = E_0 + E_{\text{def}}(\alpha_2), \quad (8.15)$$

де $E_0 = E_C^{(0)} + E_S^{(0)}$ – потенціальна енергія у сферичному ядрі; $E_{def}(\alpha_2)$ – зміна потенціальної енергії з деформацією або повна енергія деформації ядра:

$$E_{def}(\alpha_2) = E_S^{(0)} \left(\frac{2}{5}(1-x)\alpha_2^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\alpha_2^3 \right) \quad (8.16)$$

Величину x ,

$$x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} = \frac{a_{кул}}{2a_{нов}} \frac{Z^2}{A}, \quad (8.17)$$

називають *параметром подільності ядра* ("the conventional fissility parameter"). Відмітимо, що співвідношення (8.16) з дуже великою точністю апроксимує точні значення енергії деформації для деформацій із значеннями до $\alpha_2 \sim 0,6$.

Енергія деформації (8.16) складається з членів другого й третього порядків за деформацією. Перший компонент домінує за малих значень α_2 , тобто біля сферичної поверхні. У цьому випадку за $x < 1$ енергія деформації збільшується з α_2 і тому ядро є стабільним відносно малих деформацій, а при значеннях $x > 1$ ядро стає нестабільним. Енергія деформації також буде від'ємною при $x > 1$ і достатньо великих значень α_2 . Таким чином, при малих еліпсоїдальних деформаціях енергія деформації ядра спочатку зростає, але зі збільшенням α_2 за рахунок другого компонента в (8.16) може утворитися деякий енергетичний бар'єр E_f , який називають *бар'єром поділу*. Характер зміни енергії деформації $E_{def}(\alpha_2)$ залежить від знаку похідної $dE_{def}/d\alpha_2$. Наприклад, для ядра урану ${}_{92}^{238}\text{U}$ величина $dE_{def}/d\alpha_2 > 0$ і $E_{def}(\alpha_2)$ при малих α_2 зростає, а крива зміни потенціальної енергії має вигляд кривої, що зображена на рис. 8.1.

Значення параметра деформації $\alpha_2 = \alpha_2^*$, що відповідає максимуму кривої потенціальної енергії (тобто задовольняє рівняння $dE_{def}/d\alpha_2 = 0$) називається *критичною деформацією* або *сідловою точкою* ("saddle point"). Величина бар'єра поділу E_f дорівнює значенню енергії деформації в сідловій точці:

$E_f = E_{def}(\alpha_2^*)$. Процес руху ядра від сідлової точки до точки розриву називається *спуском ядра з бар'єра*.

Отримаємо значення сідлової точки, користуючись (8.16). Маємо таке рівняння для визначення α_2^* :

$$dE_{def}(\alpha_2^*)/d\alpha_2 = E_S^{(0)} \left(\frac{4}{5}(1-x)\alpha_2^* - \frac{4}{35}(1+2x)\alpha_2^{*2} \right) = 0. \quad (8.18)$$

Звідси знаходимо значення параметра деформації в сідловій точці

8.1. Механізм поділу важких ядер. Модель рідкої краплини

$$\alpha_2^* = 7(1-x)/(1+2x), \quad (8.19)$$

і вираз для висоти бар'єра поділу

$$E_f \equiv E_{def}(\alpha_2^*) = q_f \cdot \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2}, \quad (8.20)$$

де

$$q_f = \frac{98}{15} E_S^{(0)} = \frac{98}{15} \cdot a_{нов} \cdot A^{2/3} \cong 116,2933 \cdot A^{2/3}, \text{ MeB}. \quad (8.21)$$

Відповідно до наближень, які були використані для отримання (8.20), цей вираз є точним при достатньо малих значеннях деформацій α_2^* , тобто згідно з (8.19) для малих значень $|1-x|$ (фактично менших за $|1-x| \sim 0,4$).

Іноді параметр подільності x (8.17) подають у вигляді

$$x = \frac{X}{X_{кр}}, \quad (8.22)$$

де величини

$$X \equiv \frac{Z^2}{A}, \quad X_{кр} \equiv 2 \frac{a_{нов}}{a_{кул}} \quad (8.23)$$

називають *параметром поділу* і його критичним значенням. Вираз (8.20) для висоти бар'єра як функція параметра поділу має вигляд

$$E_f \equiv \tilde{q}_f \cdot \frac{(X_{кр} - X)^3}{(X_{кр} + 2X)^2}, \quad (8.24)$$

з

$$\tilde{q}_f = \tilde{q}_f / X_{кр} = \frac{49}{15} \cdot a_{кул} \cdot A^{2/3} \cong 2,319 \cdot A^{2/3}, \text{ MeB}. \quad (8.25)$$

Деякі автори використовують трохи різні критичні значення параметра поділу, які лежать в інтервалі:

$$44,5 \leq X_{кр} < 51. \quad (8.26)$$

Наприклад, для значень $a_{нов} = 17,8 \text{ MeB}$ та $a_{кул} = 0,71 \text{ MeB}$ з формули Вейцзекера (1.17) маємо, що $X_{кр} = 2a_{нов} / a_{кул} = 50,141$. Як емпіричне критичне значення параметра поділу часто використовують $X_{кр} = 44,5$.

Згідно з (8.20), (8.24) при $x < 1$ висота бар'єра E_f тим менша, чим більше значення параметра подільності ядра x або, чим більше значення параметра поділу $X = Z^2 / A$ і менша величина його критичного значення $X_{кр}$.

Наявність потенціального бар'єра E_f робить процес поділу ядер малоімовірним як з погляду класичної механіки, так і квантової. А саме, згідно з класичною механікою ядро може ділитися лише за умови малоімовірних флуктуацій

поверхні з дуже великими значеннями параметрів деформації, що перевищують критичні значення. Згідно з уявленнями квантової механіки підбар'єрний розпад ядер обумовлений ефектом тунелювання (п. 5.5) і його ймовірність спадає за експонентою з висотою бар'єра.

Якщо бар'єр поділу деформацій від'ємний або нульовий, то вже сферична форма ядра буде нестійкою й ядро миттєво поділиться. Відповідно до (8.20), (8.24), межа стійких відносно симетричного поділу ядер (тобто ядер з $E_f > 0$) визначається такими значеннями параметрів подільності x і поділу X :

$$X \equiv \frac{Z^2}{A} < X_{кр}, \quad x \equiv X / X_{кр} < 1. \quad (8.27)$$

Якщо $X = X_{кр}$ ($x = 1$), то бар'єр поділу відсутній: $E_f = 0$.

Критичні значення параметра поділу X більші за ті, що відповідають умові енергетичної можливості процесу поділу на два уламки, тобто умові:

$$Q_f \equiv c^2 (M(Z, A) - M(Z_l, A_l) - M(Z_h, A_h)) > 0. \quad (8.28)$$

Розглянемо обмеження на значення параметра поділу, що виникають за умови (8.28). Припустимо, що ядро ділиться на два фрагменти з масовими числами kA та $(1-k)A$. Оскільки нуклони в ядрі розподілені майже рівномірно, то вважаємо, що й протони в уламках розподілені як kZ і $(1-k)Z$, а тому в такій же пропорції розподіляється й заряд. Згідно з (8.28) та визначенням енергій зв'язку (п. 1.4) енергетичний вихід процесу поділу Q_f на два фрагменти буде додатним, якщо енергії зв'язку ядер задовольняють нерівність:

$$B(kZ, kA) + B((1-k)Z, (1-k)A) > B(Z, A). \quad (8.29)$$

Звідси, використовуючи формулу Вейцзекера (1.17) з урахуванням об'ємної поверхневої та кулонівської компонентів, знаходимо, що енергетичний вихід буде додатним для ядер з параметром поділу, який задовольняє нерівність:

$$X = \frac{Z^2}{A} > X_{кр} \frac{1}{2} \frac{(1-k)^{2/3} + k^{2/3} - 1}{1 - k^{5/3} - (1-k)^{5/3}}. \quad (8.30)$$

Для симетричного поділу $k = 0,5$ знаходимо умову енергетичної можливості виникнення процесу поділу (без врахування сил симетрії, оболонкових і парно-непарних ефектів у формулі Вайцзекера):

$$X > 0,35X_{кр} \in 15,6 \div 17,9. \quad (8.31)$$

Таким чином, ядра з параметром поділу меншими за $X_{кр}$ і таким, що

$$0,35X_{кр} < X < X_{кр} \quad (8.32)$$

можуть ділитися спонтанно, але їх час життя буде тим більший, чим менше значення параметра X через те, що з його зменшенням збільшується бар'єр поділу (див. (8.24)).

На рис. 8.3 демонструється залежність параметра поділу від заряду ядер. Видно, що передбачувана границя стабільності ядер при $X_{кр} = 44,5$ розташо-

8.1. Механізм поділу важких ядер. Модель рідкої краплини

вана між значеннями Z приблизно рівними 110 та 120, що задовільно узгоджуються з експериментальними даними.

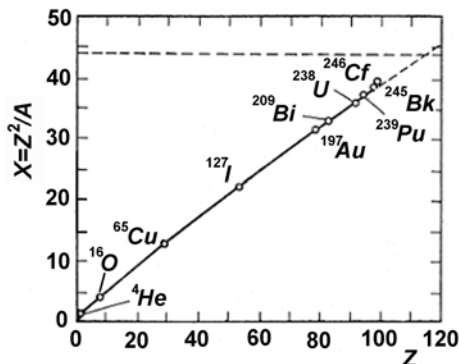


Рис. 8.3. Залежність параметра поділу $X = Z^2 / A$ від заряду ядра. Максимальне значення відповідає критичному значенню параметра поділу, яке вважається рівним $X_{кр} = 44,5$

На рис. 8.4 приведено експериментальні дані залежності періоду напіврозпаду спонтанного поділу ядер $T_{1/2}$ від параметра поділу. Видно, що період напіврозпаду експоненціально збільшується зі зменшенням $X = Z^2 / A$, тобто зі збільшенням бар'єра поділу (8.24). Спонтанний поділ спостерігається, починаючи зі значень параметра $X = Z^2 / A$ приблизно рівних 35. Ядро ^{230}Th має дуже великий час життя відносно спонтанного поділу – більше ніж $1,5 \cdot 10^{17}$ років. Час життя ядра ^{256}Fm дорівнює ~ 30 год.

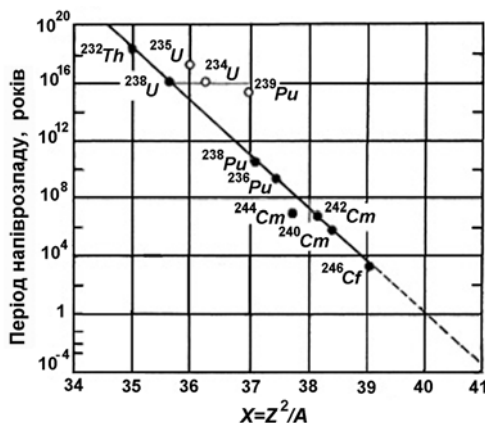


Рис. 8.4. Залежність періоду напіврозпаду спонтанного поділу ядер від параметра поділу Z^2 / A

Уламки, що утворюються при поділі важких ядер мають, взагалі кажучи, різні маси. Розподіл уламків поділу за масами зображують у вигляді графіка відносного виходу уламків з даною масою на один акт поділу залежно від масового числа уламку (так звана крива виходу мас). Для спонтанного поділу і поділу ядер з невеликою енергією збудження крива виходу мас має характерний двогорбий вигляд (рис. 8.5). Умова нормування розподілу мас обирається так, щоб сума виходів під кожним з піків (для важких і легких уламків) становила 100 %, тому повний вихід усіх мас на один акт дорівнює 200 %.

