

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

В.А.Плюйко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЯДРА ТА ЯДЕРНИХ ПРОЦЕСІВ

Фізика атомного ядра
Навчальний посібник

Київ
Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2002

УДК 539.1(075.8)
ББК 22.383 я 73
ПЗ7

ПЗ7 В.А.Плюйко

Основи теорії ядра та ядерних процесів. Фізика
атомного ядра: Навчальний посібник. – К.:
Видавничо-поліграфічний центр "Київський
університет", 2002.–161 с.

ISBN - 966 - 594 - 348 - 0

Рецензенти: С.М.Єжов, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Г.О. Прокопець, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
А.Д. Фурса, д-р фіз.-мат. наук, старш.наук.співроб.

Викладено узагальнені відомості з основних властивостей атомних ядер та ядерної взаємодії. Розглянуто базові уявлення про одночастинковий і колективний рух нуклонів в ядрах.

За змістом посібник посідає місце між введенням в загальний курс ядерної фізики та розгорнутими курсами теоретичної ядерної фізики, що дає змогу зацікавленому читачеві зрозуміти та опанувати спеціалізовані видання з окремих питань ядерних досліджень.

Для студентів, аспірантів та викладачів фізичних і фізико-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Затверджено вченою радою
фізичного факультету КНУ
29 січня 2001 року;
методичною радою ФТІ
НТУУ "КПІ"
31 січня 2002 року

ISBN - 966 - 594 - 348 - 0

© В.А.Плюйко, 2002

© ВПЦ "Київський університет", 2002

Зміст

Передмова	5
-----------------	---

1. Основні властивості атомних ядер

1.1. Головні задачі ядерної фізики	7
1.2. Масштаби фізичних величин у ядерній фізиці	8
1.3. Склад і маса ядер. Електричний та баріонний заряди	10
1.4. Енергії зв'язку та стійкість ядер	13
1.5. Розміри ядер	18
1.6. Спін та парність ядра	28
1.7. Статичні електромагнітні моменти ядер	38

2. Двонуклонні системи та ядерна взаємодія

2.1. Класифікація станів системи двох нуклонів	45
2.2. Дейтрон та його властивості	47
2.3. Загальні властивості ядерних сил	52
2.4. Зарядова незалежність та формалізм ізоспіну	57
2.5. Обмінний характер ядерної взаємодії.	62

2.6. Кваркова природа ядерних сил та ефективні ядерні сили	67
--	----

3.Одночастинкові та колективні явища в ядрах

3.1. Необхідність побудови моделей структури ядер	76
3.2. Загальна класифікація ядерних моделей	77
3.3. Незалежний рух нуклонів у моделі ядерного фермі-газу	81
3.4. Формування середнього поля ядра	88
3.5. Одночастинковий рух у моделі оболонок	92
3.6. Парні кореляції. Квазічастинкові стани	108
3.7. Узагальнена модель ядра. Колективна енергія рідкої краплини.	111
3.8. Одночастинкові стани в деформованих ядрах	125
3.9. Вібраційні стани ядер	133
3.10. Ротаційні стани ядер	139
3.11. Гігантські резонанси та їх інтерпретація	148

Література	160
-------------------------	-----

Передмова

Ядерна фізика – це великий розділ сучасної фізики, в якому вивчаються специфічні форми існування матерії та її рух, а саме: атомні ядра і їхні взаємоперетворення. У дослідженнях з ядерної фізики було отримано базові знання людства про первинний склад та фізичні властивості матерії. З розвитком науки вивчення елементарних об'єктів всесвіту послідовно переходило від хімії до атомної фізики, далі – до ядерної фізики і зараз до фізики частинок.

Дослідження ядерної фізики відіграли визначну роль у формуванні сучасного погляду на перебіг процесів у природі та обов'язкові обмеження – закони збереження, за яких вони можуть відбуватися. Ці дослідження підтвердили висновки теорії відносності та квантової механіки і тим самим зумовили розвиток, сприйняття і довіру до нових уявлень, які значно відрізняються від тверджень класичної механіки. Так, виробництво енергії атомними станціями та створення атомної і термоядерної зброї макроскопічно наочно підтвердило отримане у спеціальній теорії відносності співвідношення між масою та енергією. Дослідження альфа-розпаду радіоактивних ядер привели до відкриття нового загального квантовомеханічного явища, а саме: можливості проходження частинками зон, рух в яких є забороненим з погляду класичної механіки (ефект тунелювання). З розвитком теорії ядра виникло багато глибоких і тонких концепцій, наприклад, можливість появи самоузгодженого середнього поля у скінченних системах без виділеного силового центра, тлумачити які з фізичного боку важче ніж з математичного.

Ядерна фізика давно вже вийшла на інженерний рівень розвитку. Дослідження у цій галузі суттєво вплинули на розвиток суспільства і викликали як великі сподівання, так і значні побоювання, пов'язані з використанням ядерної енергії. Ядерна фізика є науковою базою атомної енергетики та ядерної техніки. Важливим внеском цієї галузі в інші науки є різноманітне застосування її техніки і методів. Розвиток її власних теоретичних, експериментальних і технологічних розділів мав великий вплив на інші дисципліни і сприяв виникненню нових

розгалужень науки. Хоча спостерігається значний прогрес у розвитку ядерних досліджень, проте існує ще багато невирішених проблем, зокрема, пов'язаних з поведінкою ядерної речовини в екстремальних умовах, які виникають при зіткненні важких іонів та трапляються у зірках, тому ядерна фізика ще далека від свого завершення.

У навчальному посібнику подаються фізичні уявлення і концепції, що лежать в основі сучасної ядерної фізики. За змістом посібник є введенням в розгорнуті курси теоретичної ядерної фізики. Курс ядерної фізики зазвичай вивчається студентами одночасно з курсом квантової механіки. Це дало змогу використовувати квантовомеханічні поняття і формули, оскільки саме на таких уявленнях і базується ядерна фізика. Водночас в багатьох випадках ядерні явища пояснюються з погляду загальних фізичних уявлень, випускаючи деякі деталі теоретичних побудов і математичні розрахунки. У першій та другій главах посібника викладено узагальнені відомості з основних властивостей атомних ядер і визначення ядерних характеристик та ядерної взаємодії; у третій главі розглянуто найбільш поширені феноменологічні моделі ядра, що описують одностинковий і колективний рухи в ядрах, а також гігантські резонанси та їх інтерпретацію.

Глава 1

Основні властивості атомних ядер

1.1. Головні задачі ядерної фізики

Ядерна фізика вивчає властивості та структуру атомних ядер. Основні її завдання пов'язані з аналізом природи ядерних сил, діючих між протонами і нейтронами, які утворюють ядра, та виявленням і поясненням властивостей їх руху. Ядерна фізика охоплює як фундаментальні дослідження (наприклад, ядерну спектроскопію, що вивчає квантові характеристики енергетичних станів ядер), так і дослідження з прикладним застосуванням (наприклад, нейтронну фізику, яка є науковою основою реакторобудування і вивчає розсіюння та захоплення нейтронів ядрами, процеси поділу ядер нейтронами і т. ін.). У ядерній фізиці розглядаються: спонтанні перетворення ядер (α , β і γ -активності, спонтанний поділ, ізомерні переходи); ядерні реакції на ядрах, спричинені елементарними частинками (протонами, нейтронами, мезонами, фотонами) та іншими ядрами (гелію, дейтерію та важких елементів); термоядерні процеси (ядерні реакції між найлегшими ядрами) тощо. Теоретичною основою ядерної фізики є квантова теорія та статистична фізика. Її експериментальну базу складають прискорювачі частинок і ядер та сучасні методи спостереження і обробки результатів експерименту.

1.2. Масштаби фізичних величин у ядерній фізиці

У ядерній фізиці вивчаються явища, які відбуваються на дуже малих відстанях і при дуже великих енергіях, що припадають на одну частинку. Верхньою межею відстаней, на яких відбуваються події, що вивчає ядерна фізика, є розмір атома, який приблизно дорівнює одному ангстрему ($1\text{\AA} = 10^{-8}\text{ см}$). У

ядерній фізиці, як правило, використовують позасистемну одиницю довжини – "фермі (фм)":

$$1 \text{ фм} = 10^{-13} \text{ см} = 10^{-5} \text{ Å}.$$

Ця одиниця є зручною, оскільки за порядком величини вона близька до розміру атомного ядра. Дійсно, протони та нейтрони мають розміри близько 1 фм, а на відстанях між 1 і 10 фм розміщуються радіуси стабільних атомних ядер. Таким чином, з погляду атомних масштабів, ядра надзвичайно малі і розмір атомів перевищує розмір ядер більше ніж на 5 порядків.

Для визначення енергії в ядерній фізиці використовують тільки позасистемну одиницю – електрон-вольт (еВ). Значенню 1 еВ відповідає енергія, яку отримує чи втрачає електрон при проходженні ним різниці потенціалів один вольт:

$$1 \text{ еВ} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт} \cdot 1 \text{ с} = 10^7 \text{ ерг} \left(\text{г} \cdot \text{см}^2 / \text{с}^2 \right).$$

Якщо для атомної фізики характерною енергією є 1 еВ, то для ядерної фізики такі значення є дуже малими і тому використовуються похідні одиниці, а саме: кеВ, МеВ, ГеВ (старе позначення БеВ); $1 \text{ кеВ} = 10^3 \text{ еВ}$, $1 \text{ МеВ} = 10^3 \text{ кеВ} = 10^6 \text{ еВ}$; $1 \text{ ГеВ} \equiv 1 \text{ БеВ} = 10^3 \text{ МеВ} = 10^9 \text{ еВ}$; $1 \text{ ТеВ} = 10^3 \text{ ГеВ}$.

Для атомних ядер найбільш характерні енергії мають значення порядку 1 МеВ. Наприклад, енергія у декілька мегаелектронвольт (близько 8) потрібна для того, щоб вирвати з ядра один нуклон (протон або нейтрон). В окремих випадках в ядерній фізиці доводиться мати справу з більш низькими енергіями. Так, гамма-кванти, що вилітають з ядра, часто мають енергію порядку сотень і десятків кілоелектронвольтів, а іноді й нижче. При енергіях зіткнення до 150 МеВ відбувається енергійне руйнування атомних ядер, але нуклони, що їх утворюють, залишаються незмінними. При енергіях зіткнення понад 150 МеВ починається народження нових частинок, спочатку досить легких (піонів), а потім дедалі більш і більш важких. На сучасних експериментальних установках частинкам можна надати значно більшу енергію. Наприклад, на прискорювачі SPS (ЦЕРН, Женева) протони для експериментів з фіксованою мішенню можна прискорювати до енергій рівних $450 \text{ ГеВ} \cong 0,7 \text{ ерг}$. Це звичайно мало для макроскопічного тіла, але дуже багато для однієї елементарної частинки.

Для порівняння: у супутнику, що летить зі швидкістю 1 км/с, на один протон припадає енергія 10^{-14} ерг $\approx 0,63 \times 10^{-3}$ еВ.

Ядерна фізика в існуючому вигляді охоплює величезні інтервали масштабів, а саме – 7 порядків за відстанями та 9 порядків за енергіями. Кожен атом має оболонку з від’ємним зарядом, та атомне ядро з додатним зарядом. У ядрі зосереджена майже вся (99,95%) маса атома. У порівнянні з атомами ядра є надзвичайно стійкими. Наприклад, для відриву двох електронів від атома гелію достатньо енергії 79 еВ, а для розриву ядра цього атома на складові частини необхідно витратити енергію більшу ніж у 300 000 разів, а саме – 28 МеВ.

Велика різниця масштабів як енергій, так і відстаней в атомній та ядерній фізиці є причиною різких якісних відмінностей явищ в атомних і ядерних системах. В атомній фізиці мають справу з настільки великими відстанями, що ядро майже завжди можна розглядати як заряджену матеріальну точку. В ядерній фізиці мають справу з настільки великими енергіями, що майже завжди можна знехтувати впливом процесів, які відбуваються в електронних оболонках, на структуру ядра та ядерні реакції.

Зі шкалою відстаней тісно пов’язана шкала часу. Найважливішим масштабним поняттям при дослідженні протікання процесів в ядерній фізиці є характерний час, що має назву часу прольоту. Це час, який необхідний для прольоту частинки з заданою енергією крізь іншу мікрочастинку. Наприклад, якщо за характерний ядерний розмір R взяти відстань 1 фм = 10^{-13} см, а за швидкість v взяти значення 10^9 см/с (1/30 швидкості світла), що відповідає швидкості протонів та нейтронів в ядрі, то для ядерного часу прольоту маємо значення

$$\tau_{\text{яд}} = R/v = 10^{-22} \text{ с.}$$

Тому для ядерних процесів час $t \gg 10^{-22}$ с є великим, а малим – час $t < 10^{-22}$ с. При зіткненнях частинок дуже високих енергій їхні швидкості наближаються до максимально можливого значення, а саме до швидкості світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. У цьому випадку час прольоту можна оцінити як

$$\tau_{\text{елем}} = 3 \cdot 10^{-24} \text{ с}$$

і це значення визначає природний масштаб часу в більшості процесів фізики елементарних частинок. Відзначимо, що безпосередньо радіотехнічними методами зараз вимірюють час до значень 10^{-11} с.

1.3. Склад і маса ядер. Електричний та баріонний заряди

Атомні ядра складаються з елементарних частинок – протонів та нейтронів (Д.Д.Іваненко, В.Гайзенберг, 1932 р.). Маса протона m_p та нейтрона m_n близькі одна до одної і майже в 2000 разів перевищують масу електрона m_e :

$$m_p = 1836 m_e = 1,672 \cdot 10^{-24} \text{ г}, \quad m_n = 1838 m_e = 1,675 \cdot 10^{-24} \text{ г}.$$

У ядерній фізиці масу, як правило, вимірюють в атомних одиницях маси (а.о.м.). Атомна одиниця маси вибрана так, що атом вуглецю ^{12}C має масу 12 а.о.м.:

$$M_{^{12}\text{C}} = 12 \text{ а.о.м.} \equiv 12 m_u.$$

Часто наводяться не маси атомних ядер, а маси атомів з урахуванням електронної оболонки. Тому для визначення маси ядра необхідно із значення маси атома відняти масу електронів, які утворюють його оболонку. Взаємодією електронів з ядром, як правило, можна знехтувати. У подібних розрахунках користуються значенням маси спокою електрона в а.о.м., яке дорівнює

$$m_e = 0,5486 \cdot 10^{-3} m_u.$$

У ядерній фізиці маси вимірюють здебільшого в енергетичних одиницях. При цьому використовують знамените співвідношення Ейнштейна

$$E = mc^2, \tag{1.1}$$

яке зв'язує повну енергію E ізольованої системи, що перебуває в стані спокою (елементарні частинки, ядро, атом тощо) з її масою; c швидкість світла у вакуумі. Співвідношення (1.1) відображає еквівалентність маси та енергії і є одним із найголовніших у застосуванні висновком теорії відносності. Воно придатне до будь-якої ізольованої фізичної системи і тому є універсальним. В енергетичних одиницях одиниця атомної маси дорівнює¹⁾

$$m_u c^2 = M_{^{12}\text{C}} c^2 / 12 = 931,47 \pm 0,05 \text{ MeV}, \tag{1.2}$$

а маси електрона, протона та нейтрона відповідно дорівнюють

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}; \quad m_p c^2 = 938,259 \text{ MeV}; \quad m_n c^2 = 939,553 \text{ MeV}; \tag{1.3}$$

$$m_p = 1,007276 m_u; \quad m_n = 1,008665 m_u; \quad m_e = 0,0005486 m_u.$$

¹⁾ Відмітимо, що в формулах часто використовують одиниці з $c = 1$ і вважають, що маса вимірюється в одиницях MeV.

Протон є зарядженою частинкою. Його заряд додатний і за абсолютною величиною дорівнює заряду електрона e :

$$e_p = -e = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ Кулон (Кл)}. \quad (1.4)$$

Електричний заряд нейтрона дорівнює нулю, що і відображено в його назві.

На відміну від електронів протони та нейтрони перебувають під впливом специфічних ядерних сил. Ядерні сили належать до найбільш інтенсивних у природі сильних взаємодій. Завдяки їм протони та нейтрони можуть з'єднуватися один з одним, утворюючи різні атомні ядра. Властивості протона та нейтрона щодо сильних взаємодій абсолютно однакові, чим і пояснюється близькість їхніх мас. Тому в ядерній фізиці часто використовують термін нуклон, що позначає або протон, або нейтрон. Можна сказати, що протон і нейтрон – це два стани однієї і тієї ж самої частинки – нуклона (§ 2.4).

Оскільки у природному середовищі атом є електрично нейтральним, то число протонів у ядрі повинно дорівнювати числу електронів в атомній оболонці, тобто атомному номеру Z . Загальне число нуклонів (тобто протонів та нейтронів) у ядрі позначають через A і називають масовим числом. Числа Z і A повністю характеризують склад ядра. Для позначення числа нейтронів в ядрі використовують літеру N : $N = A - Z$. Для позначення різних ядер зазвичай використовують запис вигляду ${}_Z^AX$, де X – хімічний символ, що відповідає атому з даним зарядом Z . Наприклад, вираз ${}_6^{12}C$ визначає ядро атома вуглецю з $Z = 6$ і $A = 12$, що має 6 протонів і 6 нейтронів. Лівий нижній індекс Z не є обов'язковим, оскільки атомний номер однозначно відповідає назві елемента. Тому часто пишуть ^{12}C . Протон p і нейтрон n у цих позначеннях можна записати відповідно як ${}_1^1p$ та ${}_0^1n$. Протон є ядром атома водню і тому його можна також позначити як ${}_1^1H$, тобто $p = {}_1^1p = {}_1^1H$.