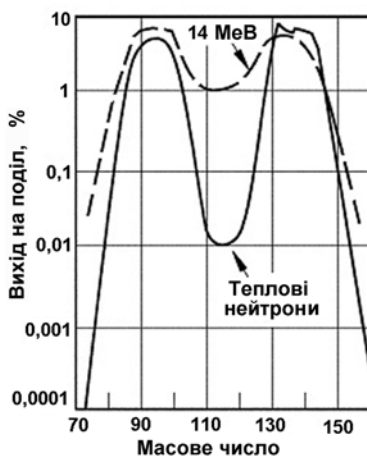


Рис. 8.5. Залежність відносного виходу уламків поділу ядра $^{235}_{92}\text{U}$ від їх масових чисел при збудженні урану тепловими ($\sim 0,025$ еВ) та швидкими нейтронами

Виходи уламків різних мас змінюються в широких межах: від 10^{-4} % на краях розподілу і 7 % у районі максимуму (рис. 8.5). Відносна кількість актів поділу $^{235}_{92}\text{U}$ (при його збудженні тепловими нейтронами), в яких утворюється два уламки однакової маси становить 10^{-2} %, тоді як асиметричний поділ з розпадом на важкий і легкий уламки з найбільш ймовірними масовими числами ($A_h \cong 139$, $A_l \cong 95$) відбувається в 7 % випадків, тобто в 700 разів частіше.

Форма масового розподілу залежить як від масового числа ядра, що ділиться, так і від енергії збудження. При спонтанному й вимушеному поділах тепловими нейтронами наймовірнішим, як правило, є асиметричний поділ. При збільшенні маси ядра, що ділиться, максимуми в масовому розподілі уламків поділу починають зближатися, причому найбільш ймовірна маса важкого уламку майже не змінюється ($A_h \approx 140$), а максимум, що відповідає середній масі легких уламків рухається в бік більших мас ($A_l \approx 90 \Rightarrow 110$) (рис. 8.6, 8.7). Такий ефект можна пояснити впливом оболонкової структури. На межі групи важких уламків міститься двічі магічне ядро $^{132}_{50}\text{Sn}$. Утворення такої стабільної конфігурації фіксує

8.1. Механізм поділу важких ядер. Модель рідкої краплини

положення нижньої границі масового розподілу важких уламків. Масовий розподіл легких уламків формується з тих нуклонів, що залишилися, і тому зростає зі збільшенням маси материнського ядра. При збільшенні енергії збудження ядра вплив оболонкових ефектів зменшується і зменшується провал між горбами, тобто розподіл стає більш симетричним (рис. 8.5, 8.7).

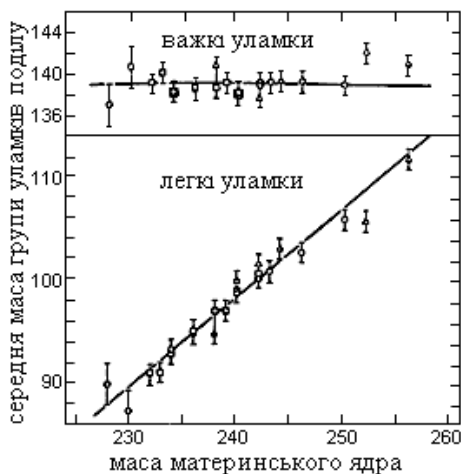


Рис. 8.6. Найбільш ймовірні маси важкого й легкого уламків поділу залежно від маси материнського ядра

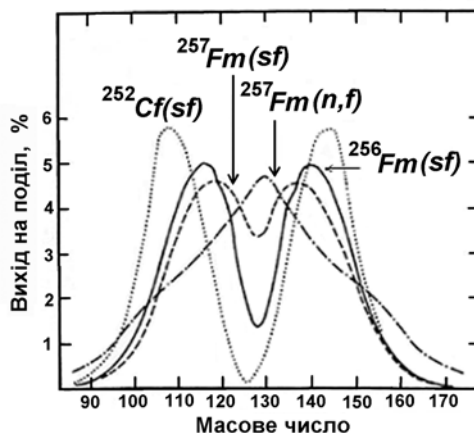


Рис. 8.7. Відносний вихід уламків спонтанного поділу ядер $^{252}_{98}\text{Cf}$, $^{256}_{100}\text{Fm}$, $^{257}_{100}\text{Fm}$ та вимушеного поділу ядра $^{257}_{100}\text{Fm}$

Експериментально визначити розподіл зарядів первинних уламків поділу важче, ніж розподіл мас, оскільки уламки розпадаються з випромінюванням β -частинок. У першому наближенні можна вважати, що середній питомий заряд уламків Z_i/A_i такий як у материнського ядра Z/A , і розподіл $p(Z_i)$ зарядів Z_i уламків з масовим числом A_i можна подати у вигляді функції Гаусса

$$p(Z_i) = \exp\left(-\frac{(Z_i - \langle Z \rangle)^2}{c}\right), \quad (8.33)$$

де стала $c = 0,8 \pm 1,0$, а

$$\langle Z \rangle = A_i \cdot \frac{Z}{A} \quad (8.34)$$

– середній заряд уламка.

Експериментально також спостерігався вимушений поділ ядер на три й чотири частини. Зокрема, при низьких енергіях збудження поділ на три приблизно рівні частини є досить рідкісним явищем і спостерігається в $\sim 10^{-6}$ разів рідше, ніж поділ на два уламки.

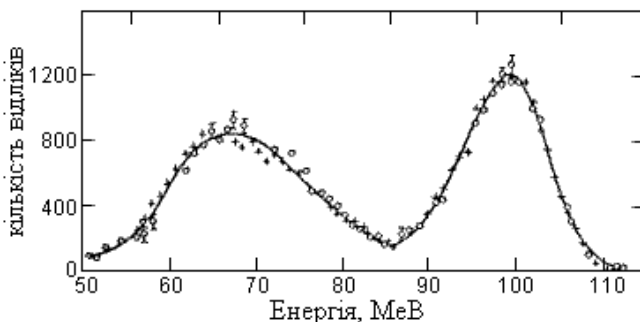


Рис. 8.8. Розподіл за енергією виходу уламків вимушеного поділу ядра $^{235}_{92}\text{U}$ тепловими нейтронами

Асиметрія масового спектра призводить до асиметрії енергетичного спектра уламків поділу. Із закону збереження імпульсу випливає, що $p_h + p_l \approx 0$, або $p_h \approx -p_l$ з $p_a = \sqrt{2M_a E_a}$, і тому відношення кінетичної енергії легкого уламка E_l до важкого E_h є приблизно обернено пропорційним відношенню їхніх мас:

$$E_l / E_h = M_h / M_l, \quad (8.35)$$

де M_l і M_h – маси легкого й важкого уламків відповідно. Користуючись цим співвідношенням можна із розподілу уламків за енергією (рис. 8.8) знайти розподіл за масами й навпаки. Наприклад, якщо вважати, що повна кінетична енергія E_T уламків (яка коротко позначається як ТКЕ, від англ. "total kinetic energy" – повна кінетична енергія) поділу ядра $^{235}_{92}\text{U}$ становить ≈ 160 MeV, то для важких ядер-уламків максимум в енергетичному спектрі буде при енергіях $E_h = E_T M_l / (M_l + M_h) \approx 65$ MeV, а для легких уламків він зміститься в області $E_l = E_T M_h / (M_l + M_h) \approx 95$ MeV.

8.2. Вплив ядерних оболонок на енергію деформації. Метод оболонкового доданка Струтинського

Модель рідкої краплини не виключає асиметричного поділу (його можна розглядати як поділ ядра, що має форму груші в сідловій точці), але кількісно вона не описує його закономірності. Для пояснення асиметрії в розподілі мас уламків, обчислення значень висоти бар'єрів поділу необхідно обов'язково врахувати вплив оболонкової структури, що обумовлена рухом нуклонів в одночастинковому самоузгодженому потенціалі (п. 3.4, 3.5). Наприклад, у надважких ядрах з $Z > 102$ краплинним значенням бар'єра поділу, як правило, можна знехтувати й реальна висота бар'єра визначається ядерними оболонками.

Уперше оболонкові ефекти при обчисленні енергій бар'єрів поділу емпірично врахував В.Святецький (1956). Він знайшов, що експериментальні значення енергій порогів вимушеного поділу ядер з $230 < A < 240$ можна досить точно апроксимувати, якщо врахувати оболонковий компонент (δE_{shell}) масової формули, який визначає відхилення маси основного стану ядер від гладкої кривої Вейцзекера, а також включити парно-непарні ефекти. Відповідний вираз для енергій бар'єра поділу має вигляд (в одиницях МеВ):

$$E_f = 0,00395 \cdot \left(50,13 - \frac{Z^2}{A}\right)^3 - 0,166 \cdot \left(40,2 - \frac{Z^2}{A}\right)^2 + \Delta - \delta E_{shell}, \quad (8.36)$$

де

$$\Delta = \begin{cases} -1,12 & \text{— парно - парні ядра,} \\ 0 & \text{— непарні за } A \text{ ядра,} \\ +1,12 & \text{— непарно - непарні ядра.} \end{cases}$$

Феноменологічний аналітичний вираз для обчислення оболонкового компонента в масах ядер, що базувався на аналізі експериментальних значень їх мас, запропоновано В.Маєрсом і В.Святецьким (1965, 1966). Він має вигляд:

$$\delta E_{shell} = C \cdot \left[\frac{F(N) + F(Z)}{(A/2)^{2/3}} - c \cdot A^{1/3} \right] \cdot D, \quad (8.37)$$

де $C = 5,8 \text{ МеВ}$, $c = 0,325$. Функція $F(Y)$ з $Y = N, Z$ залежить від магічних чисел, за які беруться однакові для нейтронів і протонів значення $Y_i = 2, 8, 14$ (або 20), 28, 50, 82, 126, 184, 258, і в інтервалі $Y_{i-1} \leq Y < Y_i$ дорівнює

$$F(Y) = 0,6 \cdot \left[\frac{Y_i^{5/3} - Y_{i-1}^{5/3}}{Y_i - Y_{i-1}} \cdot (Y - Y_{i-1}) - (Y^{5/3} - Y_{i-1}^{5/3}) \right]. \quad (8.38)$$

Параметр D у формулі (8.37) характеризує вплив деформації ядра на оболонкові ефекти і вибирається у вигляді:

$$D = \left(1 - 2 \cdot \frac{\langle \Delta R^2 \rangle}{a^2} \right) \cdot \exp \left(- \frac{\langle \Delta R^2 \rangle}{a^2} \right), \quad (8.39)$$

де $a = 0,444 \cdot r_0$ фм, а $\langle \Delta R^2 \rangle$ – середнє за кутами відхилення радіуса $R(\theta, \varphi)$ деформованого ядра від радіуса еквівалентного сферичного ядра R_0

$$\langle \Delta R^2 \rangle = \int (R(\theta, \varphi) - R_0)^2 d\Omega / (4\pi). \quad (8.40)$$

Такий метод обчислення δE_{shell} повністю базується на експериментальних даних.

За його допомогою можна отримувати реалістичні результати лише для ядер, що перебувають в околі лінії бета-стабільності, і тому характеризуються малими деформаціями порівняно зі значеннями в сідловій точці. Вирази (8.37) – (8.39) параметризують висоту бар'єра поділу, тобто енергію деформації ядер у сідловій точці, і без додаткових досліджень їх не можна використовувати для обчислення потенціальної енергії деформації на всіх етапах процесу поділу. Зокрема, при дуже великих деформаціях множник D приводить до загасання оболонкового доданка (8.37) у сильно деформованих ядрах, що перебуває в протиріччі з розрахунками енергетичного спектра сильно деформованих ядер (п. 3.8).

Кількісний метод розрахунку внеску оболонкових ефектів у повну енергію ядер з довільною деформацією, що використовує одночастинковий спектр нуклонів у заданому середньому ядерному потенціалі, уперше запропонував і дослідив В.М.Струтинський (1966); зараз цей підхід отримав назву *методу оболонкового доданка (або оболонкової поправки) Струтинського*. Він базується на припущенні, що осцилююча частина δE_{shell} повної енергії ядра E , яка визначає відхилення E від її значення (E_{LDM}) за моделлю краплини ядерної рідини, збігається з осцилюючою частиною (δE_{osc}) повної енергії (E_{SM}) оболонкової моделі, що обчислюється з використанням спектра одночастинкових станів у феноменологічному середньому ядерному потенціалі, який описує експериментальний спектр одночастинкових станів біля енергії Фермі:

$$\delta E_{shell} = \delta E_{osc} \equiv E_{SM} - \tilde{E}_{SM}, \quad (8.41)$$

де $\tilde{E}_{SM}$ – деяке середнє значення повної енергії оболонкової моделі. Повна енергія системи E_{SM} в оболонковій моделі є сумою енергій частинок на одночастинкових рівнях ϵ_i . Наприклад, енергія E_{SM} основного стану системи із

A тотожних ферміонів дорівнює (для спрощення вираз подано без врахування виродження одночастинкових станів)

$$E_{SM} = \sum_{i=1}^A \epsilon_i. \quad (8.42)$$

Цю формулу можна переписати в стандартному для статистичної фізики вигляді, якщо ввести густину одночастинкових рівнів $g(\epsilon)$ таку, що величина $g(\epsilon)d\epsilon$ дорівнює кількості рівнів $dn(\epsilon)$ в інтервалі енергій між ϵ і $\epsilon + d\epsilon$. Очевидно, що для даного випадку густину одночастинкових рівнів можна подати у вигляді

$$g(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i). \quad (8.43)$$

Згідно з принципом Паулі рівні заповнюються послідовно аж до деякого самого верхнього рівня – енергії Фермі λ ($\lambda \equiv \varepsilon_F$) (п. 3.3). У збуджених системах параметр λ називається *хімічним потенціалом*. Його значення можна знайти з умови фіксування повної кількості нуклонів, яка в даному випадку збігається з кількістю одностинкових станів з енергіями $\varepsilon_i \leq \lambda$:

$$A = \int_{-\infty}^{\lambda} g(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (8.44)$$

Враховуючи визначення (8.43), енергію основного стану (8.42) можна переписати у вигляді

$$E_{SM} = \sum_{i=1}^A \varepsilon_i = \int_{-\infty}^{\lambda} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (8.45)$$

Зауважимо, що при використанні цих формул у дослідженні ядер треба також врахувати виродження одностинкових станів (див. п. 3.3). Зокрема, при розгляді нейтронів і протонів ядер як тотожних нуклонів одностинкові рівні будуть чотирикратно виродженими, а одностинкова густина рівнів матиме в чотири рази більше значення, ніж за формулою (8.43).

Плавний компонент енергії $\tilde{E}_{SM}$ у (8.41) відповідає однорідному одностинковому спектру (рис. 8.9), з пивною густиною $\tilde{g}(\varepsilon)$, яка отримується після усереднення реальної густини з ваговою функцією $\Phi_{\gamma}(x)$, що зосереджена на деякому інтервалі усереднення γ , що перевищує відстань між оболонками:

$$\tilde{g}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\gamma}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\gamma}\right) \cdot g(\varepsilon') d\varepsilon'. \quad (8.46)$$

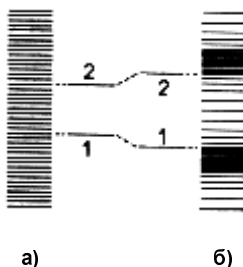


Рис. 8.9. Однорідний а) і реалістичний б) спектри нуклонів в ядрах. Зміна відстані між рівнями біля поверхні Фермі вказана цифрою 1

Щоб плавні величини не мали внеску від ядерних оболонок, інтервал усереднення необхідно вибирати більшим, ніж відстань між оболонками. Аналогічно формулі (8.45) маємо вираз для обчислення енергії $\tilde{E}_{SM}$

$$\tilde{E}_{SM} = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \varepsilon \tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (8.47)$$

де хімічний потенціал $\tilde{\lambda}$ визначається з умови незмінності кількості нуклонів в ядрі

$$A = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (8.48)$$

Однорідність спектра означає, що його густина $\tilde{g}(\varepsilon)$ не має змінюватися з повторним усередненням:

$$\tilde{\tilde{g}}(\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\gamma}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\gamma}\right) \cdot \tilde{g}(\varepsilon') d\varepsilon' = \tilde{g}(\varepsilon). \quad (8.49)$$

Ця умова приводить до обмежень на вигляд функції $\Phi_{\gamma}(x)$. Відмітимо, що співвідношення (8.49) не може виконуватися для довільних функцій $\tilde{g}(\varepsilon)$, оскільки в такому разі $\Phi_{\gamma}(x)$ буде δ -функцією, що не приводить до усереднення. Крім того, воно не виконується й для стандартних функцій усереднення таких, як функції Гаусса або Лорентца. Для реалістичних одностинкових спектрів плавний компонент густини $\tilde{g}(\varepsilon)$ на інтервалі усереднення γ можна наблизити поліномом ступеня $2M$ (зазвичай $2M = 2, 4$, або 6). Неважко перевірити, що в цьому випадку умова (8.49) буде виконуватися для функції усереднення $\Phi_{\gamma}(x)$ у вигляді добутку вагової функції Гаусса $w(x)$ на (коригувальний) поліном $p_M(x)$ ступеня $2M$:

$$\Phi_{\gamma}(x) = \frac{1}{\gamma} f_M(x), \quad f_M(x) = w(x) \cdot p_M(x), \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2), \quad (8.50)$$

де коригувальний поліном має вигляд

$$p_M(x) = \sum_{m=0}^M a_{2m} \cdot \frac{d^{2m} w(x)}{dx^{2m}} \Big/ w(x) = \sum_{n=0}^M \tilde{a}_{2n} \cdot x^{2n}, \quad a_{2m} = (-1)^m / (2^{2m} m!). \quad (8.51)$$

Коефіцієнти $\tilde{a}_{2n}$ у (8.51) можна знайти перебудовою ряду з похідних від функцій Гаусса; для $M \leq 3$ корегувальні поліноми дорівнюють

$$p_0(y) = 1, \quad p_1(y) = \frac{3}{2} - y, \quad p_2(y) = \frac{15}{8} - y(5 - y)/2, \\ p_3(y) = \frac{35}{16} + y \cdot \left[y \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{y}{6} \right) - \frac{35}{8} \right], \quad y = x^2 \equiv [(\varepsilon - \varepsilon')/\gamma]^2. \quad (8.52)$$

Окрім умови (8.49) незмінності плавної густини $\tilde{g}(\epsilon)$ при повторному усередненні має виконуватися умова незалежності середнього значення повної енергії $\tilde{E}_{SM}$ від інтервалу усереднення,

$$\frac{\partial \tilde{E}_{SM}}{\partial \gamma} = 0, \quad (8.53)$$

для фіксованого значення M . Співвідношення (8.53) називається *умовою існування плато*. Рівність нулю першої похідної $\tilde{E}_{SM}$ від γ означає, що обчислена за формулою (8.47) енергія дійсно є середнім плавним значенням енергії, яке за визначенням не має залежати від інтервалу усереднення. При довільному розподілі умова (8.53) може й не виконуватися, але при реалістичних розподілах одночастинкових рівнів завжди можна знайти такі значення γ і M , для яких рівність (8.53) буде виконуватися хоча б наближено.

Згідно з (8.46), (8.50), маємо такий вираз для гладкого компонента густини (8.46)

$$\tilde{g}(\epsilon) = \sum_i \frac{1}{\gamma} f_M\left(\frac{\epsilon - \epsilon_i}{\gamma}\right) \equiv \tilde{g}_M(\epsilon, \gamma). \quad (8.54)$$

Умова (8.48) того, що згладжений спектр належить даному ядру, визначає хімічний потенціал $\tilde{\lambda}$ згладженого спектра. З урахуванням (8.54) нелінійне рівняння (8.48) для знаходження $\tilde{\lambda}$ при фіксованому A набуває вигляду:

$$A = \sum_i \int_{-\infty}^{t_i} f_M(x) dx \equiv \tilde{A}_M(\tilde{\lambda}, \gamma), \quad t_i = (\tilde{\lambda} - \epsilon_i) / \gamma, \quad (8.55)$$

або

$$A = \sum_i \tilde{n}_i, \quad \tilde{n}_i \equiv \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} f_M\left(\frac{\epsilon' - \epsilon_i}{\gamma}\right) d\epsilon' = \int_{-\infty}^{t_i} f_M(x) dx, \quad (8.56)$$

де величини $\tilde{n}_i$ можна інтерпретувати, як деякі узагальнені числа заповнення i -го стану. Формулу (8.47) для обчислення енергії $\tilde{E}_{SM}$ можна подати у вигляді

$$\tilde{E}_{SM} = \sum_i \epsilon_i \tilde{n}_i + F, \quad (8.57)$$

де F дорівнює

$$F = \sum_i \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_i}{\gamma} \right) f_M\left(\frac{\epsilon - \epsilon_i}{\gamma}\right) d\epsilon = \sum_i \int_{-\infty}^{t_i} x f_M(x) dx \equiv F_M(\tilde{\lambda}, \gamma). \quad (8.58)$$

Користуючись (8.57), (8.58), умову наявності плато (8.53) можна переписати як

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_{SM}}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_i \epsilon_i \tilde{n}_i + \frac{1}{\gamma} F + \sum_i t_i f(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} = \\ &= \frac{1}{\gamma} F + \tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{A}_M(\tilde{\lambda}, \gamma) = \frac{1}{\gamma} F + \tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial \gamma} A = \frac{1}{\gamma} F. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Звідки знаходимо, що умова плато (8.53) еквівалентна рівності нулю функції (8.58) $F \equiv F_M$,

$$F_M(\tilde{\lambda}, \gamma) = 0. \quad (8.60)$$

Тобто плавний компонент енергії буде дорівнювати $\tilde{E}_{SM} = \sum_i \varepsilon_i \tilde{n}_i$ і вираз (8.41) для оболонкового доданка до енергії (з урахуванням (8.45)) набуває вигляду

$$\delta E_{shell} = E_{SM} - \tilde{E}_{SM} = \sum_i \varepsilon_i \delta n_i, \quad \delta n_i = n_i - \tilde{n}_i, \quad (8.61)$$

де n_i – числа заповнення незбуджених одночастинкових станів оболонкової моделі

$$n_i = \begin{cases} 1, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon_i > \varepsilon_F. \end{cases} \quad (8.62)$$

При обчисленнях оболонкових ефектів враховується різниця між нейтронами й протонами. Повний оболонковий додатак δE_{shell} є сумою внесків оболонкових компонентів нейтронів $\delta E_{shell}(N)$ і протонів $\delta E_{shell}(Z)$:

$$\delta E_{shell} = \delta E_{shell}(N) + \delta E_{shell}(Z). \quad (8.63)$$

Для обчислення оболонкового доданка до енергії в методі Струтинського необхідно виконати такі кроки:

1) обчислити одночастинковий спектр ε_i у потенціалі середнього поля і знайти енергію Фермі ε_F для даного ядра з $\bar{A} = \{N, Z\}$ нуклонами даного типу;

2) при фіксованому значенні $2M$ ступені корегувального полінома потрібно розв'язати систему нелінійних рівнянь (8.55), (8.60):

$$\begin{cases} \tilde{A}_M(\tilde{\lambda}, \gamma) \equiv \sum_i \int_{-\infty}^{(\tilde{\lambda}-\varepsilon_i)/\gamma} f_M(x) dx = \bar{A}, \\ F_M(\tilde{\lambda}, \gamma) \equiv \sum_i \int_{-\infty}^{(\tilde{\lambda}-\varepsilon_i)/\gamma} x f_M(x) dx = 0, \end{cases} \quad (8.64)$$

відносно хімічного потенціалу згладженого спектра $\tilde{\lambda}$ та інтервалу усереднення γ . Як початкові значення можна використовувати значення $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0 = \varepsilon_F$, та $\gamma = \gamma_0 = \Delta E$, де ΔE середня відстань між оболонками, яка дорівнює $\hbar\omega_0 \approx 41 \cdot A^{-1/3}$ для потенціалу гармонічного осцилятора і $\Delta E \sim 4 \div 6$ МеВ для потенціалу Вудса – Саксона. Зазначимо, що відповідно до методу (8.49) побудови корегувального полінома $p_M(x)$ система (8.64) може мати точний розв'язок лише у випадку, коли усереднений компонент густини (8.54) можна наблизити на інтервалі усереднення поліномом ступеня $2M$:

$$\tilde{g}_M(\varepsilon, \gamma) \equiv \sum_i \frac{1}{\gamma} f_M\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\gamma}\right) = \text{const} \cdot \varepsilon^{2M}. \quad (8.65)$$

Точність виконання такої умови до початку обчислень, як правило, не відома. Тому при обчисленнях перебирають різні значення M і знаходять таке $M = M^*$, для якого існує розв'язок системи (8.64). У практичних розрахунках $\tilde{\lambda}$, γ , M^* використовують метод послідовних наближень: задають деякі значення порядку M та інтервалу $\gamma_0 > \Delta E$; з умови фіксації кількості нуклонів знаходять хімічний потенціал $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0$; перевіряють умову плато; процедуру повторюють до виконання всіх рівнянь;

3) після знаходження величин $\tilde{\lambda}$, γ , M^* обчислюються відповідні узагальнені числа заповнення $\tilde{n}_i$ (8.56) і за формулою (8.61) оболонковий доданок $\delta E_{shell}(\bar{A})$ для даного типу нуклонів. Перевіряють коректність вибору інтервалу і додатково розраховують $\delta E_{shell}(\bar{A})$ при різних значеннях γ в околі величини, отриманої як розв'язок (8.64). З фізичних міркувань маємо, що при правильному значенні γ , оболонковий доданок не має бути малочутливим до ширини інтервалу усереднення γ .