Ядра з одним і тим же значенням Z та різними A називають ізотопами. Наприклад, у природному урані ($Z = 92$) є ізотопи ${}_{92}^{235}U$ і ${}_{92}^{238}U$, які мають відповідно 143 і 146 нейтронів. Ядра з однаковими A та різними Z називають ізобарами, а ядра з однаковими N та різними Z – ізотонами. У переважній більшості атоми різних ізотопів мають однакові хімічні властивості. Оскільки такі властивості визначаються електронною оболонкою, а кількість електронів – зарядом ядра, то на структуру електронної оболонки атома ядро впливає головним чином тільки своїм електричним зарядом. За своїми суто ядерними властивостями різні ізотопи мають, як правило, мало спільного. Ізотопи водню ${}_1^1H$, ${}_1^2H$, ${}_1^3H$ дуже відрізняються масами, а їх атоми помітно (відносно ізотопів

інших елементів) відрізняються за фізичними і навіть хімічними властивостями. Тому важким ізотопам водню виявилось навіть корисно приписати різні назви. Ізотоп ${}^2_1\text{H}$ (вміст якого у природній суміші становить 0,015%) називають дейтерієм і позначають через D (використовується також термін "важкий водень"). Ядро дейтерію називають дейтроном і позначають через d . Наприклад, якщо молекулу води, до складу якої входить звичайний ("легкий") водень, позначають як H_2O , то молекулу "важкої води", до складу якої входить ізотоп ${}^2_1\text{H} \equiv D$, позначають через $D_2\text{O}$. Важка вода має густину $1,108 \text{ г/см}^3$, замерзає при температурі $3,82^\circ\text{C}$ і кипить при $101,42^\circ\text{C}$, тобто помітно відрізняється від звичайної води.

Ядро нестабільного ізотопу ${}^3_1\text{H}$ називають тритоном (використовують також термін "надважкий водень") і позначають через t . Відповідний елемент називають тритієм та позначають через T .

Ядро атома гелію ${}^4_2\text{He}$ називають α -частинкою.

Електричний заряд ядра, що визначає атомний номер Z , є величиною, яка строго зберігається при будь-яких (у тому числі і не електромагнітних) взаємодіях. Сукупність експериментальних даних про взаємні перетворення атомних ядер і елементарних частинок показує, що, крім закону збереження електричного заряду, існує закон збереження ще однієї величини, так званого баріонного заряду. А саме, кожній частинці можна приписати деяке значення баріонного заряду, причому алгебраїчна сума баріонних зарядів усіх частинок залишається незмінною при будь-яких процесах. Баріонні заряди всіх частинок є цілими числами. Баріонні заряди протона та нейтрона дорівнюють одиниці, а електрона і γ -кванта (фотона високих енергій) – нулю. Тому масове число A є баріонним зарядом ядра. Баріонний заряд часто позначають літерою B . Закон збереження баріонного заряду приводить до заборони деяких процесів. Наприклад, цим законом заборонено перетворення двох нейтронів у пару γ -квантів:

$$\begin{array}{ccc} n + n & \rightarrow & \gamma + \gamma \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ B = 2; & & B = 0, \end{array} \quad (1.5)$$

що є енергетично вигідним та дозволеним усіма іншими законами збереження.

Існують такі емпіричні факти та закономірності стосовно величин A і Z .

1. Відомі ядра з значеннями Z від 0 до $Z \approx 114$ (ядро з $Z = 0$, $N = 1$ є нейтроном). Не існує стабільних ядер, тобто таких ядер, що не розпадаються спонтанно, при $Z = 0$, 43, 61 і $Z \gtrsim 84$.

2. Спостерігалися ядра з значеннями A від 1 до ≈ 290 ; не існує стабільних ядер з $A = 5, 8$ та $A \gtrsim 210$.

3. Властивості ядер істотно залежать від парності чисел Z і N . Це впливає вже з того, що серед стабільних ізотопів найбільше парно-парних (парні Z і N) і найменше непарно-непарних (непарні Z, N), яких відомо всього чотири: ${}^2_1D, {}^6_3Li, {}^{10}_5B, {}^{14}_7N$.

4. При малих A стабільні ядра містять приблизно однакову кількість протонів і нейтронів, а при збільшенні A процентний вміст нейтронів зростає.

5. Більшість хімічних елементів мають декілька стабільних ізотопів. Переважає тут олово (${}_{50}Sn$), яке має 10 стабільних ізотопів з $A = 112 \div 124$ ($N = 62 \div 74$). З іншого боку, значна кількість елементів, наприклад, Be, Na, Al , має тільки один стабільний ізотоп.

1.4. Енергії зв'язку та стійкість ядер

Існують різні методи вимірювання мас ядер, наприклад, за допомогою дослідження проходження заряджених частинок крізь електричні та магнітні поля. У цьому випадку потік частинок розділяється на окремі пучки з фіксованим значенням питомого заряду q/m , де $q = Ze$ (e/m – для однократно заряджених іонів). Сукупність пучків, що складається з частинок різних мас (різних значень q/m), які розділені електричним та магнітним полями, називають мас-спектром. Реєстрацію розділених пучків частинок виконують електричним способом (мас-спектрометрами) або фотографічним (мас-спектрографами).

Сам факт існування ядер, як стабільних ядерних систем, а потім і точні вимірювання мас ядра свідчать про те, що маса ядра $M(Z, A)$ завжди дещо менша від суми мас вільних нуклонів, які входять до складу ядра. Тому й енергія $E = M(Z, A)c^2$, яка відповідає масі ядра, менша за суму енергій вільних нуклонів, що входять до його складу, і для розщеплення ядра на окремі нуклони необхідно затратити деяку енергію. Цю енергію називають енергією зв'язку ядра $B(Z, A)$:

$$B(Z, A) = -\Delta M c^2 \equiv [Zm_p + Nm_n - M(Z, A)]c^2, \quad (1.6)$$

де

$$\Delta M \equiv M(Z, A) - \{Zm_p + (A - Z)m_n\}. \quad (1.7)$$

Енергія зв'язку $B(Z, A)$, що є надлишком сумарної енергії вільних нуклонів порівняно з енергією нуклонів у ядрі, є одним з найважливіших параметрів, який характеризує стійкість ядра; чим більше значення B , тим більш стійким є ядро. Знання енергій зв'язку ядер дозволяє розраховувати енергетичний баланс не тільки такого рідкісного процесу, як повне розщеплення, але й будь-якого процесу розпаду та взаємного перетворення ядер. Наприклад, енергії відокремлення ²⁾ нейтрона S_n і протона S_p , які необхідні для їх вибивання з ядра A_ZX , дорівнюють різниці енергії зв'язку материнського ядра A_ZX та відповідних дочірніх ядер ${}^{A-1}_ZX$, ${}^{A-1}_{Z-1}X$:

$$\begin{aligned} S_n &= B(Z, A) - B(Z, A - 1) = \\ &= [M(Z, A - 1) + m_n - M(Z, A)] c^2, \\ S_p &= B(Z, A) - B(Z - 1, A - 1) = \\ &= [M(Z - 1, A - 1) + m_p - M(Z, A)] c^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

А енергія відокремлення від материнського ядра α -частинки

$$\begin{aligned} S_\alpha &= B(Z, A) - B(Z - 2, A - 4) - B(\alpha) = \\ &= [M(Z - 2, A - 4) + M_\alpha - M(Z, A)] c^2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

де M_α і $B(\alpha)$ – маса та енергія зв'язку α -частинки.

Замість енергії зв'язку часто буває доцільно розглядати енергію зв'язку на нуклон $\bar{B} = B(Z, A) / A$, яку також називають питомою енергією зв'язку.

Згідно з (1.6) маса ядра на величину $B(Z, A) / c^2$ менша за суму мас нуклонів, що складають ядро. Значення ядерних енергій зв'язку настільки великі, що їх можна знайти з великою точністю шляхом прецизійних вимірювань мас ядер. Наприклад, маса α -частинки (ядра гелію 4_2He) в а.о.м. дорівнює $M_\alpha = 4,001523 m_u$, отже для енергії зв'язку α -частинки маємо

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= 2m_p c^2 + 2m_n c^2 - M_\alpha c^2 = \\ &= (2 \cdot 1,007276 + 2 \cdot 1,008665 - 4,001523) m_u c^2 \approx \end{aligned}$$

²⁾ Іноді енергії відокремлення також називають енергіями зв'язку.

$$\approx 28,3 \text{ MeV}. \quad (1.10)$$

Таким чином, α -частинка з енергією зв'язку $B(\alpha) = 28,3 \text{ MeV}$ легша від двох розділених протонів і двох нейтронів на значення

$$\Delta M \approx 4 \cdot 10^{-26} \text{ г}, \quad (1.11)$$

що становить наближено 0,7% від повної маси α - частинки.

Різницю Δ між масою ядра та його масовим числом в атомних одиницях маси називають надлишком (mass excess)(або іноді дефектом) маси ядра:

$$\Delta(Z, A) = M(Z, A) c^2 - A m_u c^2, \quad m_u = M_{^{12}\text{C}} / 12. \quad (1.12)$$

Очевидно, що дефект маси ядра ^{12}C дорівнює нулю за означенням, але протон та нейтрон мають ненульові значення дефектів мас:

$$\Delta_p = 0,007276 m_u = 7,288 \text{ MeV},$$

$$\Delta_n = 0,008665 m_u = 8,071 \text{ MeV}. \quad (1.13)$$

З порівняння формул (1.6) і (1.12) випливає, що надлишок мас однозначно визначає енергію зв'язку і відрізняється від неї лише знаком, вибором системи одиниць та зміщенням початку відліку енергії:

$$B(Z, A) \equiv [Z m_p + N m_n - M(Z, A)] c^2 = \quad (1.14)$$

$$= Z \cdot \Delta_p + (A - Z) \cdot \Delta_n - \Delta(Z, A).$$

У таблицях замість величини $B(Z, A)$ зазвичай наводиться значення Δ у мегаелектронвольтах. При цьому треба брати до уваги, що табличні значення мас та дефектів мас наводять не для ядер, а для відповідних нейтральних атомів. Це еквівалентно у формулі (1.6) заміні величини m_p на масу водню і $M(Z, A)$ на масу $M_{\text{ат}}(Z, A)$ нейтрального атома; тобто табличні значення енергій зв'язку, зазвичай, визначені як

$$B_{\text{табл}}(Z, A) = \{Z M_H + (A - Z) m_n - M_{\text{ат}}(Z, A)\} c^2. \quad (1.15)$$

Аналіз експериментальних енергій зв'язку дає велику та цікаву інформацію про властивості ядер. Для обговорення цієї інформації розглянемо показану на

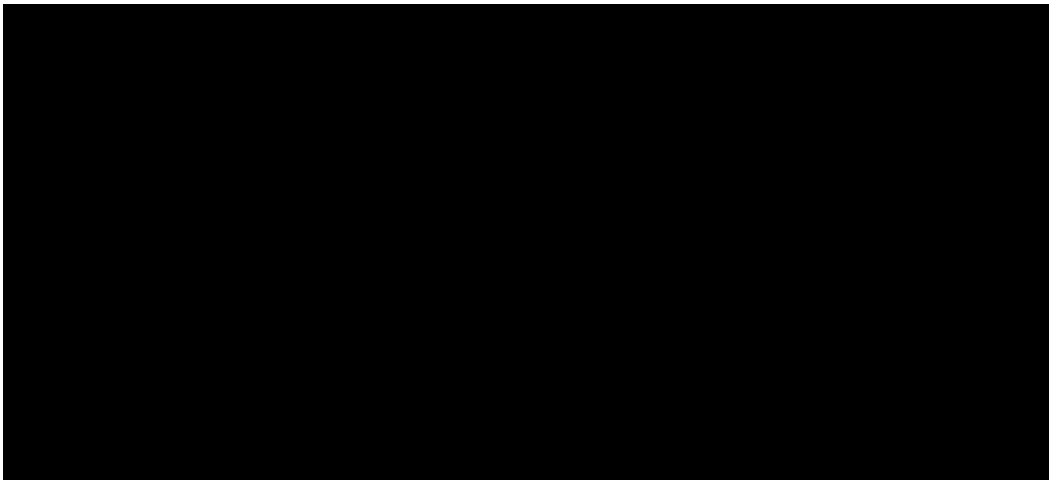


Рис. 1.1. Усереднена залежність питомої енергії зв'язку найбільш стабільних ядер від масового числа

рис. 1.1 усереднену залежність питомої енергії зв'язку від масового числа для найбільш поширених ізотопів стабільних ядер. В експериментальній залежності $B(Z, A)/A$ від A можна відокремити такі закономірності.

1. Якщо не враховувати легкі ядра з $A \lesssim 14$, то в нульовому наближенні енергія зв'язку на нуклон постійна і дорівнює $\cong 8$ МеВ. Приблизна незалежність питомої енергії зв'язку від числа нуклонів свідчить про насичення ядерних сил. Ця властивість ядерних сил полягає в тому, що кожен нуклон може взаємодіяти тільки з декількома сусідніми нуклонами. Якщо б насичення не було, тобто нуклон міг би взаємодіяти одночасно з усіма нуклонами, то енергія зв'язку зростала б із зростанням A не лінійно, а принаймні квадратично. Дійсно, згідно з комбінаторною алгеброю, кількість пар, які можна утворити у системі з A частинками, дорівнює $A(A-1)/2$ і тому, якби всі нуклони були об'єднані в пари, то й енергія зв'язку була б пропорційна величині $A(A-1)/2$.

2. Енергія зв'язку на нуклон не є константою, а має максимум в області ядер заліза ($A \cong 56$, $\bar{B} \approx 8,8$) МеВ і спадає з обох боків. Максимум кривої відповідає найбільш стабільним ядрам. Найлегшим ядрам енергетично вигідно зливатися з утворенням більш важких ядер (процес синтезу) і виділенням (термоядерної) енергії.

Для найбільш важких ядер, навпаки, вигідніше розщеплюватися на уламки з виділенням енергії. Такий процес називають поділом ядер, а відповідну енергію, що виділяється, атомною.

Спад кривої питомої енергії зв'язку при малих A можна пояснити поверхневими ефектами. Нуклони, що існують на поверхні ядра, не повністю вико-

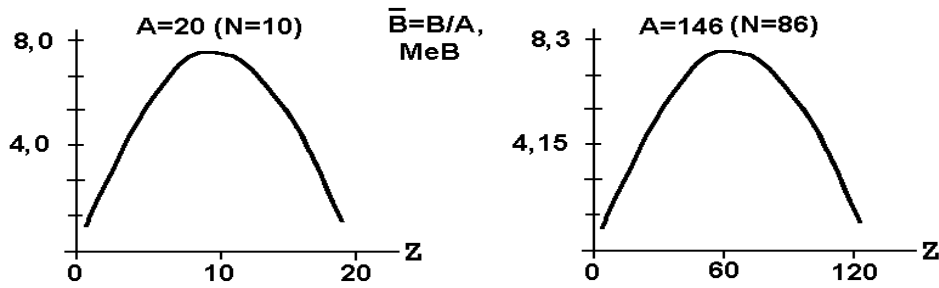


Рис. 1.2. Залежність питомої енергії зв'язку в ізобарах

ристовують свої зв'язки і це зменшує значення B . Роль поверхневих ефектів зростає зі збільшенням відношення площі поверхні до об'єму. У об'єктах сферичної форми радіуса R відношення площі поверхні $S \sim R^2$ до об'єму $V \sim R^3$ обернено пропорційне радіусу ядра ($\sim 1/R$), тому і можна очікувати, що з переходом до більш легких ядер вплив поверхневих ефектів буде зростати.

Зменшення питомої енергії зв'язку при переході до важких ядер пояснюється електростатичним відштовхуванням протонів. Кулонівська енергія додатна і пропорційна квадрату числа протонів (кулонівські сили не мають властивості насиченості) і тому вона зменшує енергію зв'язку при переході до більш важких ядер.

3. Якщо розглядати питому енергію зв'язку як функцію Z при фіксованому A , то матимемо криві з максимумом, що спостерігається при $Z \sim A/2$ для легких ядер, і зміщений у бік більшої кількості нейтронів для важких ядер (рис. 1.2). З достатньою точністю для стабільних ядер справедливе співвідношення

$$Z \cong \frac{A}{1,98 + 0,015 A^{2/3}}, \quad (1.16)$$

яке називають лінією (доріжкою) β -стабільності.

Установленим фактом вважається, що для всіх ядер при нехтуванні кулонівськими силами максимум питомої енергії зв'язку ізобарів повинен спостерігатися при $Z = A/2$, тобто, ядерні сили діють інтенсивніше при однаковій кількості протонів та нейтронів. Цей ефект обумовлений загальною властивістю ядерних сил, що називається ізотопічною інваріантністю.

4. Детальним вивченням величини B як функції змінних Z і N установлено, що у двовимірному просторі функція $B(Z, N) \equiv B(Z, A = Z + N)$ розщеплюється на три гілки. Найвищою буде гілка, на якій містяться парно-парні ядра (парні Z, N); посередині – гілка, що містить ядра з непарним A (парне Z , непарне N або навпаки); нижче всього знаходяться непарно-непарні ядра (непарні Z, N).

Відстань між сусідніми значеннями гілок $\approx 1 \div 4$ МеВ. Цей факт безперечно вказує на існування явища "спарювання" (тобто поєднання у пари³⁾) однакових нуклонів в ядрах, причому при спарюванні енергія зростає приблизно на $1 \div 4$ МеВ. Цю додаткову енергію називають енергією спарювання. Наприклад, якщо б не існувало явища спарювання нуклонів, то енергія зв'язку ізотопу бром- ${}^{80}_{35}\text{Br}$ мала б проміжне значення між енергіями ядер ${}^{80}_{34}\text{Se}$ та ${}^{80}_{36}\text{Kr}$. Насправді виявляється, що енергія зв'язку ${}^{80}_{35}\text{Br}$ менша за енергію зв'язку ${}^{80}_{36}\text{Kr}$ на 2,501 МеВ за рахунок того, що в ${}^{80}_{35}\text{Br}$ є неспарені протон і нейтрон.

У середньому енергії зв'язку можна апроксимувати виразом

$$B(Z, A) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3} - a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} - a_5 \frac{\delta}{A^{3/4}}, \quad (1.17)$$

де, підібрані за експериментальними даними сталі $a_1, \dots, a_5$, мають такі значення:

$$\begin{aligned} a_1 &= 15,75 \text{ МеВ}; & a_2 &= 17,8 \text{ МеВ}; & a_3 &= 0,710 \text{ МеВ}; \\ a_4 &= 23,70 \text{ МеВ}; & a_5 &= 34 \text{ МеВ}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Величина δ описує ефект парності числа нуклонів кожного сорту:

$$\delta = \begin{cases} +1, & \text{для непарно-непарних ядер;} \\ 0, & \text{для ядер з непарним } A; \\ -1, & \text{для парно-парних ядер.} \end{cases} \quad (1.19)$$

Напівемпірична формула (1.17) називається формулою Вейцзекера.

Існує також особливість в залежності $\bar{B} = B/A$ від змінних Z, N , яка полягає в тому, що при деяких "магічних" значеннях Z, N енергія зв'язку має помітно виражені максимуми. Ці магічні значення дорівнюють 2, 8, 20, (28), 50, 82 та 126. Такий ефект є виявом оболонкової структури ядра. Магічні значення чисел Z і N відповідають замкненим оболонкам, тобто структурам подібним до електронних оболонок інертних газів. Відповідні (магічні) ядра мають більші питомі енергії зв'язку, ніж їхні найближчі сусіди. Більша енергія зв'язку на нуклон у магічних ядрах вказує на їхню більш високу стійкість. Особливо великою стійкістю відзначаються двічі магічні ядра: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.

5. Питома енергія зв'язку різко зменшується при переході до ядер із мінімальним числом нуклонів; наприклад, для ядра ${}^3_2\text{He}$ $\bar{B} = 2,6$ МеВ, а для дейтрона $\bar{B} = 1,1$ МеВ. Цей ефект має специфічне квантове походження і свідчить про дуже малий радіус дії ядерних сил.

³⁾ Іноді це явище називається "двійкуванням".

1.5. Розміри ядер

У першому наближенні атомні ядра можна вважати сферичними і ввести поняття радіуса ядра R як радіуса сфери, що обмежує ядерну речовину. Але при інтерпретації понять "радіус" та "форма ядра" виникають труднощі, оскільки ці характеристики не можна повністю ототожнювати з подібними величинами у макроскопічних тілах, де межа поділу середовищ є різкою. Річ у тім, що ядро є системою частинок, які перебувають у постійному русі й описуються законами квантової механіки. Тому поверхня ядра є, строго кажучи, "розмитою", а поняття радіуса досить умовним. Дійсно, якби поверхня ядра була ідеально різкою з нескінченно малою невизначеністю у розмірі $\Delta x \rightarrow 0$, то згідно з нерівністю Гайзенберга $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ невизначеність p в імпульсі на ній була б нескінченно великою:

$$\Delta p \geq \hbar / \Delta x \longrightarrow \infty, \quad \Delta x \rightarrow 0$$

нуклони завжди мали б енергію, достатню для їх вильоту, і стабільні ядра не існували б. Тому про поверхню ядра можна говорити лише наближено як про область, розмір "розмитості" якої значно менший за розмір внутрішньої області. Фактично під розмірами (радіусом) ядра розуміють розміри тієї області, в якій виявляється усереднена дія ядерних сил.

Уперше ядерні сили були відкриті в дослідях Резерфорда з розсіювання заряджених частинок ядрами. Із цих дослідів, зокрема, випливає, що при зближенні зарядженої частинки (α -частинки, протона) з ядром спочатку між ними діють сили кулонівської взаємодії, а на малих відстанях – ядерні сили. Розглянемо інтерпретацію експериментів Резерфорда детальніше. Для цього проаналізуємо енергію взаємодії між частинками. Будемо вважати, що електричне поле навколо ядра має сферичну симетрію, і його потенціальна енергія $V(r)$ залежить тільки від координат. Тоді зовні ядра потенціал частинки з зарядом $Z_1 e$, що налітає на ядро із зарядом Ze , дорівнює

$$V(r) \equiv \frac{ZZ_1 e^2}{r} \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Z_1 Z}{r} \equiv \alpha (\hbar c) \frac{Z_1 Z}{r} \equiv 1,44 \frac{Z_1 Z}{r(\text{фм})} \text{ (MeV)}, \quad (1.20)$$

де $\alpha = e^2/\hbar c = 0,0072972 = 1/137,038$ – безрозмірна стала тонкої структури; $\hbar c = 197,3286 \text{ MeV фм}$. Потенціальна крива $V(r)$ зовні ядра радіусом R має вигляд гіперболи, що розміщена над віссю абсцис (рис. 1.3). На дуже близькій

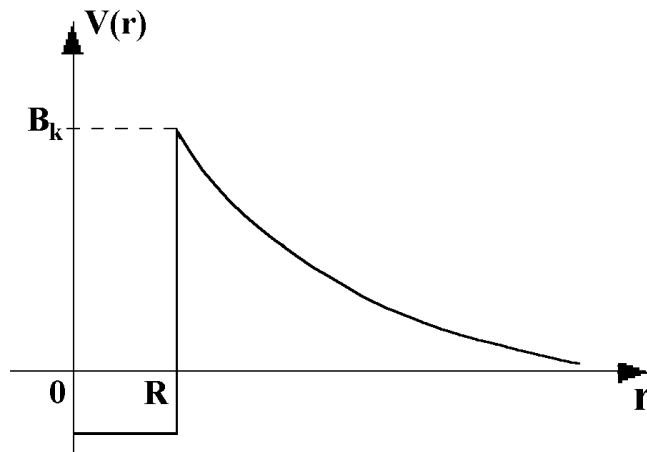


Рис. 1.3. Потенціальний (кулонівський) бар'єр атомного ядра при його взаємодії з точковою частинкою з зарядом Z_1

відстані $r \leq R$ від ядра діють ядерні сили притягання; потенціальна енергія $V(r)$ має бути меншою від нуля (оскільки ядро існує як компактна система). Зі зменшенням відстані ядерні сили притягання так швидко зростають, що кулонівські сили відштовхування стають незначними відносно них; потенціал змінює знак і крива різко спадає, утворюючи потенціальну яму. Нижня частина потенціалу розміщена в області від'ємних значень і на рис. 1.3 апроксимується прямокутною ямою.

Отже, навколо атомного ядра існує кулонівський потенціальний бар'єр з висотою

$$B_k = \frac{ZZ_1 e^2}{R} = 1,44 \frac{ZZ_1}{R(\text{фм})} \text{ (MeV)},$$

тобто існує область з підвищеним значенням потенціальної енергії. З погляду класичної фізики частинки з кінетичною енергією $E_\alpha \leq B_k$ не можуть проникати за цей бар'єр і взаємодіяти з ядром. За межами ядра діють кулонівські сили, а в ядрі ($r \leq R$) – ще й ядерні сили. Тому, аналізуючи дані про розсіяння протонів, α -частинок та нейтронів на атомних ядрах, можна визначити радіус ядра як відстань R , на якій починають виявлятися ядерні сили. Перші дані про розміри атомного ядра були отримані Резерфордом саме в результаті дослідів з вивчення розсіяння α -частинок на атомах як наслідок так званого ефекту аномального розсіяння α -частинок.

Як відомо, у кулонівському полі розсіяння α -частинок відбувається згідно з формулою Резерфорда, і ймовірність розсіяння на кут θ пропорційна величині

$$\frac{dW}{d\Omega} \sim \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (1.21)$$

Дійсно, в експериментах Резерфорда розсіяння α -частинок до певної енергії описувалося даною формулою. Далі зі збільшенням енергії спостерігалася "аномалія", а саме, відхилення від формули (1.21). З фізичного погляду ці результати легко пояснити існуванням специфічної ядерної взаємодії. Коли енергія α -частинки мала ($E_\alpha \leq B_k$), то вона не може подолати силу кулонівського відштовхування і досягти області дії ядерних сил і тому розсіяння описується (1.21). При енергії ($E_\alpha > B_k$) частинка досягає області дії ядерних сил і характеристики розсіяння помітно відрізняються від кулонівських. Якщо експериментально визначити значення енергії $E_{\alpha, max}$, при якій розсіяння переходить в аномальне, то з умови:

$$E_{\alpha, max} = B_k \equiv \frac{2Ze^2}{R} \cong \frac{2,88 Z}{R(\text{фм})} \text{ (MeV)} \quad (1.22)$$

можна знайти радіус ядра

$$R = \frac{2Ze^2}{E_{\alpha, max}} = \frac{2,88 Z}{E_{\alpha, max}(\text{MeV})} \text{ (фм)} . \quad (1.23)$$

Наприклад, для ядра золота $Z = 79$, $E_{\alpha, max} = 5 \text{ MeV}$ і отримуємо оцінку $R \cong 46 \text{ фм}$. Хоча цей метод і є досить грубим, але він дає правильну оцінку радіуса ядра, я об'єкта з розмірами на багато порядків меншими за розміри атома.

У подальшому розміри ядер визначалися різними методами, серед них:

- 1) радіуси α -радіоактивних ядер досліджувалися за значенням ймовірності α -розпаду;
- 2) використовували аналіз напівемпіричної формули для мас та енергій зв'язку ядер;
- 3) радіуси ядер знаходили з досліджень розсіяння швидких нейтронів ядрами $[W \sim R^2]$;
- 4) вимірювали ймовірність розсіяння електронів ядрами.

Розглянемо метод визначення R з аналізу напівемпіричної масової формули. Серед ізобарних пар (тобто ядер з однаковим A) зустрічаються пари "дзеркальних" ядер, наприклад,

$$\begin{array}{ccc} {}^3_1\text{H} & - & {}^3_2\text{He} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ Z = 1, N = 2; & & Z = 2, N = 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} {}^7_3\text{Li} & - & {}^7_4\text{Be} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ Z = 3, N = 4; & & Z = 4, N = 3. \end{array}$$

Енергії ядер, що утворюють пару дзеркальних ядер, різні. Енергія зв'язку ядра, у складі якого більше протонів ніж нейтронів, менше від енергії зв'язку ядра, яке містить більше нейтронів, оскільки кулонівська взаємодія приводить до розштовхування протонів і тим самим – до зменшення потенціальної енергії. Наприклад, для ядра ${}^3_1\text{H}$ енергія зв'язку $B = 8,484 \text{ MeV}$, а для ${}^3_2\text{He}$ $B = 7,117 \text{ MeV}$. Якщо знехтувати різницею мас протона і нейтрона, зважаючи на те, що протони і нейтрони поводять себе однаково стосовно ядерних сил (зарядова незалежність ядерних сил), то відмінність між енергіями зв'язку двох дзеркальних ядер буде обумовлена лише кулонівським відштовхуванням між протонами. Різниця енергій зв'язку цих ядер буде дорівнювати електростатичній енергії E_c одного протона, який перебуває в полі Z інших протонів:

$$B(A, Z) - B(A, Z + 1) = E_c. \quad (1.24)$$

Енергія E_c залежить від розподілу заряду всередині ядра та його розмірів. Обчислимо E_c , припускаючи, що ядро є сферою радіуса R з рівномірно розподіленим за об'ємом протонним зарядом. Густина заряду ρ_q , зумовлена присутністю одного протона в ядрі, дорівнює

$$\rho_q = e/V_N, \quad (1.25)$$

де $V_N = (4/3) \pi R^3$ – об'єм ядра.

Знайдемо вираз для кулонівського потенціалу $V_c(r)$ всередині ядра, що обумовлений зарядом e , рівномірно розподіленим за об'ємом ядра (рис. 1.4). З класичної електродинаміки відомо, що потенціал $V_\xi(r) d\xi$ від сферичного шару радіусом ξ товщиною $d\xi \ll 1$, що діє на одиничний заряд e на відстані r від його центра, дорівнює

$$V_\xi(r) d\xi = \begin{cases} e(\rho_q/\xi) S_\xi d\xi = \text{const}, & r < \xi; \\ e(\rho_q/r) S_\xi d\xi, & S_\xi = 4\pi\xi^2, r \geq \xi. \end{cases} \quad (1.26)$$

Тому повний кулонівський потенціал у будь-якій точці на відстані r всередині ядра має вигляд

$$V_c(r) = \int_0^r V_\xi(r) d\xi + \int_r^R V_\xi(r) d\xi, \quad (1.27)$$

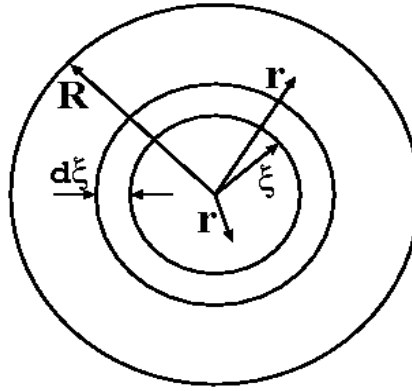


Рис. 1.4. Кулонівський потенціал всередині ядра

де перший і другий доданки – внески від внутрішніх та зовнішніх шарів відповідно. Виконуючи інтегрування, маємо

$$\begin{aligned}
 V_c(r) &= \int_0^r \frac{e^2}{V_N} \frac{1}{r} 4\pi \xi^2 d\xi + \int_r^R \frac{e^2}{V_N} \frac{1}{\xi} 4\pi \xi^2 d\xi = \\
 &= \frac{3e^2}{4\pi R^3} \left[\frac{4\pi \xi^3}{3r} \Big|_0^r + 2\pi \xi^2 \Big|_r^R \right] = \frac{3e^2}{R^3} \left[\frac{r^2}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] = \\
 &= \frac{3e^2}{R^3} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) = \frac{3}{2} \frac{e^2}{R^3} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right),
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

тобто,

$$V_c(r) = \frac{3}{2} \frac{e^2}{R^3} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) = \frac{2\pi e^2}{V_N} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right). \tag{1.29}$$

Якщо врахувати, що у ядрі з додатковим протоном є $Z + 1$ протонів, заряд яких вважається рівномірно розподіленим за об'ємом ядра, то енергія E_c взаємодії одного протона, що створює поле з потенціалом $V_c(r)$, з іншими Z протонами буде дорівнювати

$$E_c = Z \int_0^R \frac{\rho_q}{e} V_c(r) d\vec{r} = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{R} = B(A, Z) - B(A, Z + 1), \tag{1.30}$$

де символ $d\vec{r}$ тут і далі означає елементарний об'єм ядра.

За допомогою цього виразу були визначені радіуси ядер. Виявилось, що значення R апроксимуються формулою

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \simeq 1,4 \text{ фм}. \tag{1.31}$$

Цей метод визначення радіусів ядер використовували досить довго. Але подальші дослідження показали, що він надто грубий, інші підходи дають значення $r_0 \simeq 1,2 \div 1,3$ фм. Зокрема, виявилось, що не дуже точним є наближення рівномірно зарядженої сфери.

Найбільш інтенсивно форма ядра вивчалася в експериментах з розсіяння швидких електронів. Цей метод є одним із найбільш точних способів визначення радіуса ядра. Взаємодія електронів з ядрами визначається електромагнітним потенціалом і тому чутлива до розподілу електричного заряду в ядрі. Справді, електрони взаємодіють із нуклонами за допомогою електромагнітного потенціалу та потенціалу слабкої взаємодії, але інтенсивність останнього потенціалу приблизно на 8 порядків менша ніж електромагнітна, і тому слабку взаємодію можна не враховувати.

Разом з тим, дослідження розподілу заряду ядер можна робити тільки за допомогою електронів досить високих енергій, що обумовлено однією з основних властивостей квантового світу, а саме – нерозривним зв'язком між хвилями та частинками. Цей взаємозв'язок полягає в тому, що будь-якій частинці відповідає хвиля де Бройля. Очевидно ефективно частинка буде "відчувати" розмір ядра, якщо довжина λ її зведеної хвилі де Бройля буде меншою або порядку цього розміру:

$$\lambda \equiv 1/k \leq R \lesssim 10 \text{ фм}, \quad (1.32)$$

де k – хвильове число, що визначається модулем імпульсом частинки $p = \hbar k$. Тому імпульс p та λ зв'язані співвідношенням

$$p = \frac{\hbar}{\lambda}. \quad (1.33)$$

Для нерелятивістської частинки маси m кінетична енергія дорівнює $E_{\text{кін}} = p^2/2m$, тому в цьому випадку

$$\lambda = \left(\frac{\hbar^2}{m E_{\text{кін}}} \right)^{1/2}. \quad (1.34)$$

Енергія спокою електрона $m = m_e = 0,511$ МеВ мала і умова (1.32), якщо користуватися формулою (1.34), буде виконуватися в ультрарелятивістській області $E_{\text{кін}} \gg mc^2 \sim 0,5$ МеВ, де нерелятивістський вираз для енергії несправедливий. Тому для отримання оцінок енергій електронів треба використовувати

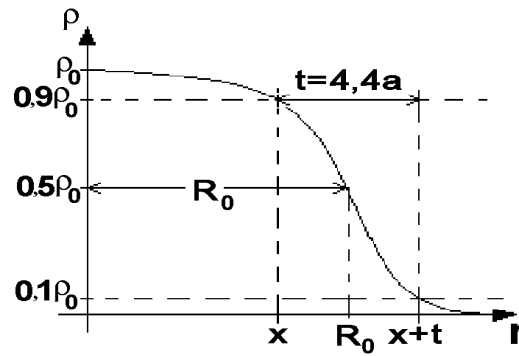


Рис. 1.5. Густина розподілу заряду ядра у вигляді функції Фермі

релятивістське співвідношення між енергією та імпульсом:

$$E_{\text{кін}} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - mc^2, \quad (1.35)$$

зокрема, в ультрарелятивістській області $p \gg mc$ і тому $E_{\text{кін}} \approx pc$. Звідки, враховуючи (1.33), маємо

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{E_{\text{кін}}} \approx \frac{200}{E_{\text{кін}} (\text{MeV})} (\text{фм}), \quad (1.36)$$

і для енергії $E_{\text{кін}} = 20 \text{ MeV}$ отримуємо $\lambda \approx 10 \text{ фм}$. Тому в експериментах з розсіяння електронів за таких енергій можна вивчати розміри ядер.

У результаті таких досліджень було встановлено, що експериментальні дані узгоджуються з неперервним розподілом заряду в ядрі і наближено описуються кривою вигляду

$$\rho(\vec{r}) \equiv \rho(r) = \rho_0 / [1 + \exp((r - R_0)/a)]. \quad (1.37)$$

Такий розподіл називають розподілом Фермі, а вираз (1.37) – формулою Фермі. Вигляд кривої (1.37) показано на рис. 1.5. Вона залежить від трьох параметрів: ρ , R_0 і a . Параметр R_0 є відстанню від центра до точки, де густина стає вдвічі меншою, ніж у центрі. Параметр a має розмірність довжини і характеризує товщину поверхневого шару, тобто швидкість зменшення густини заряду при віддаленні від центра ядра; його називають дифузністю ядра. Параметр ρ_0 визначає густину заряду в центрі ядра (при $R_0 \gg a$). Якщо товщину поверхневого шару t визначити як відстань, на якій густина спадає з $0,9\rho_0$ до $0,1\rho_0$, то для розподілу Фермі (1.37) маємо

$$t = 4,4 a. \quad (1.38)$$

Для ядер зі значеннями A від 40 до 208 товщина t має одне і теж значення – близько 2,4 фм, тобто, $a \simeq 0,55$ фм.

Як величину, що характеризує розміри ядра крім R_0 , вибирають також і середньоквадратичний радіус

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 w(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^\infty r^4 \rho(\vec{r}) dr / \int_0^\infty r^2 \rho(\vec{r}) dr, \quad (1.39)$$

де символом $\langle \dots \rangle$ позначено усереднення за ймовірністю w ,

$$w(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) / \int \rho(\vec{r}) d\vec{r},$$

знаходження нуклона у точці $\vec{r}$.