Поведінку $\delta E_{shell}(N)$ залежно від параметрів γ і M у випадку сферичного й деформованого потенціалів гармонічного осцилятора показано на рис. 8.10, 8.11. Видно, що в потенціалах гармонічного осцилятора завжди можна знайти значення корегувального полінома M і проміжок інтервалів усереднення, для яких величина осцилюючого компонента енергії є сталою (тобто виконується умова плато (8.53)) і тому її можна інтерпретувати як оболонковий доданок до енергії.

Оболонковий доданок як функція кількості нуклонів має осцилюючий вигляд, з мінімальними значеннями при магічних числах нуклонів для даного потенціалу (рис. 8.12). Тобто метод Струтинського точно відтворює періодичні зміни енергії ядер, що відповідають магічним числам нуклонів.

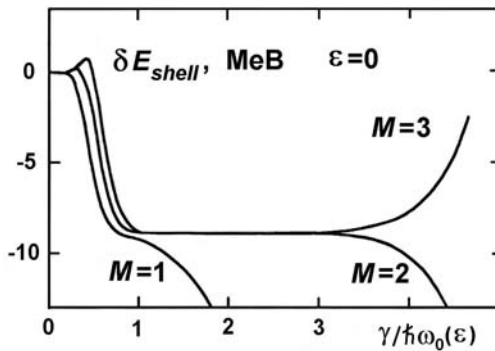


Рис. 8.10. Залежність осцилюючого компонента енергії від інтервалу усереднення й ступеня M корегувального полінома системи з $N = 70$ нейтронами у сферичному гармонічному осциляторі, $\hbar\omega_0 = 6$ МеВ

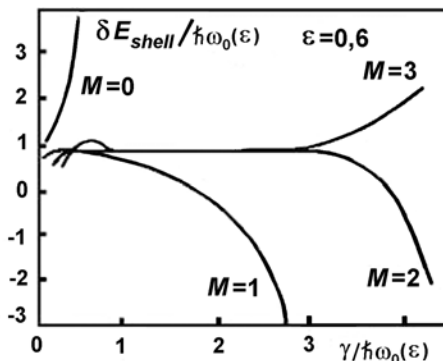


Рис. 8.11. Залежність осцилюючого компонента енергії від інтервалу усереднення й ступеня M корегувального полінома. Система з $N = 70$ нейтронами в деформованому гармонічному осциляторі з деформацією $\varepsilon = 0,6$

Метод Струтинського був також узагальнений для визначення оболонкових доданків у збуджених ядрах (V.S.Ramamurthy, S.S.Kapoor, S.K.Kataria (1970, 1972); A.S.Jensen, J.Damgaard (1973); В.М.Коломієць (1974)). Слід очікувати (п. 7.4), що зі зростанням енергії збудження спектр станів стає більш однорідним і вплив оболонкових ефектів зменшується. Розрахунки підтвердили зменшення оболонкового доданка зі зростанням температури T (енергії збудження ядра $U \simeq (A/8 + A/13) \cdot T^2$). Обчислення підтверджують майже зникнення δE_{shell} у середніх і важких ядрах при температурах $T \geq 2 \div 2,5$ MeV (рис. 8.13). Такі температури в ядрі з $A = 140$ відповідають досить великим значенням енергії збудження $U \sim 50 \div 100$ MeV.

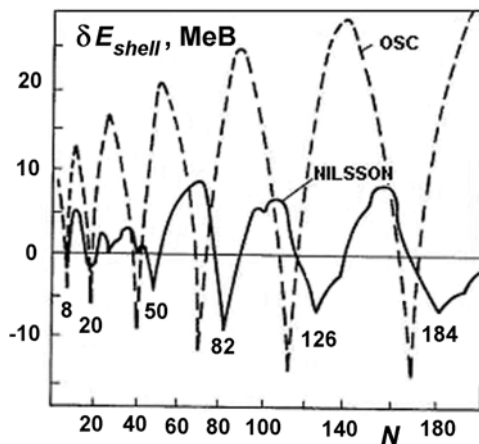


Рис. 8.12. Залежність оболонкового доданка від кількості нейтронів у потенціалах Нільссона й гармонічного осцилятора (п. 3.5)

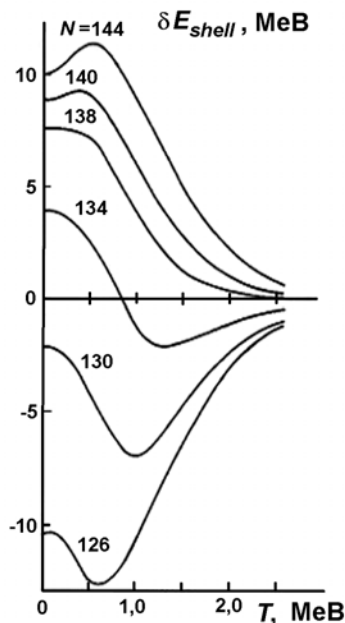


Рис. 8.13. Залежність оболонкового доданка від температури ядра
(Йенсен, Дамгаард, 1973)

Відмітимо, що важливу роль у ядрах відіграє внесок (P) до повної енергії від кореляційного спарювального потенціалу, який приводить до об'єднання нуклонів у пари (п. 1.4, 3.6). Значення внеску парних кореляцій P залежить від густини одночастинкових станів. Тому він складається з двох компонентів – плавного $\tilde{P}$ і осцилюючого δP , що обумовлений неоднорідною частиною одночастинкового спектра з густиною $\delta g = g - \tilde{g}$. Плавна частина враховується у вигляді деякого середнього компонента, як у формулі Вайзцекера (п. 1.4), а осцилюючу частину δP також обчислюють за методом Струтинського. Тому повний оболонковий доданок до енергії від неоднорідного одночастинкового спектра складається з внесків від варіацій суми одночастинкових енергій і парних кореляцій

$$\delta E_{shell} = \delta E_{osc} + \delta P. \quad (8.66)$$

Метод оболонкового доданка теоретично обґрунтували Г.Г.Бунатян, В.М.Коломієць та В.М.Струтинський (1972). Вони довели, що всі оболонкові ефекти в повній енергії можна врахувати, обчислюючи тільки варіацію суми одночастинкових енергій (одноквазічастинкових за врахування спарювання),

відносно її плавного значення. Це твердження отримало назву *енергетичної теореми Струтинського*. Така теорема виконується тому, що: по-перше, оболонкові неоднорідності формуються у відносно вузькій області одночастинкових станів в околі енергії Фермі, яка визначає границю заповнення одночастинкових станів; по-друге, доданок до δE_{shell} від врахування залишкової кореляційної взаємодії між квазічастинками виявився малим.

Спосіб обчислення повної енергії ядра E у вигляді суми її значення за моделлю краплини ядерної рідини E_{LDM} і оболонкового доданка δE_{shell}

$$E = E_{LDM} + \delta E_{shell}, \quad (8.67)$$

отримав назву *макроскопічно-мікроскопічного підходу*.

У методі Струтинського для знаходження оболонкового доданка використовуються феноменологічні середні ядерні потенціали, що описують експериментальний спектр одночастинкових станів біля енергії Фермі. Такі потенціали не самоузгоджені з густиною розподілу нуклонів (п. 3.4). Їх параметри визначаються з умови опису експериментального одночастинкового спектра біля енергії Фермі і не можуть точно відтворити спектр глибоких одночастинкових станів. Крім того, у моделях незалежних частинок нехтується залишковою взаємодією між нуклонами. Тому плавний компонент суми одночастинкових енергій, що обчислюються з використанням емпіричних середніх потенціалів, не збігається з експериментальним значенням, що феноменологічно описується краплинною моделлю ядра.

Мікроскопічні середні ядерні потенціали за відомої парної взаємодії між нуклонами можна обчислити за методом Хартрі – Фока (п. 3.4). Такі потенціали самоузгоджені з густиною розподілу нуклонів в ядрі. Тому можна сподіватися, що з їх допомогою можна точно розрахувати й спектр глибоких одночастинкових станів. М.Брак і Р.Квентін у 1975 р. уперше показали, що середнє значення суми одночастинкових енергій методу Хартрі – Фока з ефективними парними силами Скірма (п. 2.6) збігається з плавним компонентом повної енергії, що описується краплинною моделлю ядра. Тому такий метод, який зазвичай називають *методом Хартрі – Фока – Скірма* (або *Хартрі – Фока – Боголюбова – Скірма*, якщо враховуються парні кореляції) дає змогу обчислити повну енергію ядра без додаткового використання спеціального способу визначення оболонкового доданка. Порівняння розрахунку плавного компонента енергії методом Хартрі – Фока – Скірма з E_{LDM} демонструється на рис. 8.14, де наведено результати обчислень енергії деформації ядра $^{168}_{70}\text{Yb}$ залежно від значень власного квадрупольного моменту, який обрано за міру деформації ядра (оскільки його величина пропорційна деформації ядра (п.1.7)). Видно, що середня енер-

Метод оболонкового доданка Струтинського

гія за методом Хартрі – Фока – Скірма з великою точністю збігається зі значенням за краплинною моделлю.

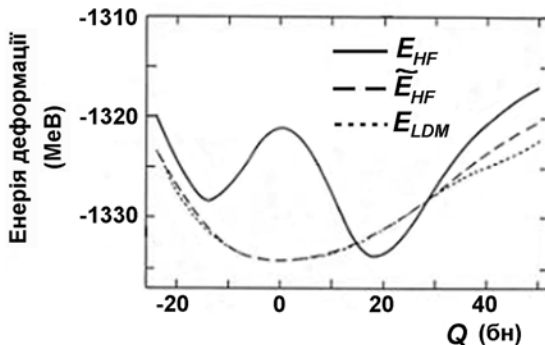


Рис. 8.14. Енергія деформації в методі Хартрі – Фока – Скірма.

Криві: суцільна – точне значення енергії Хартрі – Фока E_{HF} ; штрихова – середнє значення E_{HF} ; пунктир – енергія за моделлю рідкої краплини

Однак метод Хартрі – Фока – Скірма не можна вважати більш загальним, ніж макроскопічно-мікроскопічний підхід, тому що останній базується на меншій кількості припущень про фізичні процеси, що відбуваються в ядрі. А саме, у методі Хартрі – Фока з ефективною взаємодією вважається, що повну хвильову функцію ядра завжди можна подати у вигляді антисиметризованого добутку одночастинкових хвильових функцій, а параметри ефективної парної взаємодії можна вибрати такими, що залишковою взаємодією можна знехтувати. Макроскопічно-мікроскопічний підхід таких припущень не використовує. Разом з цим, у методі Хартрі – Фока середній потенціал повністю самоузгоджений з густиною і це дає змогу точніше обчислити оболонковий доданок δE_{shell} . Оболонкові доданки, які обчислені різними методами для ядра $^{168}_{70}\text{Yb}$ порівнюються на рис. 8.15.

Метод Струтинського виявився дуже успішним для знаходження внеску оболонкових ефектів у маси та енергії деформації ядер. Він уперше дав змогу кількісно описати бар'єри поділу ядер E_f . Як відмічалось раніш, до значень E_f дуже чутливі періоди напіврозпаду $T_{1/2}$ за каналом спонтанного поділу (величини $T_{1/2}$ визначаються процесом тунелювання й експоненціально залежать від висоти бар'єра). Важливим результатом теорії було встановлення того факту, що оболонкові ефекти зовсім не обов'язково пов'язані з сферичністю ядер, а також мають місце в сильно деформованих ядрах. Наприклад, для ядер з області актиноїдів ($N \sim 144 \div 148$) теоретично знайдено, що ядерний

потенціал має два горби (рис. 8.16). У моделі ж рідкої краплини цей потенціал має одnogорбу форму.