Для заряду, рівномірно розподіленому по ядру з густиною

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \theta(r - R), \quad (1.40)$$

маємо

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2. \quad (1.41)$$

Величину

$$R \equiv \left[\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle \right]^{1/2} \cong 1,291 [\langle r^2 \rangle]^{1/2} \quad (1.42)$$

називають еквівалентним або середньоквадратичним радіусом однорідного розподілу. А сам однорідний розподіл вигляду (1.40) називають еквівалентним, якщо його радіус R визначається за допомогою (1.42) з величиною $\langle r^2 \rangle$, обчисленою за формулою (1.39) з реальним розподілом $\rho(\vec{r})$. Відзначимо, що коли говорять про радіус ядра, то зазвичай мають на увазі величину R_0 у формулі (1.37). Досліди з вивчення розсіяння швидких електронів дають таке значення для "електромагнітного" радіуса ядра:

$$R_0 = r_0 A^{1/3} \text{ фм}, \quad r_0 = 1,2 \div 1,3 \text{ фм}. \quad (1.43)$$

Якщо немає спеціальних збурень, наприклад зовнішніх електромагнітних полів, у стабільних ядрах розподіл протонів мало відрізняється від розподілу нейтронів, тому радіус розподілу ядерної речовини теж відповідає (1.43), і розміри ядра з достатньо високою точністю визначаються розподілом густини заряду.

У цілому всі існуючі методи визначення та оцінки радіуса ядра показують, що достатньо точно радіус ядра можна виразити емпіричною формулою

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, \quad (1.44)$$

де A – масове число, а величина r_0 є сталою, значення якої за ядерними методами дослідження дорівнює $\sim 1,4$ фм, та $\sim 1,2$ фм – за електромагнітними методами. Різні значення r_0 , отримані з різних дослідів, відображають різні властивості ядра: з одного боку це радіус дії ядерних взаємодій та розподіл ядерної речовини, а з іншого – радіус розподілу електричного заряду. У подальшому для оцінок ми будемо використовувати значення

$$r_0 = 1,25 \text{ фм}. \quad (1.45)$$

Вираз (1.44) приводить до важливого висновку, що об'єм середніх та важких ядер пропорційний числу частинок. Справді

$$V_N = \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A, \quad (R_0 \gg a). \quad (1.46)$$

Це означає, що густина ядерної речовини (M – маса ядра)

$$\rho = \frac{M}{V_N} \equiv \frac{m_u A}{V_N} = \frac{3m_u}{4\pi r_0^3} \cong 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3 \quad (1.47)$$

є однаковою для всіх ядер і її значення надзвичайно велике. Наприклад, для води $\rho_{H_2O} = 1 \text{ г/см}^3$, а для золота $\rho_{Au} = 13 \text{ г/см}^3$. Проте нуклони як геометричні об'єкти займають приблизно лише $1/5$ від об'єму ядра. Дійсно, з дослідів з розсіяння заряджених частинок відомо, що радіус одного нуклона $r_{0,n} \approx 0,75$ фм. Тому для відносного об'єму, який займають нуклони маємо

$$\delta = \frac{A \cdot V_n}{V_N} = r_{0,n}^3 / r_0^3 \cong 0,216 \cong \frac{1}{5}, \quad (1.48)$$

де V_n – об'єм, що займає один нуклон.

Опис нейтронної та протонної густини розподілом Фермі (1.37) відповідає моделі сферичного ядра з розмитим краєм. Необхідно відзначити, що ця модель не описує всі деталі розподілу ядерної речовини і її параметри R_0 та a визначають лише середні характеристики розподілу. Сучасні експерименти показують, що в нейтронно-надлишкових ядрах радіус розподілу нейтронної густини може значно перевищувати радіус розподілу протонної густини. Таке перевищення радіусів називають явищем існування нейтронної шкіри. У багатьох легких

ядрах нейтронний розподіл більш дифузний ніж протонний. Такий ефект називають нейтронним гало.

Відхилення форми поверхні ядра від сферично-симетричної описують, припускаючи, що радіальний параметр $R(\theta, \varphi)$ залежить від кутових змінних. За малих відхилень від сферичної симетрії, у внутрішній системі координат, що жорстко зв'язаний з ядром, здебільшого використовують розклад $R(\theta, \varphi)$ за сферичними гармоніками $Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi)$ (див. (3.5.)):

$$R(\theta, \varphi) = R'_0 \left(1 + \sum_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda_m} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right), \quad (1.49)$$

де θ, φ – полярний та азимутальний кути; R'_0 – середній радіус ядра; $\beta_{\lambda\mu}$ – коефіцієнти, які називають параметрами деформації ядра. Радіус R'_0 залежить від параметрів деформації і знаходиться з вимоги рівності об'ємів даного ядра з деформованою поверхнею радіуса $R(\theta, \varphi)$ та зі сферичною поверхнею радіуса R_0 :

$$V_N \equiv \int d\vec{r} \equiv \int dx dy dz \equiv \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R_0^3, \quad (1.50)$$

де згідно з експериментальними дослідженнями радіус ядра з A нуклонами з формою рівновеликої сфери дорівнює $R_0 = r_0 A^{1/3}$.

Сферичні гармоніки $Y_{\lambda\mu}$ утворюють повну систему функцій, тому за допомогою (1.49) можна описати неперервну гладку поверхню з будь-якою складною формою. У частковому випадку аксіально-симетричних ядер, тобто коли $\beta_{\lambda\mu} = 0$ при $\mu \neq 0$, радіус R не залежить від азимутального кута і його подають у вигляді розкладу за поліномами Лежандра $P_\lambda(\cos \theta)$ порядку λ :

$$R(\theta) = R'_0 \left(1 + \sum_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda_m} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_\lambda P_\lambda(\cos \theta) \right), \quad \lambda_m \rightarrow \infty, \quad (1.51)$$

$$P_\lambda(\chi) = \frac{1}{2^\lambda \lambda!} \left(\frac{d}{d\chi} \right)^\lambda (\chi^2 - 1), \quad (1.52)$$

де параметри деформації α_λ зв'язані з $\beta_{\lambda 0}$ співвідношенням

$$\alpha_\lambda = \sqrt{\frac{2\lambda + 1}{4\pi}} \beta_{\lambda 0}, \quad (1.53)$$

оскільки $Y_{\lambda 0}(\theta, \varphi) = P_{\lambda}(\cos \theta) \sqrt{(2\lambda + 1)/4\pi}$.

Відповідно до загальноприйнятої термінології, деформацію, що відповідає $\lambda = 0$, називають монопольною, $\lambda = 1$ – дипольною, $\lambda = 2$ – квадрупольною, $\lambda = 3$ – октупольною, $\lambda = 4$ – гексадекапольною і так далі. Аксіально-деформовані ядра у присутності лише квадрупольної деформації мають форму еліпсоїда обертання (див., рис. 1.6, 1.9) і називають сфероїдальними ядрами. Якщо тільки квадрупольна та октупольна деформації аксіально-симетричного ядра відмінні від нуля, то ядра має грушевидну форму. Ядра з параметрами деформаціями поверхні $\beta_{\lambda\mu} \neq 0$ при $\mu \neq 0$ називають неаксіально-деформованими.

Коливання з $\lambda = 1$ у першому наближенні за $\beta_{\lambda\mu}$ відповідають зміщенню ядра як цілого і не повинні враховуватися при малих деформаціях. Тому при $\beta_{\lambda\mu} \ll 1$ у розклади (1.50) і (1.51) входять тільки члени з $\lambda_0 \geq 2$. Оскільки число нуклонів у ядрі скінченне, то значення λ обмежені зверху. Дійсно, число максимумів поверхні, що описується формулою (1.51) із скінченним, але великим значенням λ_m , пропорційне λ_m^3 . Отже, щоб кожний максимум поверхні міг містити хоча б один нуклон, необхідно виконання умови

$$\lambda_m^3 \leq A, \text{ тобто } \lambda_m \leq A^{1/3}. \quad (1.54)$$

Ядра, у яких значення параметрів $\beta_{\lambda\mu}$, α_{λ} не залежать від часу, називають жорстко деформованими; кажуть, що такі ядра мають статичну деформацію. Найбільш істотний вклад в опис форми поверхні статично деформованих ядер дають квадрупольна та гексадекапольна деформації, тобто члени в (1.49) і (1.51) з $\lambda = 2$ і 4. Ядра вважаються дуже деформованими вже при $\alpha_2 \simeq 0,2$. Приклад впливу параметра гексадекапольної деформації α_4 на форму аксіально-деформованого ядра показаний на рис. 1.6.

1.6. Спін та парність ядра

Атомне ядро, як і будь-яка інша ізольована система, характеризується повним моментом кількості руху або інакше – спіном ядра, який зберігається в часі. Цей закон збереження є проявом інваріантності простору відносно поворотів. Наявність відмінного від нуля спіну означає, що частинка в чомусь подібна до дзиги, що обертається. Але до такої наочної аналогії необхідно підходити з обережністю, оскільки квантові властивості мікрооб'єктів істотно змінюють

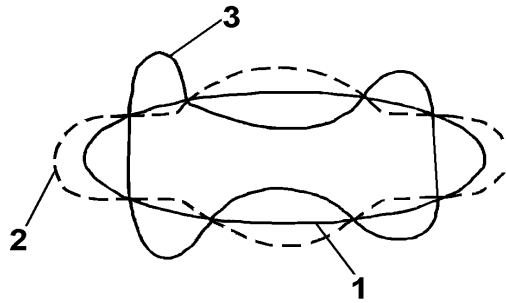


Рис. 1.6. Вплив гексадекапольної деформації на форму аксіально-деформованого ядра з $\alpha_2 = -0,47$:

1 - $\alpha_4 = 0$; 2 - $\alpha_4 = +0,24$; 3 - $\alpha_4 = -0,24$

інтерпретацію моменту кількості руху при переході до мікросвіту. Оскільки ядро є мікрооб'єктом, то збереження моменту кількості руху треба розглядати мовою квантової механіки, де стан частинки або системи частинок описується деякою хвильовою функцією ψ . Наявність у системи фіксованого повного кутового моменту означає, що хвильова функція є власною функцією квадрата векторного оператора $\hat{\vec{I}}$ повного моменту кількості руху (тобто оператора $\hat{\vec{I}}^2$)

$$\hat{\vec{I}}^2 \equiv (\hat{\vec{I}} \cdot \hat{\vec{I}}) = \hat{I}_x^2 + \hat{I}_y^2 + \hat{I}_z^2, \quad \hat{\vec{I}} = \hat{e}_x \hat{I}_x + \hat{e}_y \hat{I}_y + \hat{e}_z \hat{I}_z, \quad (1.55)$$

де $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ – одиничні вектори відповідно вздовж осей X, Y, Z , а величини $\hat{I}_x, \hat{I}_y, \hat{I}_z$ – оператори проекцій повного моменту на осях, що вказані індексами. Кожен із цих операторів складається з суми операторів проекцій орбітального моменту ($\hat{l}_j$) і спіну ($\hat{s}_j$) окремих нуклонів. Наприклад, для оператора проекцій на вісь Z маємо

$$\hat{I}_z = \sum_{i=1}^A [\hat{l}_z(i) + \hat{s}_z(i)]. \quad (1.56)$$

Оператор $\hat{\vec{I}}^2$ комутує з операторами проекцій,

$$[\hat{\vec{I}}^2, \hat{I}_j] = 0, \quad j = x, y, z; \quad [\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a},$$

а оператори проекцій на різні осі не комутують між собою,

$$[\hat{I}_x, \hat{I}_y] = i\hbar \hat{I}_z, \quad [\hat{I}_y, \hat{I}_z] = i\hbar \hat{I}_x, \quad [\hat{I}_z, \hat{I}_x] = i\hbar \hat{I}_y. \quad (1.57)$$

Це означає, що одночасно з квадратом моменту може бути виміряна тільки одна проекція. Тому кожен стан характеризується власним значенням квадрату

оператора повного кутового моменту та проекцією $\hbar M$ кутового моменту, зазвичай на вісь Z , а хвильова функція стану є власною функцією операторів $\hat{I}^2$ та $\hat{I}_z$:

$$\hat{I}^2 \psi_M^I = \hbar^2 I(I+1) \psi_M^I, \quad \hat{I}_z \psi_M^I = \hbar M \psi_M^I. \quad (1.58)$$

У квантовій механіці доводиться, що квантові числа I , які визначають власні значення квадрату оператора повного моменту, можуть набувати тільки цілих або півцілих значень

$$I = (2n+1)/2, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.59)$$

Власні значення $\hbar M$ оператора проекції кутового моменту (проекція моменту) є також дискретними і при заданому I можуть мати лише $2I+1$ значень

$$-\hbar I, \hbar(-I+1), \dots, \hbar(I-1), \hbar I. \quad (1.60)$$

Коли вказують значення спіну ядра, то мають на увазі квантове число I , яке згідно з (1.58) визначає власне значення оператора квадрата повного кутового моменту. Якщо користуватися квазікласичною інтерпретацією і розглядати кутовий момент як деякий вектор $\vec{I}$ у координатному просторі, то треба вважати, що модуль цього вектора дорівнює

$$|\vec{I}| = \hbar \sqrt{I(I+1)}. \quad (1.61)$$

У ядерній фізиці кутові моменти та спіни мікрооб'єктів вимірюють в одиницях сталої Планка

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с} = 6,582 \cdot 10^{-22} \text{ Мев} \cdot \text{с}. \quad (1.62)$$

Розглянемо більш детально оператори орбітального та спінового моментів окремого нуклона. У класичній механіці орбітальний момент точкової частинки є векторним добутком її радіуса-вектора $\vec{r}$ та імпульсу $\vec{p}$:

$$\vec{l} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] \equiv \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}. \quad (1.63)$$

Перехід до квантової механіки здійснюється заміною класичного імпульсу оператором імпульсу $\hat{\vec{p}}$:

$$\vec{p} \Rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}; \quad \vec{\nabla} \equiv \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.64)$$

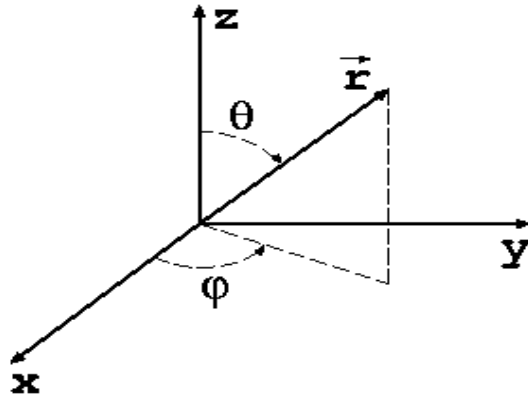


Рис. 1.7. Сферична система координат

Оператори проєкцій орбітального моменту мають досить простий вигляд у сферичній системі координат (r, θ, φ) з модулем r радіуса-вектора $\vec{r}$, полярним кутом θ і азимутальним кутом φ (рис. 1.7):

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\
 y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\
 z &= r \cos \theta; \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 0 \leq r < \infty, \\
 \theta &= \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\
 \varphi &= \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Враховуючи формули (1.63) – (1.65), маємо

$$\begin{aligned}
 \hat{l}_x &= y\hat{p}_z - z\hat{p}_y = -i\hbar \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \\
 \hat{l}_y &= z\hat{p}_x - x\hat{p}_z = -i\hbar \left[-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \\
 \hat{l}_z &= x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \\
 \hat{l}^2 &= \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right],
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

де $\hat{l}^2 \equiv (\hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{l}})$ – оператор квадрата орбітального моменту; $\hat{\vec{l}} = \hat{e}_x \hat{l}_x + \hat{e}_y \hat{l}_y + \hat{e}_z \hat{l}_z$.

Якщо частинки рухаються у вільному просторі або в центрально-симетричному полі з потенціалом взаємодії $V(|\vec{r}|)$, оператори $\hat{l}^2$ і $\hat{l}_z$ комутують з гамільтоніаном $\hat{H}$,

$$\hat{H} = \begin{cases} \frac{\hat{p}^2}{2m} & \text{— вільна частинка,} \\ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(|\vec{r}|) & \text{— центрально-симетричне поле,} \end{cases}$$

$$[\hat{H}, \hat{l}^2] \equiv \hat{H}\hat{l}^2 - \hat{l}^2\hat{H} = 0; \quad [\hat{H}, \hat{l}_z] \equiv \hat{H}\hat{l}_z - \hat{l}_z\hat{H} = 0, \quad (1.67)$$

і тому будуть зберігатися власне значення оператора $\hat{l}^2$ та проекція m_l кутового моменту на вісь Z , а хвильові функції будуть власними функціями операторів квадрату кутового моменту і проекції $\hat{l}_z$:

$$\hat{l}^2\psi_{m_l}^l = \hbar^2 l(l+1)\psi_{m_l}^l, \quad \hat{l}_z\psi_{m_l}^l = \hbar m_l\psi_{m_l}^l. \quad (1.68)$$

Тут l — ціле квантове число, що визначає власне значення квадрата оператора кутового моменту (саме воно і називається кутовим моментом). Проекція квантового моменту $\hbar m_l$ набуває $2l+1$ цілих значень: $-\hbar l, \hbar(-l+1), \dots, \hbar(l-1), \hbar l$. Широко використовують таку термінологію для позначення станів з різними значеннями орбітального кутового моменту: якщо $l=0$, то кажуть, що частинка перебуває в s (sharp)-стані, якщо $l=1$, то в p (principal)-стані, якщо $l=2$ і 3 — в d (diffuse) і f (fundamental) станах, а якщо $l=4, 5, 6, \dots$, то — у станах $g, h, i, \dots$ (позначення в порядку появи літер латинського алфавіту):

Значення l : 0 1 2 3 4 5 6

Символ стану: s p d f g h i

Зазначимо, що у двочастинкових системах, таких як атом водню або ядро дейтрону, замість орбітального моменту кожної частинки зазвичай розглядають орбітальний момент відносного руху частинок.

Тепер розглянемо спіновий момент окремої частинки. Внутрішній (спіновий) момент частинки, незв'язаний з орбітальним рухом, вперше був відкритий в електроні. Зокрема, досліди Штерна–Герлаха з вивчення проходження пучків атомів водню та срібла через сильнонеоднорідне магнітне поле продемонстрували існування двох орієнтацій магнітного моменту електрона, не пов'язаних з

його орбітальним рухом, і дали можливість явно визначити додатковий власний момент кількості руху електрона, який отримав назву "спін". Його прийнято позначати літерою s . У дослідах Штерна–Герлаха було показано, що з електроном пов'язаний спін $1/2$ (в одиницях $\hbar$). Експерименти з визначення спінів протона та нейтрона також показують, що обидві ці частинки, подібно до електрона мають спін $1/2$. Аналогічно, як і у випадку орбітального моменту власне значення оператора квадрату спінового моменту

$$\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2 \quad (1.69)$$

має вигляд

$$\lambda_{s^2} = \hbar^2 s(s+1), \quad (1.70)$$

де s – спінове число, яке і називається спіном.

Проекція $\hbar m_s$ на виділений напрям z може набувати $(2s+1)$ значення. Для електрона та нуклонів $s = 1/2$ і тому $\hbar m_s$ набуває двох можливих значень:

$$\hbar m_s = \pm \frac{1}{2} \hbar. \quad (1.71)$$

У спіна немає аналогу в класичній фізиці і його не можна виразити ні через класичні значення координат та імпульсів, ні через квантові оператори цих величин. Оскільки ймовірність того чи іншого значення проекції спіну не залежить від координат частинки, що рухається вільно, то хвильову функцію такої частинки зі спіном s і проекцією m_s можна записати у вигляді

$$\psi(\vec{r}, t, s) = \varphi(\vec{r}, t) \chi_{sm_s}, \quad (1.72)$$

де $\varphi(\vec{r}, t)$ – координатний компонент хвильової функції; χ_{sm_s} – спінова хвильова функція. Розглянемо випадок, коли оператор спіну $\hat{\vec{s}}$ відповідає спіну $1/2$. Тоді у представленні, в якому оператор $\hat{s}_z$ є діагональним, оператори всіх інших проекцій спіну мають вигляд двовимірних матриць

$$\begin{aligned} \hat{s}_x &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_x, & \hat{s}_y &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_y, \\ \hat{s}_z &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z, & \hat{\vec{s}} &= \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Матриці σ_x , σ_y , σ_z називаються спіновими матрицями Паулі. Вони задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1, \quad \sigma_i \sigma_k = -\sigma_k \sigma_i = i \sigma_l, \quad (1.74)$$

де індекси i, k, l пробігають значення x, y, z у циклічному порядку. Власні функції операторів $\hat{s}^2 \equiv \hbar^2 \vec{\sigma}^2 / 4$ і $\hat{s}_z = \hbar \sigma_z / 2$ є розв'язками рівнянь:

$$\hat{s}^2 \chi_{\frac{1}{2}m_s} = \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \chi_{\frac{1}{2}m_s}, \quad \hat{s}_z \chi_{\frac{1}{2}m_s} = \hbar m_s \chi_{\frac{1}{2}m_s}. \quad (1.75)$$

Згідно з (1.73) – (1.75) спінові функції можна записати у такій матричній формі:

$$\chi_{\frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}} \equiv \chi_{\frac{1}{2}m_s = \frac{1}{2}}(s_z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi_{\frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}} \equiv \chi_{\frac{1}{2}m_s = -\frac{1}{2}}(s_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

Спінові функції ортонормовані й умова ортонормованості у матричних позначеннях має вигляд

$$\chi_{\frac{1}{2}m_s}^+ \chi_{\frac{1}{2}m'_s} = \delta_{m_s m'_s}, \quad (1.77)$$

де символ $^+$ – знак ермітового спряження.

У багатьох ядрах зберігається повний момент окремого нуклона $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$ з власними функціями $\psi_{m_j}^j$:

$$\hat{j}^2 \psi_{m_j}^j = \hbar^2 j(j+1) \psi_{m_j}^j, \quad \hat{j}_z \psi_{m_j}^j = \hbar m_j \psi_{m_j}^j. \quad (1.78)$$

Оператор повного кутового моменту є векторною сумою операторів орбітального та спінового моментів, тому для частинок зі спіном $1/2$ він набуває тільки півцілих значень $j = l \pm 1/2$. У випадку, коли зберігаються моменти окремих нуклонів, оператор повного кутового моменту ядра є векторною сумою їхніх операторів.

Для експериментального визначення спінів атомних ядер було запропоновано цілу низку методів. Найбільш ранні з них пов'язані з вивченням надтонкої структури оптичних спектрів, більш сучасні – використовують радіоспектроскопічну техніку і полягають у дослідженні поведінки ядер у магнітному полі. Усі ці методи ґрунтуються на зв'язку спіну з магнітним моментом та появі у частинки з магнітним моментом додаткової енергії при її русі у магнітному полі. Спіни короткоживучих ізотопів і ядер у збуджених станах визначають методами ядерної спектроскопії, а також з ядерних реакцій на підставі закону

збереження повного моменту кількості руху, який виконується як у класичній, так і у квантовій системах.

Аналіз спінів різних ядер дозволив установити такі закономірності.

1. При парному значенні масового числа A спін основного стану ядра завжди цілий, а при непарному – півцілий. Історично цей факт зіграв вирішальну роль при переході від протонно-електронної моделі ядра до протонно-нейтронної. Дійсно, з правил векторного додавання операторів кутових моментів випливає, що якщо в системі частинок зі спіном $1/2$ їх кількість парна, то спін набуває цілого значення, а якщо непарна – то півцілого. Тому, якщо б, наприклад, дейтрон складався з двох протонів та електрона, то значення його спіну було б півцілим у той час як експериментальне значення – ціле і дорівнює одиниці.

2. Спіни усіх парно-парних ядер в основних станах дорівнюють нулю. Цей факт указує на те, що в явищі спарювання нуклонів (відзначеному при розгляді масової формули) беруть участь два нуклони з протилежно орієнтованими моментами кількості руху і тому сумарний момент пари дорівнює нулю. Іншими словами, існує особлива енергетична вигідність групування нуклонів у пари з сумарним нульовим моментом.

3. Спіни основних станів стабільних ядер навіть за дуже великих значень масових чисел A не перевищують $9/2$, тобто малі відносно суми значень спінів і орбітальних моментів усіх частинок, що входять до складу ядра. Це вказує на те, що спін ядра формує відносно невелика кількість нуклонів, а основна частина нуклонів об'єднується у групи, що мають нульовий сумарний момент (зв'язана у замкнутих оболонках).

Крім спіну, його проекції та енергії, ядерні стани можуть характеризуватися також іншими квантовими числами, що зв'язані з інваріантністю системи відносно деяких операцій симетрії. Згідно з квантовою механікою поведінка системи визначається гамільтоніаном $\hat{H}$ і якщо гамільтоніан інваріантний відносно деяких перетворень, тобто не змінюється при таких перетвореннях, то в системі існують і зберігаються додаткові квантові числа, які пов'язані з інваріантністю відносно даної операції симетрії. У нерелятивістському наближенні гамільтоніан системи A нуклонів має вигляд (для простоти спінові індекси не вказані, і підсумовування виконується за всіма нуклонами)

$$\hat{H}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (1.79)$$

який не змінюється при інверсії координат, тобто при зміні знака всіх декартових координат вектора $\vec{r}$ на протилежні $-\vec{r}$. Наявність такої симетрії приводить до того, що хвильові функції $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A, t)$, які описують рух частинок за допомогою рівняння Шредінгера

$$+i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi, \quad (1.80)$$

поділяються на два класи парних та непарних функцій:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{парн}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) &= \psi_{\text{парн}}(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A), \\ \psi_{\text{непарн}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) &= -\psi_{\text{непарн}}(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Парні функції $\psi_{\text{парн}}$ незалежні від зміни знаків декартових координат усіх частинок, а непарні змінюють знак. Парність хвильових функцій зберігається з часом і визначається початковими умовами. Парність та поведінка системи при інверсії безпосередньо пов'язані з інваріантністю системи стосовно дзеркальної симетрії. В одновимірному випадку перетворення інверсії та дзеркальної симетрії тотожні.

Проаналізуємо парність хвильової функції детальніше. Інваріантність системи відносно інверсії означає, що ймовірність її знаходження у будь-якій точці багатовимірного простору не змінюється при операції інверсії. Оскільки густину цієї ймовірності визначає квадрат хвильової функції $|\psi|^2$, то умова інваріантності щодо інверсії має вигляд

$$|\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)|^2 = |\psi(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A)|^2, \quad (1.82)$$

де координати $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A$ задано у системі центра інерції.

Уведемо оператор інверсії $\hat{P}_r$, що змінює знаки всіх просторових декартових координат у хвильовій функції:

$$\hat{P}_r \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \psi(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A). \quad (1.83)$$

Власні значення цього оператора, як і будь-якого іншого, визначаються рівнянням

$$\hat{P}_r \psi = \pi_r \psi. \quad (1.84)$$

Величину π_r можна знайти, враховуючи те, що двократне застосування оператора $\hat{P}_r$ не змінює початкової функції

$$\begin{aligned}\hat{P}_r^2 \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) &= \hat{P}_r \left(\hat{P}_r \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \right) = \\ \hat{P}_r \psi(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A) &= \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \equiv \pi_r^2 \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) .\end{aligned}\quad (1.85)$$

Звідки маємо $\pi_r^2 = 1$ і

$$\hat{P}_r \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \pi_r \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A), \quad \pi_r = \pm 1 . \quad (1.86)$$

Таким чином, дійсно хвильові функції систем інваріантних стосовно операції інверсії діляться на два класи – парні ($\pi_r = +1$) та непарні ($\pi_r = -1$).

Покажемо, що для нерелятивістського гамільтоніана вигляду (1.79) парність системи є інтегралом руху, тобто, що тип парності хвильової функції не змінюється з часом. Нехай $\psi^{\pi_r}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A, t)$ хвильова функція даної парності в момент часу t . Знайдемо її в момент часу $t + \tau$. Для цього розкладемо її за степенями τ , вважаючи τ настільки малим, що квадратичним членом можна знехтувати

$$\psi^{\pi_r}(t + \tau) = \psi^{\pi_r}(t) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^{\pi_r} \right) \tau . \quad (1.87)$$

Оскільки з рівняння Шредінгера (1.80) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^{\pi_r} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi^{\pi_r} = -\frac{i}{\hbar} H \psi^{\pi_r} , \quad (1.88)$$

а гамільтоніан інваріантний щодо інверсій, $H(-\vec{r}) = H(\vec{r})$, то похідна $\partial \psi^{\pi_r} / \partial t$ є функцією тієї ж парності, що і ψ^{π_r} . Таким чином, при переході від моменту t до наступного $t + \tau$ парність хвильової функції не змінилася. Послідовно зсуючись у часі на нескінченно малі проміжки τ , переконуємося, що парність хвильової функції ψ не змінюється при будь-якому зсуві в часі, тобто вона є інтегралом руху

$$\hat{P}_r \psi^{\pi_r}(t + \tau) = \pi_r \psi^{\pi_r}(t + \tau) .$$

Тепер розглянемо парність стану окремої частинки, рух якої характеризується орбітальним моментом l . Очевидно, що парність визначається кутовою частиною хвильової функції, оскільки модуль вектора не змінюється при інверсії просторових координат. Хвильова функція з фіксованим значенням l має найпростіший вигляд у сферичній системі координат, де як функція кутів вона пропорційна сферичній гармоніці (див.(3.5.)) і має вигляд

$$y_{l,m_l}(\hat{r}) = C_{l,m_l} Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \equiv C_{l,m_l} P_l^{m_l}(\cos \theta) e^{im_l \varphi} , \quad (1.89)$$

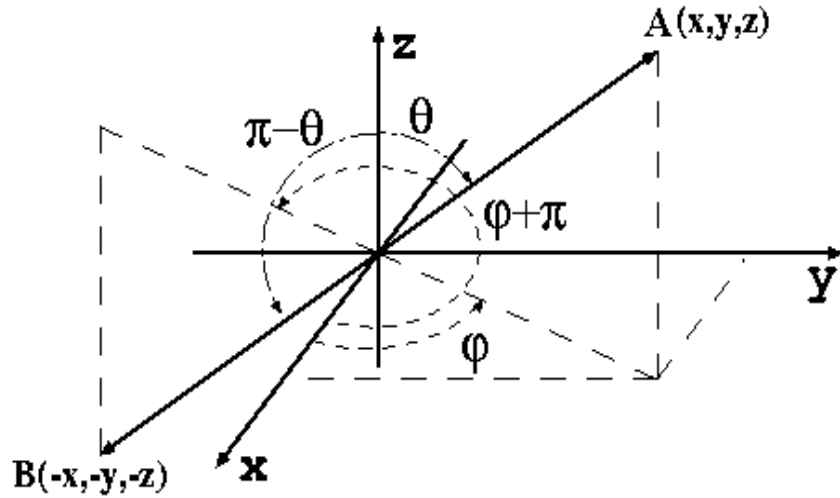


Рис. 1.8. Зміна кутів при інверсії декартових координат

де $\hat{r} = \vec{r}/r$ – одиничний вектор уздовж радіального напрямку; m_l – проекція орбітального моменту на полярну вісь Z , C_{l,m_l} – залежна лише від l і m_l стала; $P_l^{m_l}$ – приєднана функція Лежандра:

$$P_l^{m_l}(\chi) = (-1)^{m_l} (1 - \chi^2)^{m_l/2} \frac{d^{m_l}}{d\chi^{m_l}} P_l(\chi) \quad (1.90)$$

$P_l(\chi)$ – поліноми Лежандра (1.52).

Розглянемо перетворення інверсії у сферичній системі координат (див. рис. 1.8). Математично таке перетворення відповідає переходу від точки $A(x, y, z)$ до точки $B(-x, -y, -z)$, яка розміщена на прямій, що проходить через початок координат і лежить на тій же відстані від початку координат. З рис. 1.8 видно, що у сферичних координатах цей перехід означає таку заміну змінних:

$$r \rightarrow r, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \pi, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta. \quad (1.91)$$

При цих замінах кутова хвильова функція набуває вигляду

$$y_{l,m_l}(-\hat{r}) = (-1)^{m_l} y_{l,m_l}(\hat{r}), \quad (1.92)$$

оскільки $\exp[im_l](\varphi + \pi) = (-1)^{m_l} \exp[im_l\varphi]$, і

$$P_l^{m_l}(\cos[\pi - \theta]) = P_l^{m_l}(-\cos\theta) = (-1)^{l+m_l} P_l^{m_l}(\cos\theta). \quad (1.93)$$

Оскільки при інверсії координат хвильова функція лише множиться на коефіцієнт $(-1)^l$, то і власне значення парності стану частинки з орбітальним моментом l буде дорівнювати

$$\pi_r = (-1)^l. \quad (1.94)$$

Дійсно маємо: $\hat{P}_r y_{l,m_l}(\hat{r}) \equiv y_{l,m_l}(-\hat{r}) = (-l)^l y_{l,m_l}(\hat{r}) \equiv \pi_r y_{l,m_l}(\hat{r})$.

Дослідження ядерних перетворень показали, що для формулювання закону збереження парності у загальному випадку необхідно модифікувати поняття парності. Зокрема, кожній частинці з ненульовою масою спокою потрібно поставити у відповідність деяку внутрішню парність Π . Значення парності Π є числом, що дорівнює $+1$ або -1 . Частинки, для яких $\Pi = +1$ називаються парними, а з $\Pi = -1$ – непарними. У загальному випадку парність системи визначається добутком внутрішньої парності частинок і парності хвильової функції їх руху. Стан називається парним, якщо повна парність додатна:

$$\Pi_1 \dots \Pi_A \psi_{\text{парн}}(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A) = \psi_{\text{парн}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \quad (1.95)$$

і непарним, якщо повна парність від'ємна:

$$\Pi_1 \dots \Pi_A \psi_{\text{непарн}}(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A) = -\psi_{\text{непарн}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \quad (1.96)$$

Звідси впливають такі прості правила, за якими можна отримувати правила відбору в ядерних реакціях, а також експериментально визначити внутрішні парності елементарних частинок і атомних ядер:

а) парність π_r частинки з орбітальним моментом l та внутрішньою парністю Π є добутком $\pi_r = \Pi (-1)^l$;

б) внутрішня парність Π_{12} системи з двох частинок із внутрішніми значеннями парності Π_1 і Π_2 та з відносним орбітальним моментом L дорівнює $\Pi_1 \Pi_2 (-1)^L$. Звідки маємо, що внутрішня парність системи частинок з нульовим значенням кутового моменту збігається з її повною парністю.

За експериментальними дослідженнями внутрішні парності протона, нейтрона й електрона є однаковими і додатними. Тоді з правил а), б) отримуємо важливе для теорії ядер та атомів співвідношення, а саме: парність системи з n нуклонів (або електронів) з орбітальними моментами $l_1, \dots, l_n$ дорівнює $(-1)^{l_1 + \dots + l_n}$.

Парність основних станів парно-парних ядер припускають додатною і рівною одиниці. Парність основних станів інших ядер може бути як додатною так і від'ємною. Наприклад, основні стани ізотопів кисню $^{17}_8\text{O}$ та азоту $^{14}_7\text{N}$ мають додатну парність, а парності основних станів ізотопів $^{15}_8\text{O}$ та $^{15}_7\text{N}$ – від'ємні.

Ядра у збудженому і основному станах можуть мати різну парність. Наприклад, основний стан у ядрі свинцю $^{208}_{82}\text{Pb}$ має спін 0 і додатну парність (0^+), а його перший збуджений стан – непарний зі спіном 3 (3^-). На схемах ядерних рівнів зазвичай вказують як спін, так і парність кожного рівня. Спін вказують

числом, а парність – знаками "+" та "-" у випадках відповідно додатних та від'ємних значень парності. Ці знаки ставлять зверху значення спіну. Сукупність значень спіну, парності та енергії називається характеристикою ядерного рівня.

1.7. Статичні електромагнітні моменти ядер

Електромагнітні моменти ядра визначають його енергію взаємодії V_{elect} із зовнішніми електромагнітними полями і тому характеризують поведінку ядра в таких полях.