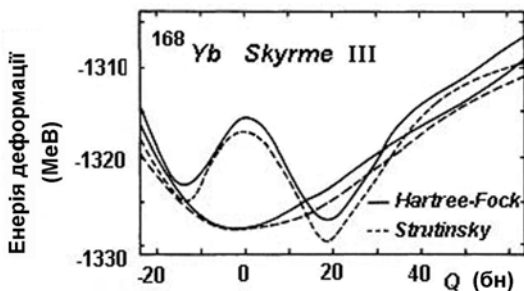


Рис. 8.15. Енергія деформації в методах Хартрі – Фока – Скірма та Струтинського. Криві: осцилюючі – повні енергії; плавні – їхні середні значення

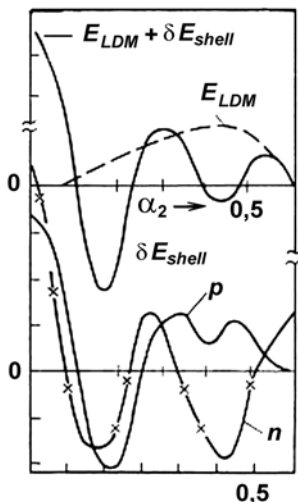


Рис. 8.16. Бар'єр поділу і оболонкові додатки нейтронів і протонів в ядрі $^{242}_{94}\text{Pu}$ залежно від деформації

Важке ядро з двогорбим бар'єром у процесі поділу може потрапити в другу потенціальну яму, що відповідає другому мінімуму енергії деформації, затриматися на деякий час у такому ізомерному сильно деформованому проміжному стані (з часом життя від 10^{-17} до 10^{-3} с) і потім поділитися. Користуючись такими уявленнями вдалося пояснити процес ізомерного поділу, відкритий під керівництвом С.М.Поліканова в 1963 р. у Дубні. Це явище отримало назву *ізомерії форми атомних ядер*.

Потенціальна енергія деяких ядер може мати ще одну яму (або й більше), що розташована поблизу середини другого горба, і тому мати три максимуми.

8.3. Вимушений поділ ядер

Третя яма відповідає втраті симетрії ядром, яке перестає бути еліпсоїдом обертання й має грушоподібну форму. Ядро з такою формою ділиться асиметрично на два уламки різної маси. Саме врахування оболонкових ефектів дало змогу описати бар'єри асиметричного поділу ядер.

Сучасні досягнення (п. 3.5, 5.1) в області синтезу трансфермієвих елементів і дослідження надобертових ядер з великими значеннями спінів (п. 3.10) також базуються на методі оболонкового доданка Струтинського та його узагальненнях. Так А.Собічевські, Ф.А.Гарєєв, Б.Н.Калінкін (1966) методом Струтинського вперше показали, що амплітуда оболонкового доданка максимальна для ядра з $Z = 114$ (а не 126, як у випадку нейтронів) і $N = 184$, що стимулювало пошук і знаходження в околі цього ядра "острову стабільності" надважких ядер. Застосування й розвиток методу Струтинського в задачах з обертання ядер започаткували В.В.Пашкевич, С.Фрауендорф, К.Неергорд (1974, 1975) та Р.Бенгстон, С.Ларссон, Дж.Линдер, П.Меллер, С.Нільссон, С.Оберг, З.Шиманські (1975). Ці дослідження продемонстрували можливість значного впливу оболонкових ефектів на енергії супердеформованих ядер (із співвідношенням напівосей еліпсоїда ≈ 2), що мають великі обертальні моменти. Вони, зокрема, показали можливість значного пониження повної енергії таких ядер через δE_{shell} і тим самим збільшення їхнього часу життя порівняно зі станами з меншим спіном. Теоретичні дослідження були підтверджені відкриттям супердеформованих ротаційних станів в ядрі $^{152}_{66}Dy$ (П.Твін та ін., 1986).

Таким чином, усі сучасні досягнення ядерної фізики демонструють необхідність врахування оболонкових ефектів при будь-яких спробах кількісного аналізу властивостей середніх і важких ядер.

8.3. Вимушений поділ ядер

При кожному акті спонтанного поділу виділяється значна енергія (≈ 200 MeV для $A \approx 240$), але цей процес надзвичайно рідкісний. Він має випадковий неконтрольований характер і тому не може використовуватися як джерело енергії. З практичної точки зору незрівнянно більший інтерес викликає вимушений поділ важких ядер під дією нейтронів, тобто реакція (n, f) . Її інтенсивність залежить від характеристик ядер, що діляться, та від енергії нейтронів E_n . Зазвичай використовується така класифікація енергій нейтронів:

0,025 ÷ 0,5 eV – теплові;

0,5 eV ÷ 1 keV – резонансні (або надтеплові);

1 keV ÷ 0,5 MeV – проміжні;

0,5 ÷ 50 MeV – швидкі.

Нейтрони з енергіями меншими за 1 keV також називають *повільними*, а з енергіями більшими за енергію швидких нейтронів – *надшвидкими*, або *релятивістськими*. При енергіях менших від 0,025 eV розрізняють холодні нейт-

рони та ультрахолодні ($E_n < 10^{-6}$ eV). Останні мають цікаві властивості: оскільки довжина хвилі нейтронів з $E_n \leq 10^{-7}$ eV дуже велика, то вони зазнають повного зовнішнього віддзеркалення від межі вакуум–середовище при всіх кутах падіння (Я.Б.Зельдович, 1956), і можуть накопичуватися в замкнених порожнинах макроскопічних розмірів.

Енергія 0,025 eV у класифікації нейтронів виділена тим, що вона збігається з тепловою енергією kT при кімнатній температурі $\approx 17^\circ\text{C} \approx 300^\circ\text{K}$ ($k = 0,8617 \cdot 10^{-4}$ eV/K; $0^\circ\text{C} = 273,15^\circ\text{K}$). Теплові нейтрони перебувають у термодинамічній рівновазі з навколишнім середовищем; їх розподіл за швидкостями (як і в випадку ідеального газу) описується розподілом Максвелла. *Резонансними нейтронами* називаються тому, що в енергетичній області, яка їм відповідає, повний переріз реакцій з нейтронами має резонансний вигляд. Значення $E_n = 0,5$ eV вибрано як максимальну граничну енергію повільних нейтронів через те, що воно є граничною енергією поглинання нейтронів кадмієм: ядра кадмію внаслідок реакції (n, γ) поглинають майже всі нейтрони з енергіями меншими за 0,5 eV, але є практично прозорими для нейтронів з більшими енергіями. Цей ефект дуже широко використовується в нейтронній спектроскопії.

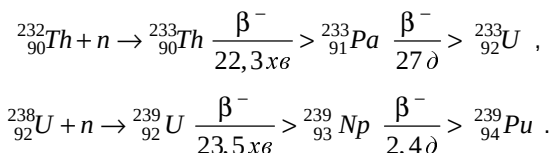
Поглинання повільного нейтрона важким ядром призводить до його збудження в середньому на енергію ~ 7 MeV, яка відповідає середньому значенню енергії відриву нейтрона від утвореної системи ядро + нейтрон. Для важких ядер ця енергія може перевищувати висоту бар'єра поділу й тому збуджене ядро буде ділитися. Енергію збудження $E_{\text{пор}}$, при якій спостерігається вимушений поділ називається *критичною*, або *граничною енергією поділу*. Енергію $E_{\text{пор}}$ також називають *порогом поділу*, тому що вона відповідає порогу реакції поділу під дією гамма-квантів, тобто порогу фотоподілу (γ, f) , не збудженого утвореного ядра. Значення $E_{\text{пор}}$ збігається з висотою бар'єра поділу E_f утвореного ядра, а саме з його енергією деформації в сідловій точці (остання величина також називається *енергією активації*).

Проаналізуємо можливість вимушеного поділу під дією повільних нейтронів двох основних ізотопів природного урану: ${}^{235}_{92}\text{U}$ (поширеність 0,72 %); ${}^{238}_{92}\text{U}$ (99,27 %). При поглинанні нейтрона ядром ${}^{235}_{92}\text{U}$ утворюється ядро ${}^{236}_{92}\text{U}$ ($n + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}$) з енергією збудження $\approx 6,8$ MeV. Енергія порогу поділу утвореного ядра ${}^{236}_{92}\text{U}$ дорівнює $E_{\text{пор}} \approx 6,5$ MeV і менша від його енергії збудження; тому воно буде миттєво ділитися. У випадку захоплення нейтрона ізотопом ${}^{238}_{92}\text{U}$ утворюється ядро ${}^{239}_{92}\text{U}$ з енергією збудження $\approx 5,5$ MeV мен-

8.3. Вимушений поділ ядер

шою від його енергії порогу поділу $E_{nop} \approx 7,5$ МеВ; тому ймовірність поділу цього ізоотопу урану дуже мала.

Окрім $^{235}_{92}\text{U}$ при взаємодії з тепловими нейтронами миттєво діляться ядра $^{233}_{92}\text{U}$ і $^{239}_{94}\text{Pu}$, а також деякі трансуранові елементи. За винятком $^{235}_{92}\text{U}$ ізоотопи, які миттєво діляться, не зустрічаються в природних умовах. Їх отримують штучним шляхом у ланцюгах перетворень, які, наприклад, для $^{233}_{92}\text{U}$ і $^{239}_{94}\text{Pu}$ мають вигляд



Торій і $^{238}_{92}\text{U}$, що використовують для отримання ізоотопів, які діляться миттєво, називають *ядерною сировиною*. Ізоотопи $^{235}_{92}\text{U}$, $^{233}_{92}\text{U}$ і $^{239}_{94}\text{Pu}$ нестабільні і мають такі характеристики

$$^{235}_{92}\text{U} (T_{1/2}(\alpha) \approx 7,0 \cdot 10^8 \text{ p}; T_{1/2}(sf) \approx 1,9 \cdot 10^{17} \text{ p}; 0,72\%),$$

$$^{233}_{92}\text{U} (T_{1/2}(\alpha) \approx 1,6 \cdot 10^5 \text{ p}; 0,0\%),$$

$$^{239}_{94}\text{Pu} (T_{1/2}(\alpha) \approx 2,4 \cdot 10^4 \text{ p}; T_{1/2}(sf) \approx 5,5 \cdot 10^{15} \text{ p}; 0,0\%),$$
(8.68)

де в дужках вказано періоди напіврозпаду ядер за каналами альфа-розпаду і спонтанного поділу (у роках), а також їх поширеність у природних умовах.

При взаємодії з повільними нейтронами ці ядра мають великі ефективні перерізи поділу. На рис. 8.17 показано залежність перерізів їх поділу від енергії теплових нейтронів.

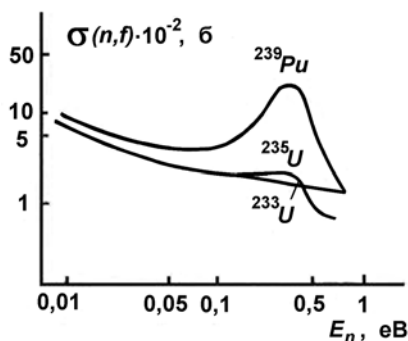


Рис. 8.17. Перерізи поділу ядер $^{233}_{92}\text{U}$, $^{235}_{92}\text{U}$ і $^{239}_{94}\text{Pu}$ під дією повільних нейтронів

З рисунка видно, що при енергіях нейтронів порядку 0,01 еВ перерізи поділу можуть сягати дуже великих значень (≈ 1000 барн). Ядра цих елементів діляться й під дією швидких нейтронів, але величина відповідних перерізів мала й не перевищує 2 барн для енергій вище 1 МеВ (рис. 8.18).

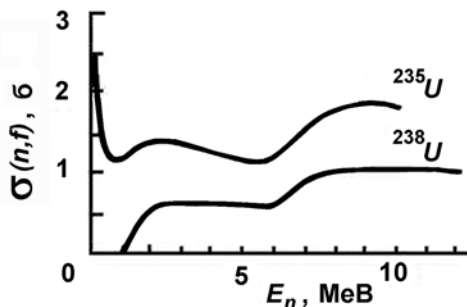


Рис. 8.18. Перерізи поділу ізоотопів урану ^{235}U , ^{238}U під дією швидких нейтронів

Відносна кількість нейтронів у важких ядрах біля лінії стабільності помітно більше, ніж у середніх ядрах (рис. 8.19; п. 1.4). Тому первинні уламки поділу сильно перевантажені нейтронами і через це в процесі поділу ядра вилітають вторинні нейтрони. Їх кількість зростає з енергією збудження й зарядом первинного ядра поділу. Наприклад, при вимушеному поділі ізоотопів $^{235}_{92}\text{U}$, $^{233}_{92}\text{U}$ і $^{239}_{94}\text{Pu}$ тепловими нейтронами в середньому вилітає від двох до трьох нейтронів. Середню кількість вторинних нейтронів, що вилітають в одному акті поділу, також називають *множинністю нейтронів* (neutron multiplicity) і позначають літерою $\bar{\nu}$. Значення $\bar{\nu}$ для різних ядер поділу приведено на рис. 8.20 і в табл. 8.1 (п. 8.4).