Як відомо з класичної теорії електромагнетизму, реакцію будь-якої системи заряджених частинок на зовнішній електромагнітний вплив можна знайти за допомогою розкладу її енергії V_{elect} взаємодії з зовнішнім електромагнітним полем у ряд за мультипольними моментами. Якщо ρ_e , $\vec{j}_e$ – густини розподілу зарядів і струмів в системі, а $\bar{\varphi}$, $\vec{\mathcal{A}}$ – скалярний і векторний потенціали електромагнітного поля, то маємо

$$\begin{aligned} V_{elect} &= \int d\vec{r} \left\{ \rho_e(\vec{r}) \bar{\varphi}(\vec{r}) - \vec{j}_e(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \right\} = \\ &= q \bar{\varphi}_0 - \vec{D} \cdot \vec{E}_0 - \vec{\mu} \cdot \vec{H}_0 - \sum_{i,j} Q_{ij} \left[\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right]_0 + \dots, \end{aligned} \quad (1.97)$$

де індекс "0" означає, що потенціали зовнішнього поля були розкладені у ряд Тейлора в початку координат (тобто у центрі ядра); $q = \sum_a^A e_a$ – повний заряд системи з A частинок, кожна з яких має заряд e_a ; x_j – декартові координати: $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$; $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ – напруженості електричного ($\vec{E} = -\nabla \bar{\varphi}$) та магнітного ($\vec{H} = \text{rot} \vec{\mathcal{A}}$) полів у центрі ядра.

Вектор $\vec{D}$ в (1.97) є електричним дипольним моментом

$$\vec{D} = \int \vec{r} \rho_e(\vec{r}) d\vec{r} = \sum_a e_a \vec{r}_a. \quad (1.98)$$

Зручний для аналізу вигляд дипольний момент має у циклічній системі координат:

$$\vec{D} = \sum_{\mu=0,\pm 1} D_\mu \hat{e}^\mu, \quad (1.99)$$

де

$$\hat{e}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) \quad , \quad \hat{e}^0 = \hat{e}_z, \quad \hat{e}^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y) \quad ,$$

– циклічні контраваріантні одиничні вектори з ортами $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ в декартовій системі координат, а циклічні компоненти дипольного моменту мають вигляд

$$D_\mu = \int r_\mu \rho_e(\vec{r}) d\vec{r}, \quad r_\mu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{1\mu}(\theta, \varphi). \quad (1.100)$$

Тут $Y_{1\mu}$ – сферичні гармоніки першого порядку (див. ф. (3.55)).

Величину Q_{ij} у формулі (1.97) називають тензором квадрупольного моменту (в декартових координатах):

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \int (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho_e(\vec{r}) d\vec{r} = \\ &= \sum_a e_a \left(3x_i^{(a)} x_j^{(a)} - \delta_{ij} r_a^2 \right), \end{aligned} \quad (1.101)$$

де $x_1^{(a)} \equiv x^{(a)}$, $x_2^{(a)} \equiv y^{(a)}$, $x_3^{(a)} \equiv z^{(a)}$ – декартові координати частинки a вздовж осей X , Y та Z відповідно; $r_a^2 = x^{(a)2} + y^{(a)2} + z^{(a)2}$; δ_{ij} – символ Кронекера.

Тензори Q_{ij} можна записати у вигляді лінійних комбінацій квадрупольних моментів виду

$$q_{2m} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int r^2 Y_{2m}(\theta, \varphi) \rho_e d\vec{r}, \quad q_{2-m} = (-1)^m q_{2m}^*, \quad (1.102)$$

де функції Y_{2m} у цій формулі є сферичними функціями квадрупольного типу (див. (3.55)). Використовуючи це співвідношення маємо, що компоненти тензору квадрупольного моменту визначаються величинами q_{lm} за допомогою формул:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= +\frac{\sqrt{6}}{4}(q_{22} + q_{2-2}) - \frac{1}{2}q_{20}, \\ Q_{yy} &= -\frac{\sqrt{6}}{4}(q_{22} + q_{2-2}) - \frac{1}{2}q_{20}, \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$Q_{zz} = q_{20}, \quad Q_{xy} = i\frac{\sqrt{6}}{4}(q_{22} - q_{2-2}),$$

$$Q_{xz} = i\frac{\sqrt{6}}{4}(q_{2-1} - q_{21}), \quad Q_{yz} = -i\frac{\sqrt{6}}{4}(q_{2-1} + q_{21}).$$

З умови ортонормовності сферичних функцій витікає, що у системі зі сферичним розподілом зарядів $q_{2m} = 0$, тобто всі компоненти тензору квадрупольного моменту дорівнюють нулю, $Q_{ij} = 0$. У випадку аксіально-симетричного розподілу заряду інтегрування по азимутальному куту φ у виразі (1.102) приводить до рівності нулю лише значень квадрупольних моментів q_{2m} з $m \neq 0$. Із співвідношень (1.103) маємо, що у системі з аксіально-симетричним розподілом зарядів всі недіагональні компоненти тензора квадрупольного моменту дорівнюють нулю, а діагональні – визначаються квадрупольним моментом $q_{20} = Q_{zz}$. Величина $Q_{zz}/e = q_{20}/e = Q_0$ називається власним або внутрішнім квадрупольним моментом

$$Q_0 \equiv \frac{1}{e}Q_{zz} = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) \rho_e d\vec{r} \equiv \frac{1}{e} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \rho_e d\vec{r}. \quad (1.104)$$

Внутрішній квадрупольний момент має розмірність площі.

Величина $\vec{\mu}$ у розкладі (1.97) є дипольним магнітним моментом. Він характеризує енергію взаємодії системи з зовнішнім магнітним полем $\vec{H}$. У класичній механіці магнітний момент визначається орбітальними моментами частинок і має вигляд:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \times \vec{v}] \rho_e d\vec{r} = \frac{\mu_N}{e\hbar} \int g_l \vec{l}(\vec{r}) \rho_e d\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sum_a e_a \left[\vec{r}^{(a)} \times \vec{v}^{(a)} \right] = \sum_a \frac{\mu_N}{\hbar} g_l(a) \vec{l}_a, \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c},$$

де μ_N – ядерний магнетон; $g_l(a)\mu_N/\hbar$ – орбітальне гіромагнітне відношення; g_l – фактор Ланде орбітального руху: $g_l \equiv g_l(p) = 1$ для протонів і $g_l \equiv g_l(n) = 0$ для нейтронів; $\vec{l}_a = \left[\vec{r}^{(a)} \times \vec{p}^{(a)} \right]$ – орбітальний момент частинки a , що рухається зі швидкістю $\vec{v}^{(a)}$; c – швидкість світла. У квантовій механіці зазвичай розглядають оператор $\hat{\mu}$ проекції магнітного моменту на вісь Z , який будується з проекції магнітного моменту (1.105) заміною проекції орбітального моменту на оператор проекції орбітального моменту і додаванням внеску від спінових моментів частинок.

Розглянемо дипольний момент в основному стані ядра, тобто статичний дипольний момент. Нехай основний стан ядра описується хвильовою функцією $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$. Тоді густину розподілу заряду $\rho_e(\vec{r})$ можна записати у вигляді

$$\rho_e(\vec{r}) = e \rho_p(\vec{r}), \quad \rho_p(\vec{r}) = \sum_{i=1}^Z w_i(\vec{r}), \quad (1.106)$$

де $\rho_p(\vec{r})$ – густина розподілу протонів; $w_i(\vec{r})$ – густина ймовірності знайти i -й протон у точці $\vec{r}$,

$$w_i(\vec{r}) = \int |\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)|^2 \prod_{k \neq i}^A d\vec{r}_k, \quad (1.107)$$

де інтегрування ведеться за всіма координатами, окрім $\vec{r}_i \equiv \vec{r}$. Вираз для густини розподілу протонів можна переписати у більш зручному вигляді:

$$\rho_p(\vec{r}) = \int |\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)|^2 \sum_{i=1}^Z \delta(\vec{r}_i - \vec{r}) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_A, \quad (1.108)$$

де $\delta(\vec{r}_i - \vec{r})$ – узагальнена тривимірна дельта-функція Дірака, яка в декартовій системі координат є добутком трьох парних одновимірних δ -функцій: $\delta(\vec{r}_i - \vec{r}) = \delta(x_i - x) \delta(y_i - y) \delta(z_i - z)$ таких, що

$$\int_a^b dx \delta(x_i - x) f(x) = \begin{cases} f(x_i), & x_i \in (a, b), \\ 0, & x_i \notin (a, b). \end{cases} \quad (1.109)$$

Враховуючи (1.108), (1.109), формулу (1.98) для дипольного моменту можна записати у вигляді

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^Z e \int \vec{r}_i |\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)|^2 d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_A, \quad (1.110)$$

де інтегрування виконується за всіма координатам $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A$.

Зробимо в інтегралі (1.110) заміну змінних $\vec{r}_i \rightarrow -\vec{r}_i$, тоді за законом збереження парності квадрат модуля хвильової функції $|\psi(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A)|^2 = |\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)|^2$ не змінює свій знак, а компоненти $\vec{r}$ змінюють свій знак на протилежний, тому

$$(\vec{D})_j = -(\vec{D})_j \Rightarrow (\vec{D})_j \equiv 0. \quad (1.111)$$

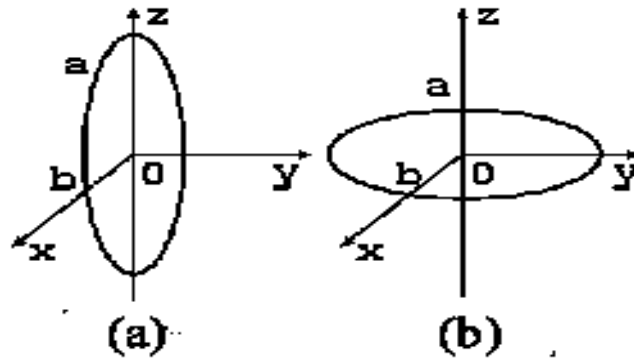


Рис. 1.9. Вид перерізу витягнутого (а) та сплюснутого (b) сфероїдальних ядер уздовж осі симетрії Z

Таким чином, дипольні моменти ядер у стаціонарних станах дорівнюють нулю. Зрозуміло також, що дипольний момент дорівнює нулю в усіх системах, в яких густина розподілу заряду ρ_e пропорційна густині розподілу речовини ρ : $\rho_e = \text{const} \cdot \rho$. Дійсно, у цьому випадку дипольний момент $\vec{D}$ пропорційний вектору центра тяжіння системи

$$\vec{D} \equiv \text{const} \cdot \vec{R}, \quad \vec{R} = \int \vec{r} \rho d\vec{r}, \quad (1.112)$$

значення якого для розкладу (1.97) за визначенням дорівнює нулю.

Тепер розглянемо квадрупольний момент (1.104). При сферичному розподілі густини заряду, тобто для сферичного ядра з постійною густиною заряду, квадрупольний момент дорівнює нулю. Як вже відмічалось вище, це впливає з виразу (1.104) і ортонормованості сферичних функцій Y_{LM} . Розглянемо внутрішній квадрупольний момент для аксіально-деформованого ядра з постійною густиною заряду. Припустимо, що ядро має форму еліпсоїда обертання (рис. 1.9). Нехай a та b півосі еліпсоїда і піввісь a має напрямок вздовж осі Z ,

$$\begin{cases} a = R(\theta = 0), \\ b = R(\theta = \pi/2), \end{cases} \quad (1.113)$$

де $R(\theta, \varphi)$ – радіус еліпсоїда у сферичній системі координат. Якщо густина електричного заряду стала, то отримуємо для ядра з атомним номером Z :

$$Q_0 = \frac{2}{5} Z (a^2 - b^2). \quad (1.114)$$

За малих деформацій, врахувавши співвідношення $R(\theta, \varphi) = R'_0(\beta) (1 + \beta_2 Y_{20}(\theta, \varphi))$ (ф.(1.49) з $\beta_2 \equiv \beta_{20}$) і значення $Y_{20}(\theta = 0, \varphi = 0) = \sqrt{5/4\pi}$, $Y_{20}(\theta = \pi/2, \varphi = 0) = -0,5 \sqrt{5/4\pi}$, формула (1.114) набуває вигляду

$$Q_0 \simeq \frac{6}{5} Z \cdot R_0^2 \frac{\Delta R_0}{R_0} \sim R_0^2 Z \beta_2, \quad (1.115)$$

де $\Delta R_0 = a - R_0$ – різниця півосі a відносно величини R_0 ; R_0 – радіус сферичного ядра еквівалентного об'єму.

Таким чином, якщо відомі значення власних електричних квадрупольних моментів, то можна знайти зміну радіуса в деформованих ядрах і тим самим абсолютне значення і знак параметру деформації ядра; зокрема з рівняння (1.115) випливає, що $Q_0 > 0$ для витягнутого еліпсоїда, та $Q_0 < 0$ для сплюснутого еліпсоїда. У дослідях вимірюють квадрупольні моменти Q у лабораторній системі координат з віссю ординат вздовж напрямку зовнішнього поля. Внутрішні квадрупольні моменти Q_0 характеризують розподіл заряду і обчислюються у власній системі відліку, яка жорстко зв'язана з ядром. Її вісь ординат збігається з віссю симетрії ядра, але не збігається з віссю Z лабораторної системи координат. Тому спостережуваний ("спектроскопічний") квадрупольний момент Q не збігається з власним Q_0 , а є середнім значенням власного моменту відносно напрямку, що задається зовнішнім електричним полем. Орієнтація ядра відносно довільної осі Z визначається орієнтацією його спіну $\vec{I}$ відносно цієї осі та значенням K проекції спіну на вісь симетрії ядра (див. рис. 3.13) і тому різниця між Q і Q_0 залежить від величин I , K . Згідно з квантомеханічними обчисленнями, власний та спостережуваний квадрупольні моменти незбуджених аксіальних ядер ($K = 0$) зв'язані співвідношенням

$$Q = \frac{I(2I - 1)}{(I + 1)(2I + 3)} Q_0 . \quad (1.116)$$

Загалом будь-яке ядро може мати ненульовий внутрішній квадрупольний момент. Але, як видно з цієї формули, спостережуваний квадрупольний момент ядер з $I = 0$, $I = 1/2$, завжди дорівнює нулю незалежно від значення Q_0 .

На рис. 1.10 показано усереднену експериментальну криву залежності власного квадрупольного моменту ядра від числа протонів або нейтронів. Згідно з експериментальними даними квадрупольні моменти ядер мають такі властивості.

1. Уже в дейтроні власний квадрупольний момент відрізняється від нуля, хоча і має невелике значення: $Q_0 = 0,27 \text{ фм}^2$, $Q_0/R_0^2 = 1,18$, де R_0 – радіус дейтрона.

2. Квадрупольні моменти деяких ядер на порядок перевищують їхні квадрати радіусів, тобто значення, які можна очікувати (у відповідність до п.1), якщо квадрупольні моменти формуються рухом окремих нуклонів. Наприклад, для

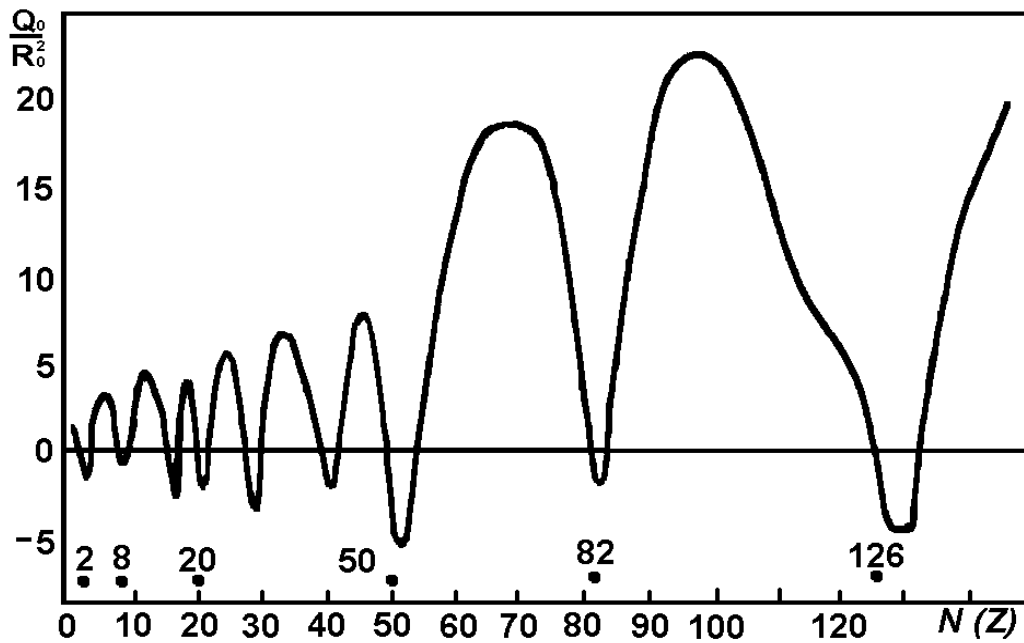


Рис. 1.10. Усереднена поведінка власного квадрупольного моменту

танталу $_{73}\text{Ta}$ маємо $Q_0/R_0^2 = 27,9$. Ця особливість вказує на колективне походження квадрупольних моментів і є свідченням різкої несферичної форми деяких ядер.

3. Квадрупольні моменти більшості ядер додатні, а їхні значення мають певну періодичність. Величина Q_0/R_0^2 коливається між досить великими додатними значеннями, нулем та набуває порівняно малих від'ємних значень. Для магічних значень Z або N власний квадрупольний момент має дуже маленьке значення.

У цілому дослідження квадрупольних моментів відіграло вирішальну роль у створенні узагальненої (колективної) моделі ядра.

Глава 2

Двонуклонні системи та ядерна взаємодія

2.1. Класифікація станів системи двох нуклонів

Властивості ядерної взаємодії простіше всього починати вивчати з систем, що складаються з двох нуклонів. Попередня класифікація станів двонуклонних систем значно спрощує такі дослідження. Розглянемо квантові числа двонуклонних станів, враховуючи закон збереження кутового моменту. У загальному випадку сумарні спіновий та орбітальний моменти нейтрона і протона не зберігаються, а зберігається повний кутовий момент системи I (§¹1.6), який відповідає векторному оператору $\vec{I} = \vec{L} + \vec{S}$ повного моменту кількості руху, де $\vec{L}$ і $\vec{S} = \vec{s}_p + \vec{s}_n$ – векторні оператори орбітального моменту та сумарного спіну протона і нейтрона. У системі з двох нуклонів квадрат оператора спіну $\vec{S}^2$ комутує з гамільтоніаном (§ 2.3), тому сумарний спін такої системи також є інтегралом руху і її стани можна характеризувати значенням спіну. Оскільки повний орбітальний момент задовольняє нерівність $|I - S| \leq L \leq I + S$, то для характеристики станів можна використовувати і значення L .

Відповідно до правил додавання векторних операторів кутових моментів спін S двонуклонної системи лежить в інтервалі $|s_p - s_n| \leq S \leq s_p + s_n$, а значення повного кутового моменту I – у межах $|L - S| \leq I \leq L + S$. Оскільки спіни протона s_p і нейтрона s_n дорівнюють $1/2$, то повний спін S дорівнює або нулю (синглетний стан, коли проекція спіну має одне значення), або одиниці (триплетний стан з трьома значеннями для проекції спіну). У синглетному стані, $S = 0$, момент кількості руху I зумовлений тільки орбітальним рухом нуклонів. У цьому випадку $L = I$ і парність стану визначається парністю по-

¹⁾ Тут і далі символ § використовується для позначення посилань на відповідний підрозділ глав.

Таблиця 2.1
Характеристики найпростіших двочастинкових станів

I	Синглетні стани ($S = 0$)		Триплетні стани ($S = 1$)	
	Парність			
	$\pi = +1$	$\pi = -1$	$\pi = +1$	$\pi = -1$
0	3S_0			3P_0
1		1P_1	$^3S_1 + ^3D_1$	3P_1
2	1D_2		3D_2	$^3P_2 + ^3F_2$

вного моменту: $\pi_r = (-1)^L = (-1)^I$. Для триплетного стану $S = 1$ і оскільки $|I - S| \leq L \leq I + S$, то квантове число L може набувати трьох значень: $I - 1$, I , $I + 1$. Тому парність $\pi_r = (-1)^L$ станів з повним кутовим моментом $I=L$ протилежна парності станів з $I = L \pm 1$. Як і у випадку однієї частинки (§ 1.6), замість числових значень орбітального моменту L використовують спектроскопічні позначення, але з великими літерами:

Значення L : 0 1 2 3 4 5 6

Символ стану: S P D F G H I

Стани системи позначають символами $^{2S+1}L_I$. Наприклад, символ 3D_1 означає, що система перебуває у триплетному стані ($S = 1$) з орбітальним моментом $L = 2$ і повним момент кількості руху $I = 1$.

В триплетних станах $^3(I - 1)_I$ та $^3(I + 1)_I$ (з різними значеннями $L = I \pm 1 \geq 0$) значення спіну ($S = 1$), повного кутового моменту I і парності $(-1)^L = (-1)^{I-1} = (-1)^{I+1}$ однакові, тому ці стани можуть існувати одночасно. Суперпозиція станів, що існують одночасно, називається змішаним станом. Стани 3I_I та 1I_I мають різні значення спіну. Тому вони не змішуються один з одним; такі стани називаються чистими.

Характеристики станів будують, враховуючи нерівність $|I - S| \leq L \leq I + S$ та парність $\pi_r = (-1)^L$. Найпростіші синглетні та триплетні стани приведені в табл. 2.1.

Система, що складається з протона та нейтрона може бути як стабільною так і нестабільною. Наприклад, ядро дейтрону (важкого водню) є стабільним, а нестійка система з двох протонів або нейтронів може утворитися при їх розсіянні.

2.2. Дейтрон та його властивості

Експериментальні дослідження показали, що спін основного стану дейтрона дорівнює одиниці. З табл. 2.1 видно, що у цьому випадку дейтрон може існувати або у чистих станах 1P_1 , 3P_1 , або у змішаному стані $^3S_1 + ^3D_1$. Відмінне від нуля значення електричного квадрупольного моменту дейтрона показує, що орбітальний момент дейтрона не може дорівнювати одиниці, тому основним станом дейтрона є триплетний стан $^3S_1 + ^3D_1$. Іншими словами, хвильова функція дейтрона ψ є суперпозицією хвильових функцій 3S_1 (φ_S) та 3D_1 (φ_D) станів

$$\psi = a_S \varphi_S + a_D \varphi_D \quad (2.1)$$

з амплітудами ймовірностей a_S та a_D , що задовольняють умові

$$a_S^2 + a_D^2 = 1. \quad (2.2)$$

Згідно з експериментальними даними та теоретичними розрахунками домішок D стану малий:

$$(a_D/a_S)^2 \approx 3 \div 4\%. \quad (2.3)$$

Дослідження розсіяння релятивістських електронів у дейтерію дозволило визначити середньоквадратичний радіус $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ розподілу заряду дейтрона, який виявився таким, що дорівнює 2,15 фм. У дейтрона додатний електричний квадрупольний момент Q_0 , що свідчить про його витягнуту форму подібну до сигари. Оскільки радіус нуклона приблизно дорівнює 0,8 фм, то нуклони в дейтроні достатньо розділені.

Енергію зв'язку дейтрона було знайдено при вивченні його фоторозщеплення ($d + \gamma = p + n$); вона дорівнює 2,225 МеВ, що набагато менше за енергію зв'язку інших найлегших ядер. Так, наприклад, енергія зв'язку 3_1H дорівнює 8,5 МеВ, а енергія зв'язку 3_2He – 7,7 МеВ, 4_2He – 28,4 МеВ. Таким чином, дейтрон є досить "пухкою" системою. Він також має досить великий радіус $R_0 = 4,8$ фм. Дійсно, якщо спиратися на стандартну систематику $R_0 = 1,25 A^{1/3}$, то такому радіусу дейтрона відповідало б значення масового числа $A = (4,8/1,25)^3 \approx 56$.

Розглянемо властивості основного стану дейтрона, нехтуючи домішкою D компонента і припускаючи, що потенціал взаємодії між нуклонами можна апроксимувати сферично-симетричною прямокутною ямою з глибиною V_0 та радіусом R . Рівняння Шредінгера для хвильової функції φ_α відносного руху протона

і нейтрона у дейтроні має вигляд:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(r) \right] \varphi_\alpha(r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V(r) \right] \varphi_\alpha(r) = -\varepsilon \varphi_\alpha(r), \quad (2.4)$$

де $V(r) = -V_0 \theta(R - r)$, $r = |\vec{r}_n - \vec{r}_p|$ – відстань між протоном і нейтроном, μ – зведена маса протона і нейтрона: $\mu^{-1} = m_p^{-1} + m_n^{-1} \simeq 2 m_p^{-1}$; ε – енергія зв'язку, що визначає енергію E системи відносно енергії спокою нуклонів, з яких вона складається: $E = -\varepsilon$.

Враховуючи сферичну симетрію потенціалу $V(r)$, рівняння Шредінгера (2.4) зручно розглядати у сферичній системі координат. Оператор Лапласа у такій системі має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\ell}^2}{r^2}. \quad (2.5)$$

Тут оператор $\hat{\ell}^2$ залежить лише від кутових змінних θ, φ сферичної системи координат відносного руху нуклонів і збігається з оператором квадрата орбітального кутового моменту, виміряним в одиницях $\hbar^2$ (§ 1.6):

$$\hat{\ell}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2.6)$$

Якщо система характеризується відносним орбітальним моментом L , то хвильова функція $\varphi_\alpha(\vec{r}) \equiv \varphi_L(\vec{r})$ є власною функцією оператора $\hat{\ell}^2$ і

$$\hat{\ell}^2 \varphi_L = L(L+1) \varphi_L. \quad (2.7)$$

При центральній взаємодії між нуклонами основний стан двонуклонної системи (тобто стан з найменшою енергією) є S -станом з $L = 0$. У цьому випадку рівняння (2.4) значно спрощується, якщо від функції $\varphi_{L=0}(\vec{r})$ перейти до функції $U(r)$

$$\varphi_{L=0}(\vec{r}) = U(r) / r. \quad (2.8)$$

Підставляючи цей вираз у (2.4) і враховуючи (2.5), одержуємо рівняння для функції $U(r)$:

$$U''(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon U(r), \quad (2.9)$$

де $U''(r) = d^2U(r)/dr^2$. Хвильова функція $U(r)$ має також задовольняти граничні умови $U(0) = 0$, $U(\infty) = 0$, перша з яких означає скінченну ймовірність знайти нуклони при нульовій відстані між ними, а друга – обумовлена скінченним радіусом дейтрона.

Інтервал змін координати r розіб'ємо на дві частини: $0 \leq r \leq R$ (область 1) і $r > R$ (область 2). В області 1 рівняння (2.9) набуває вигляду

$$U_1'' + \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - \varepsilon) U_1(r) = 0 \quad (2.10)$$

і має такий розв'язок:

$$U_1(r) = A \sin(\chi r) + \tilde{A} \cos(\chi r), \quad \chi = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - \varepsilon) \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

Оскільки функція φ_L має бути скінченною при $r = 0$, то $U(0) = 0$ і $\tilde{A} = 0$.

Рівняння (2.9) в області 2 має вигляд

$$U_2''(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon U_2(r) = 0. \quad (2.12)$$

Розв'язком цього рівняння є

$$U_2(r) = B e^{-\alpha r} + \tilde{B} e^{+\alpha r}, \quad \alpha = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon \right]^{1/2}. \quad (2.13)$$

Оскільки хвильова функція зв'язаного стану повинна зникати на нескінченності, то $\tilde{B} = 0$. Хвильова функція та її похідна мають бути неперервні у всій області, в тому числі на межі потенціалу $r = R$, тому

$$U_1(r = R) = U_2(r = R), \quad U_1'(r = R) = U_2'(r = R),$$

або

$$A \sin(\chi R) = B \exp(-\alpha R), \quad A \chi \cos(\chi R) = -B \alpha \exp(-\alpha R). \quad (2.14)$$

Ці рівняння (умови "зшивання") містять (за відомого значення V_0) три константи: A , B , ε . Для того, щоб знайти рівняння для ε , поділимо ліві та праві частини співвідношень (2.14). Тоді

$$\chi \operatorname{ctg}(\chi R) = -\alpha. \quad (2.15)$$

Величини

$$\chi \equiv \chi(\varepsilon, V_0) = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - \varepsilon) \right]^{1/2}, \quad \alpha \equiv \alpha(\varepsilon) = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon \right]^{1/2}$$

є функціями амплітуди потенціалу та енергії, тому (2.15) є трансцендентним рівнянням для визначення або енергії при заданому V_0 , або амплітуди взаємодії при відомій енергії зв'язку ε . Константи A та B у загальному виразі для хвильової функції

$$U(r) = A \sin(\chi r) \theta(R - r) + B e^{-\alpha r} \theta(r - R) \quad (2.16)$$

знаходимо таким чином. Із першого з пари рівнянь (2.14) отримуємо відношення : $B/A = \sin(\chi R) \exp(\alpha R)$. Далі, користуючись умовою нормування

$$\int \varphi_{L=0}^2(\vec{r}) d\vec{r} = 4\pi \int_0^\infty U^2 dr = 1, \quad (2.17)$$

обчислюємо величину A . Звідси маємо

$$A^2 = \frac{\alpha}{2\pi(1 + \alpha R)}, \quad B^2 = \frac{\alpha \sin^2(\chi R) e^{2\alpha R}}{2\pi(1 + \alpha R)}. \quad (2.18)$$

У граничному випадку потенціалу нульового радіуса дії ядерних сил ($R \rightarrow 0$) нормована хвильова функція $U(r)$ основного стану має вигляд

$$U(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{-\alpha r}. \quad (2.19)$$

Розв'язок трансцендентного рівняння (2.15), який визначає енергії, залежить від параметра

$$x_0 = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 R^2 \right]^{1/2}. \quad (2.20)$$

Дійсно, рівняння (2.15) можна переписати у вигляді зручної для графічного аналізу системи двох трансцендентних рівнянь,

$$\begin{cases} y = -x \operatorname{ctg}(x), \\ x^2 + y^2 = x_0^2, \end{cases} \quad (2.21)$$

розв'язки якої залежать лише від x_0 ; $y = \alpha R$, $x = \chi R$.

Кола $x^2 + y^2 = x_0^2$ різних радіусів x_0 та крива $y = -x \operatorname{ctg}(x)$ зображені на рис. 2.1. Точки перетину цих двох кривих і є розв'язками рівняння (2.14). Згідно з виразом (2.20), коло радіуса $x_0 \equiv n$, що дорівнює деякому числу n , відповідає випадку

$$V_0 R^2 = x_0^2 \frac{\hbar^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2 n^2}{2\mu}. \quad (2.22)$$

В області $y \geq 0$ гілка кривої $y = -x \operatorname{ctg}(x)$, яка найближче розташована до нуля координат, починається з точки $x_0 = \pi/2$, $y = 0$ і далі круто зростає до нескінченності при $x = \pi$; наступна гілка цієї функції починається лише при $x_0 = 3\pi/2$. Тому при $x_0 < \pi/2$ ($V_0 R^2 < \pi^2 \hbar^2 / (8\mu)$) рівняння (2.21) розв'язків не мають, і зв'язані стани в системі протон-нейтрон відсутні. Якщо x_0 лежить в інтервалі $\pi/2 < x_0 < 3\pi/2$ ($\pi^2 \hbar^2 / (8\mu) < V_0 R^2 < 9\pi^2 \hbar^2 / (8\mu)$), то функції $x^2 + y^2 = x_0^2$, $y = -x \operatorname{ctg}(x)$ можуть перетинатися лише один раз і система (2.21) може мати лише один розв'язок, тобто для x_0 у цій області може існувати лише один стан. Таким чином, параметри взаємодії найнижчого стану у $n - p$ системі з потенціалом у вигляді прямокутної ями лежать у такому інтервалі значень

$$\frac{1}{8} \frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu} < V_0 R^2 < \frac{9}{8} \frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu}. \quad (2.23)$$

Згідно з цим співвідношенням, можливість утворення стійкої протон-нейтронної системи залежить не від окремо взятих значень V_0 і R , а від їх добутку $V_0 R^2$. Тобто стійкий стан дейтрона може виникати як у випадку широкого і мілко-го потенціалу, так і у випадку вузької, але глибокої потенціальної ями. Із даних про розсіяння нуклонів для радіуса дії ядерних сил можна взяти значення $R \approx 1,7$ фм і тоді нерівність (2.23) означатиме, що глибина потенціалу повинна лежати в інтервалі $35 \leq V_0 < 320$ МеВ. Числове розв'язання рівняння (2.15) при $\varepsilon = 2,225$ МеВ дає для глибини потенціалу значення $V_0 \simeq 35$ МеВ, яке більше ніж на порядок перевищує енергію зв'язку дейтрона. Відзначимо, що радіус дейтрона R_0 відрізняється від радіуса R дії сил між нуклонами. Згідно з (2.19) на відстані $R'_0 = 1/\alpha = \hbar/\sqrt{2\mu\varepsilon}$ амплітуда ймовірності існування дейтрона зменшується приблизно в e разів і тому часто саме це значення використовують як його радіус: $R_0 \simeq R'_0 = 4,3$ фм.

У випадку центральних ядерних сил у дейтрона немає зв'язаних збуджених станів. Дійсно, з рис. 2.1 видно, що другий розв'язок рівнянь (2.21), тобто збу-

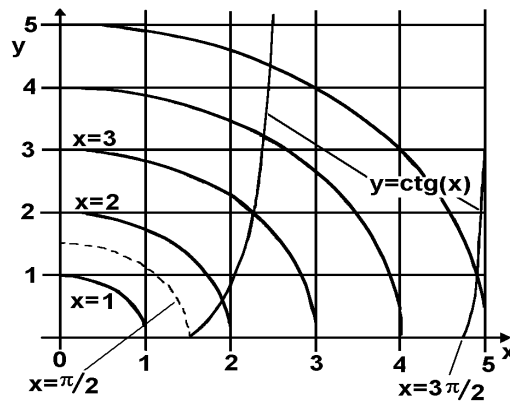


Рис. 2.1. Графічний аналіз станів дейтрона у прямокутній ямі

джений зв'язаний стан з нульовим орбітальним моментом, може існувати лише за умови $x_0 \geq 3\pi/2$, якщо

$$V_0 R^2 \geq \frac{9\hbar^2 \pi^2}{8\mu} \approx 320 \text{ MeV}, \quad (2.24)$$

але ця умова суперечить (2.23). Дейтрон також не може мати зв'язаних збуджених станів з $L \neq 0$, і вже P -стан відповідає області неперервного спектра, оскільки, при $L \neq 0$ діє відцентрова енергія і при $L = 1$ ця енергія наближено дорівнює $\hbar^2 L(L+1)/(\mu R_0^2) \simeq 4\hbar^2/(m R_0^2) \simeq 7 \text{ MeV}$ та перевищує енергію зв'язку дейтрона.

2.3. Загальні властивості ядерних сил

Як було продемонстровано у попередньому розділі, нуклони в ядрах утримуються специфічними ядерними силами з дуже великою інтенсивністю на малих відстанях. За сучасними поглядами ядерні сили між нуклонами є виявом сильної кварк-глюонної взаємодії. Послідовна теорія таких сил дуже складна (§ 2.5). Тому будують їхні моделі і використовують різні напівемпіричні параметризації залежності ядерних сил від відстаней між нуклонами та від їхніх спінів. Ядерні сили виявляються у трьох групах процесів:

- а) як парна взаємодія двох нуклонів у вільному просторі, що приводить до існування дейтрона та зумовлює розсіяння нуклона нуклоном;
- б) як взаємодія вільних нуклонів зі складними ядрами та ядер один з одним (найбільш вивчена взаємодія при розсіянні нуклонів на ядрах);
- в) як ефективна взаємодія між нуклонами всередині ядра, коли пара нуклонів взаємодіє в оточенні інших нуклонів.

Розглянемо властивості ядерних сил, які вдається отримати з експериментальних даних та розглянемо деякі наближення, які використовуються при їх аналізі.

1. Ядерні сили є короткодійними силами з радіусом дії $R \sim 1 \div 2$ фм. Інтенсивність ядерних сил на відстанях їх дії на $2 \div 3$ порядки більша ніж електромагнітних сил, оскільки вони приводять до утворення більш стабільних систем. Пояснимо це твердження. Ядерні сили забезпечують існування атомних ядер з середньою енергією зв'язку близько 8 МеВ, що становить приблизно 10^{-2} від енергії спокою нуклона $m_p c^2 \approx 940$ МеВ. Електромагнітні сили приводять до утворення електронної оболонки атома водню з енергію зв'язку електрона 13,6 еВ, що становить близько 10^{-5} від енергії спокою електрона $m_e c^2 \simeq 0,5$ МеВ, співвідношення факторів 10^{-2} та 10^{-5} і приводить до значення $\simeq 10^3$.

2. При не дуже високих енергіях ядерні сили можна вважати потенціальними і явно не враховувати внутрішню структуру нуклонів. Для ядерних сил найбільш часто використовують двочастинкове наближення і розглядають їх як сукупність бінарних взаємодій V_{ij} . У цьому випадку потенціальну енергію взаємодії системи нуклонів записують у вигляді

$$V = \sum_{i>j}^A V_{ij} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A V_{ij}, \quad (2.25)$$

де множник одна друга враховує те, що в останню суму внески від взаємодії між парою нуклонів входять два рази.