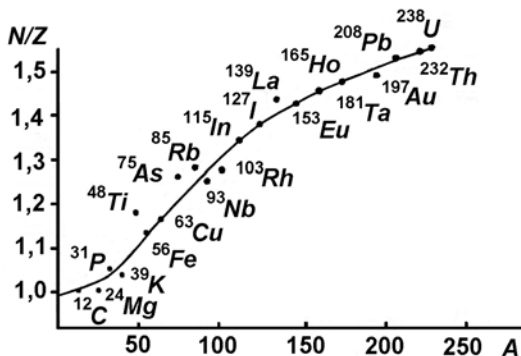


Рис. 8.19. Відносна кількість нейтронів в ядрах на лінії бета-стабільності

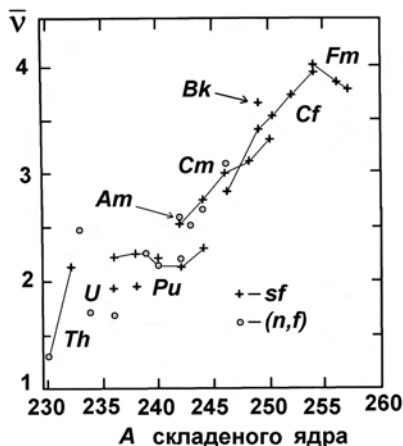


Рис. 8.20. Середня кількість вторинних нейтронів

При поділі розрізняють нейтрони, що вилітають у момент поділу, так звані миттєві нейтрони (які вилітають протягом часу $\sim 10^{-21} \div 4 \cdot 10^{-14}$ с), та запізнілі нейтрони, що випромінюються уламками поділу після бета-розпаду. Виліт запізнілих нейтронів досить сильно затриманий у порівнянні з миттєвими нейтронами в середньому на час $0,08 \pm 60$ с. Миттєві нейтрони становлять більш ніж 99 % вторинних нейтронів. Оскільки кулонівське відштовхування в ядрі біля сідлової точки приводить до сильного виштовхування протонів з області шийки, а тому до значного збагачення цієї області нейтронами, то можна очікувати, що досить велика частина миттєвих нейтронів вилітає з областей ядер-уламків, що були розташовані біля шийки ядра.

Незважаючи на виліт миттєвих нейтронів первинні уламки мають надлишок нейтронів у порівнянні з ядрами на лінії бета-стабільності й тому зазнають β^- -розпаду (або з вильотом електронів і електронних антинейтрино, або з поглинанням електронів). Деякі із вторинних уламків, що утворюються після β^- -розпаду, мають енергію збудження, що перевищує енергію відриву нейтрона, і тому розпадаються не тільки з вильотом гамма-квантів, але й запізнілих нейтронів. Такі нейтрони становлять менше ніж 1 % загальної кількості вторинних нейтронів. Час появи запізнілих нейтронів обумовлений періодом напіврозпаду уламків-попередників ядер, з яких вони вилітають. За цією ознакою запізнілі нейтрони розбиваються на групи. Наприклад, при вимушеному поділі $^{235}_{92}\text{U}$ спостерігається 6 груп запізнілих нейтронів з середніми інтервалами затримки в часі (середніми періодами напіврозпаду) $0,2 \div 55,7$ с. Кожна з груп має фіксовану кінетичну енергію, яка не перевищує 0,62 МеВ. Середні періоди напіврозпаду груп запізнілих нейтронів для ізотопів, які діляться тепловими нейт-

ронами, майже однакові, але змінюється процентний склад їхнього виходу з різними енергіями.

Енергетичний спектр миттєвих нейтронів є неперервним з максимумом близько 1 MeV. Більшість з них вилітає з енергією в інтервалі до 2 MeV, але вилітають і нейтрони з енергією до 20 MeV. Середня енергія миттєвих нейтронів близька до 2 MeV. Загальний вигляд енергетичного спектра нейтронів поділу ядер (8.68) показано на рис. 8.21:

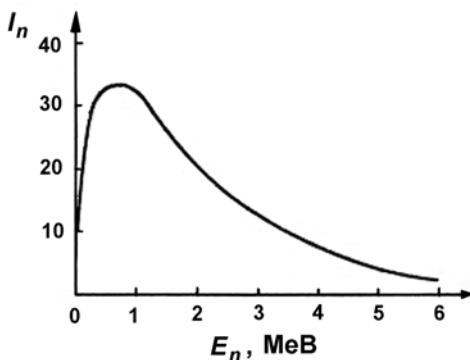


Рис. 8.21. Енергетичний спектр вторинних нейтронів реакції поділу

У середньому при кожному акті поділу важкого ядра виділяється енергія ≈ 200 MeV. Наприклад, при вимушеному поділі ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ під дією теплових нейтронів ця енергія дорівнює $202,8 \pm 0,6$ MeV. Вона розподіляється між різними частинками приблизно таким чином:

- кінетична енергія уламків поділу – 166 MeV;
- кінетична енергія нейтронів – 5 MeV;
- миттєве γ -випромінювання поділу – 8 MeV;
- β - та γ -випромінювання уламків поділу – 14 MeV;
- енергія, яку вносить антинейтрино – 10 MeV.

Більша частина енергії поділу вивільняється майже миттєво, $3/4$ цієї енергії несуть уламки, які повністю зупиняються, пройшовши в урані лише декілька мікронів. Таким чином, їх кінетична енергія поглинається практично на місці і перетворюється в тепло. Розподіл енергії поділу інших ядер, що діляться, подібний.

Вимушений поділ ядер може відбуватися під дією не тільки нейтронів, але й довільних частинок (фотонів, протонів тощо), які збуджують ядро до енергій, що перевищують їхні бар'єри поділу. Після створення прискорювачів важких іонів з пучками великою інтенсивності, значна увага приділяється дослідженню поділу ядер під дією важких іонів, тобто реакції (HI, f) . Такі реакції приводять, як правило, до утворення складених систем з високими енергіями збудження

Принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах

($> 50 \text{ MeV}$) і великими кутовими моментами ($I \sim < 100$). У порівнянні з низькоенергетичним поділом вплив оболонкових ефектів у цьому випадку зазвичай незначний і тому можна дослідити еволюцію у часі плавної частини потенціальної енергії деформації ядер, її стабільність відносно деформацій різного типу, залежність від кутового моменту. Зокрема, експериментальні дані з множинності нейтронів, що виплівають в реакціях (HI, f) , вказують на те, що процес такого поділу відбувається значно повільніше, ніж це передбачається рівноважними статистичними моделями (див., Дж.О.Ньютон, 1990). Тому для його опису необхідно застосовувати динамічні теорії процесу поділу з врахуванням релаксації колективних ступенів свободи, що характеризують поділ (Г.Д.Агєєв, І.І.Гончар, В.В.Пашкевич, Н.І.Пісчасов, О.І.Сердюк (1980); П.Фрьобліх, І.І.Гончар (1998)).

8.4. Ланцюгова ядерна реакція поділу.**Принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах**

Виліт додаткових нейтронів у процесі миттєвого поділу ядер, які, у свою чергу, також здатні викликати поділ, робить принципово можливим здійснення ланцюгової ядерної реакції поділу (n, f) з саморозвитком у середовищі з ядрами, що діляться. Нехай таке середовище (яке називають *середовищем з ядерним паливом*) містить $^{235}_{92}\text{U}$ і в ньому за деяких причин поділилося одне ядро. Згідно з рис. 8.20 і табл. 8.1 після такого поділу утворюється від двох до трьох додаткових нейтронів. Припустимо, що в середньому два нейтрони з трьох можуть викликати нову реакцію (n, f) . Останнє знову призведе до поділу двох нових ядер урану та вильоту 4 нейтронів, що можуть викликати поділ тощо. Тобто починається лавиноподібний процес поділу з саморозвитком, який і називається *ланцюговою ядерною реакцією*. Після зміни N поколінь нейтронів у середовищі, що складається тільки з ядерного палива, з'явиться 2^N нейтронів, які можуть поділити ядра. Таку ідеалізовану картину ланцюгової реакції поділу зображено на рис. 8.22.

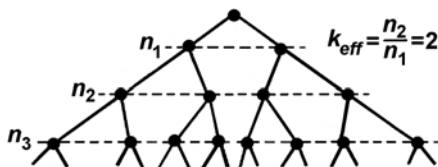


Рис. 8.22. Схема розмноження нейтронів у ланцюговій реакції поділу

У середовищі з чистим ядерним паливом через ланцюгову ядерну реакцію майже миттєво виділяється дуже велика енергія. Наприклад, оцінимо енергію, яка виділяється при поділі 2 г чистого урану $^{235}_{92}\text{U}$, і середній час, що на це витрачається.

Два грами урану вміщують $2,0 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} / 235 \approx 5,2 \cdot 10^{21}$ його ядер. При розщепленні такої кількості урану виділиться енергія, що дорівнює $200 \cdot 5,2 \cdot 10^{21} \text{ MeV} \approx 10^{24} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \approx 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Дж}$, тобто майже 44 МВт/год. Кількість нейтронів, яка утворюється в ідеалізованій ланцюговій реакції (рис. 8.22) після зміни N поколінь: $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^N = 2^{N+1} - 1 \approx 2^{N+1}$. Тому $5,2 \cdot 10^{21}$ ядер урану поділяться після зміни $N = (21 - \log 5,2) / \log 2 - 1 \approx 71$ поколінь ($5,2 \cdot 10^{21} \approx 2^{71+1}$). Час життя одного покоління становить приблизно $10^{-7} \div 10^{-8} \text{ с}$, так що виділення енергії, яка відповідає розщепленню 2 г урану ($\sim 10^{11} \text{ Дж}$) займе час $\sim 10^{-5} \div 10^{-6} \text{ с}$, тобто буде миттєвим. У такій ситуації, ланцюгова реакція поділу завершиться вибухом колосальної потужності, що й реалізується в атомній бомбі. Для використання ланцюгової реакції поділу з метою отримання енергії необхідно її сповільнити.

Таблиця 8.1

Середня кількість випромінених нейтронів $\bar{\nu}$
та середня кількість нейтронів η , які здатні ділити ядро

Ядро	${}^{233}_{92}\text{U}$	${}^{235}_{92}\text{U}$	${}^{239}_{94}\text{Pu}$
Теплові нейтрони ($E_n = 0,025 \text{ eV}$)	$\bar{\nu} = 2,52$	$\bar{\nu} = 2,47$	$\bar{\nu} = 2,91$
	$\eta = 2,28$	$\eta = 2,07$	$\eta = 2,09$
Швидкі нейтрони ($E = 1 \text{ MeV}$)	$\bar{\nu} = 2,7$	$\bar{\nu} = 2,65$	$\bar{\nu} = 3,0$
	$\eta = 2,45$	$\eta = 2,3$	$\eta = 2,7$

Зазначимо, що на практиці здійснити ланцюгову реакцію досить важко. По-перше, на ядрах, що діляться, одночасно відбуваються й інші реакції, які приводять до зменшення кількості актів поділу; по-друге, ймовірність вимушеного поділу залежить від енергії нейтронів, а вторинні нейтрони вилітають з різними енергіями. Крім того, розмноження нейтронів в окремих актах поділу в середовищі, що складається тільки з ядерного палива, не рівнозначно їх розмноженню в реальному фізичному середовищі. У реальній системі є багато факторів, які викликають додаткові втрати нейтронів поділу й вихід їх з лавини. Зокрема, через скінченні розміри системи і досить велику проникливу здатність нейтронів багато з них вилітає за межі середовища раніше, ніж вони захоплюються ядром поділу. Реальне середовище не є моноізотопним, а містить домішки ядер, що поглинають нейтрони без поділу. Наприклад, у природному урані міститься 99,3% урану 238. Цей ізотоп поглинає теплові нейтрони без процесу поділу і тому використовують ядерне паливо збагачене ізотопами ${}^{233}_{92}\text{U}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$, ${}^{239}_{94}\text{Pu}$.

Пристрій, який дозволяє використовувати ядерну енергію, що звільнюється при поділі, називається *ядерним реактором*, а енергія – *атомною енергією*. Перший ядерний реактор був побудований у США в 1942 р. під керівництвом

Принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах

Е.Фермі. Перший в Європі ядерний реактор введено в дію в СРСР у 1946 р. під керівництвом І.В.Курчатова.

Очевидно, що для отримання максимальної енергії внаслідок поділу, по-перше, необхідно щоб якомога більша кількість нейтронів брала участь у поділі, тобто потрібно звести до мінімуму кількість нейтронів, що зникають через присутність інших реакцій. Наприклад, у випадку середовища, що складається з ізоотопу $^{235}_{92}\text{U}$, в області повільних нейтронів основною конкуруючою реакцією до поділу (n, f) є радіаційне поглинання (n, γ) . Тому для $^{235}_{92}\text{U}$ умова вибування нейтронів з процесу поділу характеризується відношенням відповідних перерізів, а саме функцією:

$$\alpha = \frac{\sigma(n, \gamma)}{\sigma(n, f)}. \quad (8.69)$$

Чим менше значення α , тим більша частина ядерного палива ділиться. Величина α істотно залежить від енергії нейтронів.

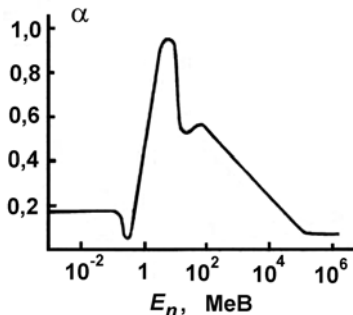


Рис. 8.23. Залежність параметра α від енергії первинних нейтронів

З рис. 8.23 видно, що для збільшення ймовірності поділу $^{235}_{92}\text{U}$ потрібно обминати область енергій нейтронів від ~ 5 eV до ~ 10 keV, де вибування нейтронів з каналу поділу через їх радіаційне поглинання є значним. Очевидно, що відносна ймовірність того, що взаємодія нейтрона з ядром призводить до поділу, дорівнює відношенню P_α перерізу поділу $\sigma(n, f)$ до перерізу повного поглинання нейтронів $\sigma_{abs}(n) = \sigma(n, f) + \sigma(n, \gamma)$,

$$P_\alpha = \frac{\sigma(n, f)}{\sigma_{abs}(n)} = \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (8.70)$$

Тому середня кількість η нейтронів, що виникає після поглинання ядром одного нейтрона, є

$$\eta = \bar{\nu} \cdot P_\alpha, \quad (8.71)$$

де $\bar{v}$ визначає, як і раніше, середню кількість вторинних нейтронів, що вилітають з ядра при його поділі. Ланцюгова реакція може відбуватися лише за $\eta > 1$. Швидкість лавиноподібного процесу зростає зі збільшенням значення η . Величини η і $\bar{v}$ для моноізоотопних середовищ, які складаються з важливіших ізоотопів, що діляться, подано в табл. 8.1. Видно, що у випадку ${}^{235}_{92}\text{U}$ значення η можуть бути достатньо великими в області теплових нейтронів та швидких нейтронів з енергією приблизно рівною 1 МеВ. При поділі ядер ${}^{235}_{92}\text{U}$ швидкими нейтронами вилітає навіть більша кількість нейтронів, ніж при поділі тепловими, але їх переріз поділу значно менший, ніж у випадку теплових нейтронів (див. рис. 8.17).

У середовищі, яке складається з суміші ядер різних ізоотопів урану й різних елементів, відносна частка P_α нейтронів, що призводять до поділу, визначається макроскопічними перерізами $\Sigma_{M,j}(i)$ реакцій різного типу при взаємодії нейтронів з різними ядрами. Наприклад, макроскопічний переріз реакції (n, j) на ядрі i -го типу дорівнює

$$\Sigma_{M,j}(i) \equiv \sigma_i(n, j) \cdot N_i, \quad (8.72)$$

де N_i – кількість ядер даного типу в 1 см^3 , яка пропорційна вазі даного елемента в суміші. Величина P_α , що визначає частку нейтронів, які призводять до ділення ядер-поділу (f), має такий вигляд:

$$P_\alpha = \frac{\Sigma_{M,f}(f)}{\Sigma_{M,abs}} = \frac{\sigma_f(n, f) \cdot N_f}{\sigma_f(n, f) \cdot N_f + \sum'_{i,j} \sigma_i(n, j) \cdot N_i}, \quad (8.73)$$

де $\Sigma_{M,abs} = \sum_{i,j} \Sigma_{M,i}(j)$ – повний макроскопічний переріз поглинання нейтрона середовищем; підсумовування в знаменнику формули (8.73) не включає тільки каналу ділення ядра-поділу f . Співвідношення (8.73) описує вплив домішки елементів і реакцій різного типу на відносну кількість нейтронів, що призводять до поділу.

Середня енергія вторинних нейтронів з поділу ізоотопів урану й плутонію (8.68) приблизно дорівнює $E_n = 0,7 \text{ МеВ}$ (див. рис. 8.21) і розташована в області резонансних нейтронів. Згідно з рис. 8.17 переріз поділу $\sigma(n, f)$ резонансними нейтронами, який визначає ймовірність виникнення вторинних нейтронів через поділ, значно менший, ніж тепловими й тому виявляється, що для здійснення реакції, яка б самопідтримувалася, необхідно сповільнити нейтрони до теплових енергій ($< 0,5 \text{ еВ}$), де переріз $\sigma(n, f)$ досить великий. Цю функцію в реакторах виконують сповільнювачі нейтронів. Речовина, що використовується як сповільнювач повинна мати дуже малий переріз поглинання нейтронів і одночасно бути такою, щоб при зіткненні з нею нейтрон міг передати їй значну частину кінетичної енергії. Можна показати, що нейтрон з кінетичною енергією E_n при лобовому зіткненні з нерухомим ядром з масовим числом A втрачає енергію

$$\Delta E_n = \frac{4A}{(A+1)^2} E_n. \quad (8.74)$$

Звідси бачимо, що сповільнювач з меншою масою краще сповільнює нейтрони, ніж з більшою. Одним із найкращих сповільнювачів є важка вода D_2O . У цьому випадку нейтрони сповільнюються переважно дейтронами, які їх слабо поглинають. Добрими сповільнювачами є вуглець (у вигляді графіту) і берилій. Не зважаючи на досить сильне поглинання нейтронів воднем, звичайна вода H_2O також використовується як сповільнювач. Реактори із сповільнювачем поділяються на гомогенні та гетерогенні. У гомогенному реакторі ядерне паливо і сповільнювач складають однорідну суміш (розчин або суспензію). У гетерогенному реакторі ядерне паливо в активній зоні, де відбувається поділ, розташовується дискретно у вигляді вертикальних стрижнів, що називаються *тепловиділяючими елементами (ТВЕЛами)*. Зазвичай ТВЕЛи утворюють правильну ґратку, а між ними міститься сповільнювач.

Як це було продемонстровано у випадку ідеалізованої ланцюгової реакції в моноізотопному ядерному паливі (рис. 8.22), виділення ядерної енергії залежить від відношення кількості нейтронів в одному поколінні (n_{i+1}) до кількості нейтронів (n_i) у попередньому. Таке відношення кількості нейтронів, що взяти на одній стадії їхньої еволюції в часі, називається *ефективним коефіцієнтом розмноження нейтронів* k_{eff} ,

$$k_{eff} = \frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{n_2}{n_1}, \quad i \geq 1. \quad (8.75)$$

В ідеалізованій ситуації, що зображено на рис. 8.22, значення $k_{eff} = 2$. Якщо в першому поколінні було n_1 нейтронів, то в N -му їх буде

$$n_N = n_{N-1} \cdot k_{eff} = n_1 \cdot k_{eff}^{N-1} = n_0 \cdot k_{eff}^N, \quad (8.76)$$

де n_0 – початкова кількість нейтронів.

Формули (8.75) і (8.76) дозволяють знайти еволюцію потоків нейтронів з часом. Дійсно, нехай середній час життя одного покоління дорівнює τ , тоді кількість поколінь у момент часу $t \in N = t/\tau$ і згідно з (8.76) маємо для кількості нейтронів у момент часу t :

$$n(t) \equiv n_N = n_0 \cdot k_{eff}^{t/\tau}. \quad (8.77)$$

З визначення (8.75) ефективного коефіцієнта розмноження знаходимо

$$k_{eff} = n(\tau) / n_0 \equiv 1 + \frac{n'_0}{n_0} \cdot \tau. \quad (8.78)$$

де n'_0 – швидкість зміни потоку нейтронів. Користуючись визначенням показ-

никової функції $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = e^z$, із співвідношень (8.77), (8.78) отримуємо:

$$n(t) = n_0 \cdot \left(1 + \frac{n'_0}{n_0} \cdot \tau \right)^{t/\tau} \stackrel{\frac{n'_0}{n_0} \cdot \tau \ll 1}{=} n_0 \cdot \exp \left(\frac{n'_0}{n_0} \cdot t \right),$$

або (згідно з (8.78)) $n'_0 / n_0 = (k_{\text{eff}} - 1) / \tau$)

$$n(t) = n_0 \cdot \exp \left(\frac{k_{\text{eff}} - 1}{\tau} \cdot t \right) \equiv n_0 \cdot \exp(t/T), \quad T = \tau / (k_{\text{eff}} - 1). \quad (8.79)$$

Параметр T у цій формулі називається *періодом реактора* і, очевидно, визначає час за який кількість нейтронів поділу зміниться в $e = 2,718 \dots$ разів. Відмітимо, що формулу (8.79) можна отримати з умови сталої швидкості розвитку ланцюгової реакції, тобто як розв'язок рівняння: $dn(t)/dt = n_N - n_{N-1} = n(t) \cdot (k_{\text{eff}} - 1) / \tau$.

Із співвідношення (8.79) видно, що при $k_{\text{eff}} = 1$ реакція відбувається в стаціонарному режимі (робочий режим реактора), з $k_{\text{eff}} > 1$ інтенсивність реакції наростає (режим розігріву реактора або вибух бомби), а з $k_{\text{eff}} < 1$ реакція загасає (режим виключення реактора або взагалі відсутність реакції). Система з $k_{\text{eff}} = 1$ називається *критичною*, при $k_{\text{eff}} > 1$ – *надкритичною*, $k_{\text{eff}} < 1$ – *підкритичною*.

Коефіцієнт k_{eff} розмноження нейтронів фізичною системою зазвичай подають у вигляді

$$k_{\text{eff}} = k_{\infty} \cdot \chi, \quad (8.80)$$

де k_{∞} – коефіцієнт, який визначає швидкість наростання реакції в нескінченному середовищі. Співмножник χ – ймовірність того, що нейтрон не вийде з активної зони розміщення ядерного палива. Ця величина завжди менше одиниці. Вона залежить від розмірів системи, геометрії розміщення ядерного палива й сповільнювачів, та якості відбивачів, які оточують зону реакції.

Розмір і масу активної зони, а також ймовірність $\chi = \chi_{\text{кр}}$, що визначає ситуацію, коли система стає критичною, тобто коли стає можливою ланцюгова реакція із самопідтримкою ($k_{\text{eff}} = 1$), називають *критичними*;

$$\chi_{\text{кр}} = 1 / k_{\infty}. \quad (8.81)$$

За малих розмірів активної зони з ядерним поливом втрати нейтронів через їх виліт за поверхню великі. Зі збільшенням розмірів відношення поверхні до об'єму в середньому зменшується, а втрати нейтронів зменшуються. Для зменшення таких втрат (тобто збільшення χ) активну зону з ядерним паливом створюють у сферичному вигляді або близькому до сферичного (наприклад, у вигляді куба або циліндра з висотою порядку його діаметра), тому що для тіл такої форми відношення площі поверхні до об'єму є мінімальним чи близьким до мінімального. Якщо маса активної зони значно перевищує критичну, то ланцюгова реакція має характер вибуху. На такому принципі базується дія атомної бомби.

Принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах

Критична маса шматка урану ${}^{235}_{92}\text{U}$ у вигляді кулі дорівнює 50 кг, а радіус такої кулі близько 9 см. Сповільнювач нейтронів і зовнішня оболонка з берилію, дозволяють зменшити критичну масу до 250 г.

Коефіцієнт розмноження нейтронів нескінченним середовищем k_{∞} пропорційний середній кількості η нейтронів, що народжуються після поглинання ядром одного нейтрона (див., (8.71), (8.73)). Для реакторів на теплових нейтронах коефіцієнт k_{∞} має вигляд (правило чотирьох співмножників):

$$k_{\infty} = p \cdot \varepsilon \cdot f \cdot \eta, \quad (8.82)$$

де співмножники p , ε і f характеризують відмінність реального середовища з ядерним паливом від ідеалізованого моноізотопного середовища, що вміщує тільки ${}^{235}_{92}\text{U}$. Коефіцієнт p є внеском швидких нейтронів, яким вдається сповільнитися до теплових без їхнього поглинання ядрами, що відрізняються від ядер основного ізоотопу ядерного палива (${}^{235}_{92}\text{U}$); ε – коефіцієнт розмноження на швидких нейтронах, який визначає збільшення кількості нейтронів даного покоління від поділу швидкими нейтронами ядер, що відрізняються від ${}^{235}_{92}\text{U}$; f – коефіцієнт використання теплових нейтронів, що визначає ймовірність поглинання теплового нейтрона ядрами урану, а не ядрами сповільнювача та інших конструкційних матеріалів реактора.

Важливо не лише здійснити реакцію з саморозвитком і виділенням великої кількості енергії, але й мати можливість керувати нею. У реальній фізичній системі середній час життя одного покоління миттєвих нейтронів з тепловими енергіями $\tau = 10^{-3}$ с. Тому, якщо через деякі причини значення ефективного коефіцієнта розмноження зросте до значення $k_{eff} = 1,005$, то потік нейтронів $n(t)$ (8.79) а значить і енергетична потужність системи $P(t) \sim n(t)$, за 1 с збільшаться в $n(t=1\text{с})/n_0 = \exp(5) \approx 150$ разів. Зрозуміло, що в такій ситуації механічне керування реакцією поділу неможливе. Контролювати швидкість реакції дозволяє присутність запізнілих нейтронів. Хоча внесок запізнілих нейтронів дорівнює $\beta = 0,0075$ (тобто приблизно 0,7%) від загальної кількості нейтронів, що вилітають під час поділу, але вони відіграють фундаментальну роль для керування ланцюговою реакцією. У присутності запізнілих нейтронів ефективний коефіцієнт розмноження нейтронів k_{eff} складається з двох компонентів:

$$k_{eff} = k_{\text{мим}} + k_{\text{зан}}, \quad (8.83)$$

де доданки $k_{\text{мим}}$ і $k_{\text{зан}}$ зумовлені миттєвими та запізнілими нейтронами відповідно. Припустимо, що значення загального коефіцієнта розмноження k_{eff} трохи більше одиниці: для визначеності знову вважаємо $k_{eff} = 1,005$. Тоді коефіцієнт розмноження лише для миттєвих нейтронів, що дорівнює $k_{\text{мим}} = (1-\beta)k_{eff}$, мо-

же бути менший за одиницю (для нашого прикладу $k_{\text{мтт}} = 0,9975$). У такий ситуації лише одні миттєві нейтрони не забезпечують здійснення ланцюгової реакції й вона відбувається через присутність запізнілих нейтронів $k_{\text{eff}} > 1$. Тепер середній час життя одного покоління визначається середнім часом запізнілих нейтронів, який значно більший, ніж для миттєвих нейтронів, і в реальних системах становить 0,1 с. Як наслідок, інтенсивність ланцюгової реакції стає значно повільнішою: за 1 с потужність збільшується лише на 5 %, що робить можливим контролювання процесу ланцюгової реакції. Таке керування здійснюється опусканням та підняттям стрижнів-поглиначів нейтронів.

Існують класифікації ядерних реакторів за різними ознаками. Зокрема, залежно від складу ядерного палива, яке використовується, розрізняють реактори, що працюють на природному урані, на урані збагаченому ізотопами ^{235}U , ^{239}Pu або ^{233}U . За енергією нейтронів, що викликають поділ, реактори розрізняють на теплові, проміжного типу та швидкі. Крім того, реактори групуються залежно від типу сповільнювача (вода, важка вода, графіт, берилій чи органічні сполуки) або охолоджувача.

За призначенням реактори підрозділяють на реактори для отримання корисної енергії (так звані енергетичні реактори); науково-дослідницькі; для отримання нових ізотопів, що діляться, (^{239}Pu і ^{233}U з ланцюгів перетворень ізотопів торію й урану (п. 8.3)); для отримання додаткових нейтронів з метою синтезу ізотопів різних елементів. Енергетичний реактор є основним елементом атомних електростанцій. Ядра-уламки реакції поділу мають дуже високу кінетичну енергію й сильно розігрівають реактор. Тепло від реактора відводять теплоносієм (вода, газ, натрій тощо), що постійно в ньому циркулює. На атомних електростанціях (АЕС) і транспортних енергетичних установках це тепло використовують для отримання водяної пари, яка приводить у дію турбогенератори електричної енергії. Першу у світі АЕС побудували в СРСР у 1954 р. (м. Обнінськ, потужність 5 МВт); у 1957 р. у СРСР введено в експлуатацію перший у світі криголам з ядерною енергетичною установкою.

Саме швидкий розвиток робіт із створення ядерної зброї та ядерної енергетики, що настав після відкриття поділу атомних ядер, підтримав і значно стимулював дослідження з фізики ядра і елементарних частинок.

Підсумовуючи зазначимо, що створення керованих ядерних реакторів стало можливим завдяки трьом фізичним процесам, що були відкриті в ядерній фізиці: 1) поділу ядер $^{235}_{92}\text{U}$ нейтронами; 2) появи в процесі поділу нових нейтронів; 3) присутності запізнілих нейтронів.

Крім того, створення ядерних реакторів потребує дуже розвинених технологій у галузі збагачення ядерного палива; отримання сповільнювачів і конструкційних матеріалів; систем автоматизованого керування; забезпечення біологічного захисту та контролю радіаційної безпеки тощо. Під час роботи ядерного реактора відбувається накопичення продуктів поділу й утворення трансуранових елементів, головним чином, плутонію. Накопичення радіоактивних продуктів називається *отруєнням реактора*, а накопичення стабільних елементів – *зашлакуванням*. Трансуранові елементи, що утворюються в реакторах, дуже радіоактивні, мають великі періоди напіврозпаду й тому дуже небезпечні для людини. Зараз багато зусиль прикладається для їх безпечного захоплення та переробки в стабільні ізотопи. Для останнього розробляються спеціальні системи з прискорювачів (accelerator driven systems, ADS) для опромінення трансуранових елементів зарядженими частинками, що призведе до ланцюгів їх перетворень у стабільні ізотопи.

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Блан Д. Ядра, частицы, ядерные реакторы. – М.: Мир, 1989.
2. Булавін Л.А., Тартаковський В.К. Ядерна фізика. – К.: Київ. ун-т, 2002.
3. Гопыч П.М., Залюбовский И.И. Ядерная спектроскопия. – Х.: Вища шк., 1980.
4. Маляров В.В. Основы теории атомного ядра. – М.: Наука, 1967.
5. Немец О.Ф., Теренецкий К.О. Ядерные реакции. – К.: Вища шк., 1977.
6. Плюйко В.А. Основи теорії ядра та ядерних процесів. Фізика атомного ядра. – К.: Київ. ун-т, 2002; <http://www.phys.univ.kiev.ua>
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 5. Атомная и ядерная физика. – М.: Физматгиз / МФТИ, 2002.
8. Ситенко А.Г. Теория ядерных реакций. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
9. Уилетс Л. Теория ядерного деления. – М.: Атомиздат, 1967.
10. Широков Ю.М., Юдин Н.П. Ядерная физика. – М.: Наука, 1980.
11. Ядерная физика в Интернете / Под ред. Б.С.Ишханова. – М.: WEB-издание МГУ.: Наука; <http://nuclphys.sinp.msu.ru/>
12. Nilsson S.G., Ragnarsson I. Shapes and shells in nuclear structure. – N.Y.: Cambridge Univ. Press., 1995.
13. Ring P., Schuck P. The nuclear many-body problem. – N.Y.: Springer Verlag, 1980.

Додаткова

14. Айзенберг И., Грайнер В. Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления. – М.: Атомиздат, 1975; Механизмы возбуждения ядра. Электромагнитное и слабое взаимодействие. – М., Атомиздат, 1973.; Микроскопическая теория ядра. – М.: Атомиздат, 1976.
15. Ахієзер О.І., Бережної Ю.А. Теорія ядра. – К.: Вища шк., 1995.
16. Ахієзер О.І., Бережної Ю.А. Теорія ядерних реакцій. – Х.: Основа, 2001.
17. Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. – М.: ИЛ, 1954.
18. Вайскопф В. Физика в двадцатом столетии. – М.: Атомиздат, 1977.
19. Вальтер А.К., Залюбовский И.И. Ядерная физика. – Х.: Вища шк., 1974.
20. Давыдов А.С. Возбужденные состояния атомных ядер. – М.: Атомиздат, 1967.
21. Давыдов А.С. Теория атомного ядра. – М.: Физматгиз, 1958.
22. Живописцев Ф.А., Кэбин Э.И., Сухаревский В.Г. Модели предравновесных реакций. – М.: МГУ, 1987.
23. Игнатьев А.В. Статистические свойства возбужденных атомных ядер. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
24. Иткис М.Г., Околович В.Н., Русанов А.Я., Смиренин Г.Н. Симметричное и асимметричное деление ядер легче тория // ЭЧАЯ, 19 (1988) 701.

25. *Ишханов Б.С., Капитонов И.М.* Взаимодействие электромагнитного излучения с атомными ядрами. – М.: МГУ, 1979.
26. *Каменский С.Г., Фурман В.И.* Альфа-распад и родственные ядерные реакции. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
27. *Коломиец В.М., Константинов Б.Д., Струтинский В.М., Хворостьянов В.И.* К теории оболочечной структуры // ЭЧАЯ. 3 (1972) 392.
28. *Капитонов И.М.* Введение в физику ядра и частиц. – М.: УРСС, 2002.
29. *Михайлов В.М., Крафт О.Е.* Ядерная физика. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
30. *Мухин К.Н.* Экспериментальная ядерная физика. Т. I. Физика атомного ядра. – М.: Атомиздат, 1974.
31. *Наумов А.И.* Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Просвещение, 1984.
32. *Немировский П.Э.* Современные модели атомного ядра. – М.: Атомиздат, 1960.
33. *Ньютон Дж.О.* Деление ядер под действием тяжелых ионов // ЭЧАЯ. 21 (1990) 821.
34. *Поликанов С.М.* Изомерия формы атомных ядер. – М.: Атомиздат, 1977.
35. *Ситенко О.Г.* Теорія розсіяння. – К.: Либідь, 1993.
36. *Федоров М.Б.* Спектрометрия нейтронов средних энергий. – К.: Наук. думка, 1979.
37. *Фридлендер Г., Кеннеди Дж., Миллер Дж.* Ядерная химия и радиохимия. – М.: Мир, 1967.
38. *Ходгсон П.Е.* Оптическая модель упругого рассеяния. – М.: Атомиздат, 1966.
39. *Gadioli E., Hodgson P.G.* Pre-equilibrium nuclear reactions. – Oxford: Clarendon press, 1992.
40. *Hodgson P.G.* Nuclear reactions and nuclear structure. – Oxford: Clarendon press, 1971.
41. *Marmier P., Sheldon E.* Physics of nuclei and particles. V. I. – N.Y.: Acad. Press, 1969.; V. II. – N.Y.: Acad. Press, 1970.
42. *Mahaux C., Weidenmueller H.A.* Recent developments in compound-nucleus theory // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 29 (1979) 1.
43. *Particle emission from nuclei. V. 1 Nuclear de formationaenergy* / Eds. D.N.Poenaru, M.S.Ivascu, – Boca Raton: CRC press inc., 1989.
44. *Physics and chemistry of fission 1973. V. 1. Proc. Symp. Rochester, N.Y., 13–17 August 1973.* – Vienna: IAEA, 1974.