У ядрах існують і багаточастинкові ядерні сили, що прямують до нуля при віддаленні на нескінченність хоча б одного із взаємодіючих нуклонів. У вільному просторі ними можна знехтувати. В ефективних силах між нуклонами в ядрах, як правило, враховують тричастинковий компонент взаємодії (див. (2.74)).

3. У деяких задачах виявляється достатнім використовувати так зване наближення центральної взаємодії, коли потенціал V взаємодії залежить тільки від відстані $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ між нуклонами: $V \equiv V(r)$. Були запропоновані і використовуються різні типи феноменологічних виразів для їх опису, наприклад,

потенціал типу Гаусса: $V(r) = -V_0 \exp(-\chi r^2)$,

потенціал Юкави: $V(r) = -V_0 \chi \exp(-\chi r)/r$,

точкова (контактна) взаємодія: $V(r) = -V_0 \delta(\vec{r})$,

прямокутна потенціальна яма: $V(r) = -V_0 \theta(R - r)$,

експоненціальний потенціал: $V(r) = -V_0 \exp(-\chi r)$,

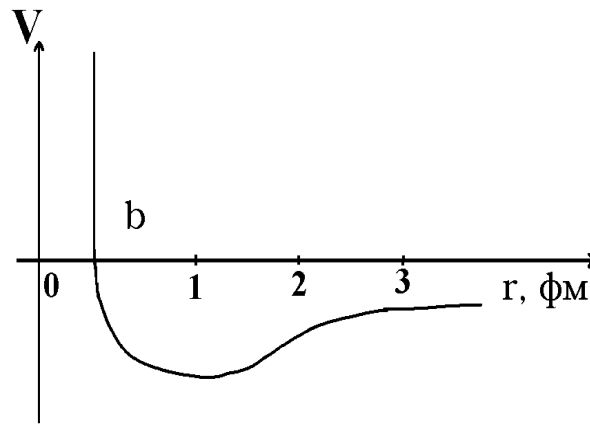


Рис. 2.2. Схематичний вигляд радіальної залежності ядерної взаємодії

потенціал Вудса – Саксона: $V(r) = -V_0 / (1 + \exp[(r - R)/a])$.

Основна властивість цих виразів є їх від’ємність та швидке спадання зі збільшенням відстані. Величини V_0 називаються глибинами відповідних потенціалів. Згідно з експериментальними даними для взаємодії із скінченим радіусом дії $V_0 \approx 50$ MeV.

4. Детальний аналіз експериментальних даних з розсіяння нуклонів на нуклонах та дослідження проблеми насичення ядерних сил показують, що на дуже малих відстанях притягання між нуклонами змінюється на відштовхування. Цю властивість враховують за допомогою введення відштовхувальної серцевини, тобто вважають, що ядерний потенціал має сингулярну поведінку і прямує до плюс нескінченності при $r \rightarrow 0$. Наприклад, якщо використовувати потенціал Юкави, то найкраще узгодження з експериментальними даними досягається при модифікації цього потенціалу на малих відстанях $r < b$ таким чином, щоб у цій області він прямував до нескінченності (рис. 2.2). Параметр $b \approx 0,4$ фм і має зміст радіуса відштовхувальної серцевини, а значення глибини V_0 потенціалу Юкави залежить від стану, в якому взаємодіють нуклони.

5. Ядерні сили залежать не тільки від відстані між нуклонами, а і від взаємної орієнтації їхніх спінів. Дійсно, у протилежному разі в системі протон–нейтрон при заданому орбітальному моменті існували б як триплетний (спіни протона і нейтрона паралельні), так і синглетний (спіни – антипаралельні) зв’язані стани з однаковими енергіями. Однак з дослідів випливає, що у дейтрона спіни нуклонів завжди паралельні і стабільного синглетного стану не існує (§ 2.2).

Залежність ядерних сил від спінів враховують включенням у потенціал взає-

модії $\hat{V}$ члена, що містить скалярний добуток $(\hat{s}_1 \hat{s}_2)$,

$$\hat{V} = V_1(r) \hat{I} + V_2(r) (\hat{s}_1 \hat{s}_2) \equiv \hat{V}_S, \quad (2.26)$$

де $\hat{I}$ – одиничний оператор, що діє у спіновому просторі; $V_j(r)$ – функції, які описують залежність компонент від просторових координат (іноді їх називають формфакторами ядерного потенціалу). Для простоти позначень у цьому підрозділі використовуються векторні оператори $\hat{s}_j$ спінів нуклонів в одиницях сталої Планка $\hbar$.

Знайдемо потенціали, що діють у синглетному ($\hat{V}_{S=0}$) та триплетному ($\hat{V}_{S=1}$) станах. Для цього запишемо вираз (2.26) через оператор повного спіну $\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$. Після обчислення квадрату оператора $\hat{S}$ та врахування співвідношення $\hat{s}_j^2 = 3 \hat{I} / 4$ знаходимо

$$(\hat{s}_1 \hat{s}_2) = \frac{1}{2} (\hat{S}^2 - \hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2) = \frac{1}{2} (\hat{S}^2 - \frac{3}{2} \hat{I}), \quad (2.27)$$

і маємо для (2.26)

$$\hat{V}_S = \left[V_1(r) - \frac{3}{4} V_2(r) \right] \hat{I} + \frac{1}{2} V_2(r) \hat{S}^2. \quad (2.28)$$

З цього виразу видно, що взаємодія такого типу зберігає сумарний спін двонуклонної системи, бо оператор $\hat{V}_S$ комутує з $\hat{S}^2$.

У синглетному стані власне значення оператора повного спіну дорівнює нулю, а у триплетному воно дорівнює $S(S+1) = 1(1+1) = 2$. Тому з (2.28) випливає, що взаємодію у різних спінових станах можна виразити через функції V_1 та V_2 простими співвідношеннями:

$$\hat{V}_{S=0} = V_1(r) - \frac{3}{4} V_2(r), \quad \hat{V}_{S=1} = V_1(r) + \frac{1}{4} V_2(r). \quad (2.29)$$

Видно, що потенціали в різних станах різні. Саме це і зумовлює різницю у властивостях нейтрон-протонної системи при паралельних та антипаралельних спінах нуклонів. Оскільки зв'язаного синглетного стану у дейтрона не існує, то потенціал $\hat{V}_{S=0}$ має бути менш глибоким, ніж $\hat{V}_{S=1}$. У дейтроні $V_1 < 0$ (нехтуємо областю $r < b$, де розташована жорстка серцевина, яка майже не впливає на формування дейтрона), тому взаємодія V_2 повинна бути від'ємною.

6. У загальному випадку ядерні сили є нецентральними, тобто вони залежать не тільки від відстані між нуклонами та взаємної орієнтації їх спінів, але і від орієнтації спінів відносно розташування нуклонів. На нецентральний характер ядерних сил, наприклад, вказує наявність у дейтрона квадрупольного моменту, яка означає, що основний стан дейтрона є суперпозицією станів з різними значеннями орбітального моменту, що неможливо у випадку центральних сил $V \equiv V(|\vec{r}|)$. У центральних полях орбітальний момент L зберігається і тому стани з різними значеннями L не змішуються (§ 1.6).

Нецентральна частина ядерної взаємодії має вид тензора, тому її називають тензорними силами. Загальний вигляд потенціалу тензорних сил однозначно фіксується завдяки таким вимогам:

а) потенціал можна будувати лише з векторів $\vec{n} = \vec{r}/r \equiv (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) / |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, $\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$, які визначають поведінку частинок у координатному та спіновому просторах;

б) потенціал повинен бути скаляром;

в) вважають, що потенціал дорівнює нулю при усередненні за усіма напрямками вектора $\vec{n}$ (хоч ця умова не є обов'язковою).

Звідси тензорний потенціал можна записати так:

$$V_T = V_3(r) \left\{ 3 \left(\hat{s}_1 \vec{n} \right) \left(\hat{s}_2 \vec{n} \right) - \left(\hat{s}_1 \hat{s}_2 \right) \right\} \equiv V_3(r) \hat{S}_{12}. \quad (2.30)$$

Оператор $\hat{S}_{12}$ за своєю структурою збігається з потенціалом двох взаємодіючих магнітних диполів у класичній електродинаміці. Тензорний потенціал також корисно переписати через вектор сумарного спіну двох нуклонів. Якщо піднести до квадрата обидві частини рівності $(\vec{S} \vec{n}) \equiv (\hat{s}_1 \vec{n}) + (\hat{s}_2 \vec{n})$ і врахувати, що для кожного нуклона $(\hat{s}_j \vec{n})^2 = \hat{I}/4$, то тоді

$$(\hat{s}_1 \vec{n}) (\hat{s}_2 \vec{n}) = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{S} \vec{n})^2 - \frac{1}{2} \hat{I} \right\}. \quad (2.31)$$

Підставляючи (2.27) та (2.31) у (2.30), маємо

$$V_T = \frac{1}{2} V_3(r) \left\{ 3 (\vec{S} \vec{n})^2 - \vec{S}^2 \right\}. \quad (2.32)$$

Отже, оператор V_T комує з оператором квадрата спіна $\vec{S}^2$, але не з оператором проекції спіну $\hat{S}_Z$, як це було у випадку взаємодії (2.28). Оскільки у

виразі (2.32) присутній вектор $\vec{n}$, то оператор V_T не комутує з $\hat{L}^2$ і тому в загальному випадку величина L не зберігається, що й призводить до можливості змішування станів з різними орбітальними моментами.

У цілому потенціальна енергія взаємодії двох нуклонів у вільному просторі залежить від спіну та координат таким чином:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= V_1(r) \hat{I} + V_2(r) (\hat{s}_1 \hat{s}_2) + V_3(r) \left\{ 3 (\hat{s}_1 \vec{n}) (\hat{s}_2 \vec{n}) - (\hat{s}_1 \hat{s}_2) \right\} = \\ &= U_1 \hat{I} + U_2 \hat{S}^2 + U_3 (\hat{S} \vec{n})^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де

$$U_1 = V_1 - \frac{3}{4}V_2, \quad U_2 = \frac{1}{2}(V_2 - V_3), \quad U_3 = \frac{3}{2}V_3.$$

Фактично така структура ядерного потенціалу визначається вимогами її інваріантності відносно трансляції (однорідність простору), обертання (ізотропність простору) та інверсій системи координат (дзеркальна симетрія).

Інваріантність відносно трансляції веде до того, що $\hat{V}$ може залежати лише від вектора відносної відстані $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, але не окремо від векторів $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, оскільки лише їх різниця не залежить від зсувів:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\vec{r}_1 + \vec{a}) - (\vec{r}_2 + \vec{a}). \quad (2.34)$$

Із інваріантності щодо обертання випливає, що в потенціал взаємодії можуть входити тільки скалярні комбінації векторів $\vec{r}, \hat{s}_1, \hat{s}_2$, а саме: $r \equiv (\vec{r} \cdot \vec{r})^{1/2}$, $(\hat{s}_1 \hat{s}_2)$, $(\hat{s}_j \vec{n})$, $j = 1, 2$, оскільки завдяки властивостям матриць Паулі усі скалярні комбінації з вищими степенями $\hat{s}_1, \hat{s}_2$ зводяться до вказаних. При операції інверсії вектор $\vec{n}$ змінює знак, а $\hat{S}$ не змінює, і тому добутки $(\hat{s}_1 \vec{n})$ та $(\hat{s}_2 \vec{n})$ є псевдоскалярами, що змінюють знаки при інверсії. Вимога інваріантності щодо дзеркальної симетрії приводить до того, що ці псевдоскаляри входять до формули (2.33) не відокремлено, а у вигляді добутку. Потенціал (2.33) також не залежить від швидкості.

2.4. Зарядова незалежність та формалізм ізоспіну

Розглянемо детальніше інтенсивність ядерних потенціалів $V_j(r)$ у системах з двох нуклонів різного типу. Експериментальні та теоретичні дослідження показують, що протони та нейтрони тотожні щодо сильної взаємодії. Рівність ядерних сил, що діють між однаковими нуклонами (протоном і протоном, або нейтроном і нейтроном) називається зарядовою симетрією. Про цю властивість,

наприклад, свідчить приблизно однакова кількість протонів Z та нейтронів N у легких ядер, де роль електромагнітної взаємодії мала. Зарядову симетрію також підтверджує і рівність ймовірностей $p-p$ та $n-n$ розсіяння при високих енергіях, коли внеском кулонівського розсіяння протонів можна знехтувати.

Аналізуючи дані із $p-p$ та $n-p$ розсіювання, було виявлено зарядову незалежність, а саме – тотожність ядерних сил, діючих між протоном і протоном та між нейтроном і нейтроном, із взаємодією між протоном і нейтроном:

$$V_{pp} = V_{nn} = V_{np}. \quad (2.35)$$

Ця властивість включає як окремий випадок і зарядову симетрію.

Необхідно зазначити, що зарядова незалежність не означає повну тотожність систем $p-p$, $n-n$ та $n-p$ навіть після нехтування електромагнітною взаємодією. Незважаючи на те, що будь-який стан системи двох протонів або двох нейтронів за своїми властивостями збігається з деякими станами системи протон-нейтрон, ці системи мають різну кількість станів. Серед станів системи $n-p$ існують такі, які не мають аналогів у системах $p-p$ та $n-n$. Це зумовлено тим, що нуклони є ферміонами і хвильові функції систем однакових частинок $p-p$ та $n-n$ згідно з принципом Паулі повинні бути антисиметричними на відміну від $n-p$ системи, яка складається з різних частинок і може мати стани з симетричними хвильовими функціями. Тому зарядова незалежність у двонуклонній системі означає, що стани системи $n-p$, які описуються антисиметричною хвильовою функцією, тотожні за своїми властивостями відповідним станам систем $p-p$ та $n-n$, якщо нехтувати електромагнітною взаємодією. Станів у $n-p$ системі більше ніж у $p-p$ та $n-n$, а значить загальна ймовірність взаємодії у такій системі також є більшою.

Унаслідок зарядової незалежності протон і нейтрон зручно розглядати як два стани однієї і тієї ж частинки – нуклона. Ці стани ототожнюють з двома значеннями деякої внутрішньої змінної, яку називають ізотопічним спіном, а самі стани називають ізотопічними або ізобарними. Ізотопічний стан нуклона характеризується зарядовою (ізоспіною) координатою t_z , яка набуває двох значень:

$$t_z = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{протонний стан (протон),} \\ -\frac{1}{2}, & \text{нейтронний стан (нейтрон).} \end{cases} \quad (2.36)$$

Значення зарядової змінної вибрані таким чином, щоб формалізм ізотопічного спіну можна було побудувати аналогічно формалізму звичайного спіну для частинок зі спіном $1/2$. Для цього вводиться оператор-вектор зарядової координати $\vec{t}$ з компонентами t_x, t_y, t_z вздовж одиничних ортів у просторі, що носить назву ізотопічного простору. Також використовується оператор ізотопічного спіну $\vec{\tau}$, який пов'язаний з $\vec{t}$ таким співвідношенням, як і матриця Паулі $\vec{\sigma}$ з оператором спіну $\vec{s}$ (§ 1.6):

$$\vec{t} = \frac{1}{2} \vec{\tau}, \quad (2.37)$$

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

Тут простір з осями x, y, z , у якому діють матричні оператори (2.38), є простором ізотопічного спіну і його не слід ототожнювати зі звичайним координатним простором.

Протонний та нейтронний стани нуклона описуються хвильовими функціями

$$\xi_p = \xi_{t_z=+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_n = \xi_{t_z=-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

оскільки саме такі функції є власними функціями оператора $t_z = \tau_z/2$ з власними значеннями $\pm 1/2$, що відповідають значенням зарядової змінної у протонному та нейтронному станах нуклона:

$$t_z \xi_p = \frac{1}{2} \xi_p, \quad t_z \xi_n = -\frac{1}{2} \xi_n. \quad (2.40)$$

Таким чином, побудований згідно з співвідношеннями (2.37), (2.38) вектор ізоспіну $\vec{t} = \vec{\tau}/2$, має тільки два значення проекцій на вісь z ; значенню $+1/2$ відповідає протонний стан, а значенню $-1/2$ – нейтронний.

Для фізичної інтерпретації операторів τ_x і τ_y введемо оператори τ_+ і τ_- :

$$\begin{aligned} \tau_+ &= \frac{1}{2} (\tau_x + i\tau_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \tau_- &= \frac{1}{2} (\tau_x - i\tau_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Їх дія на функції ξ_p, ξ_n описується співвідношеннями:

$$\tau_+ \xi_p = 0, \quad \tau_+ \xi_n = \xi_p; \quad \tau_- \xi_n = 0, \quad \tau_- \xi_p = \xi_n. \quad (2.42)$$

Оператор τ_+ "знищує" протонний стан і "перетворює" нейтрон у протон, а оператор τ_- "знищує" нейтронний стан і "перетворює" протон у нейтрон. Переходу від протонного до нейтронного стану і навпаки відповідає обертання на 180 градусів у площині xu простору ізотопічного спіну. Оператори τ_+ і τ_- називають відповідно операторами народження та знищення заряду, а оператори τ_x і τ_y є їхніми лінійними комбінаціями. Оператор τ_z також визначає електричний заряд нуклона q та його масу m :

$$q = \frac{1}{2} (1 + \tau_z) e; \quad m = \frac{1}{2} (1 - \tau_z) m_n + \frac{1}{2} (1 + \tau_z) m_p. \quad (2.43)$$

Оскільки просторова, спінова та ізоспінова координати є незалежними, то хвильову функцію ψ вільного нуклона з координатами $(\vec{r}_i, m_s, t_z)$ можна записати у вигляді добутку просторової φ , спінової χ_{sm_s} та ізоспінової ξ_{t_z} функцій:

$$\psi(\vec{r}_i, m_s, t_z) = \varphi(\vec{r}_i) \chi_{sm_s} \xi_{t_z}. \quad (2.44)$$

Оператори ізотопічного спіну можна додавати, а також множити за правилами векторної алгебри. Зокрема, скалярний добуток двох операторів $\vec{t}_1$ і $\vec{t}_2$ двох нуклонів є величиною

$$(\vec{t}_1 \vec{t}_2) = \hat{t}_{1x} \hat{t}_{2x} + \hat{t}_{1y} \hat{t}_{2y} + \hat{t}_{1z} \hat{t}_{2z}, \quad (2.45)$$

яка не змінюється при обертаннях у зарядовому просторі.

Оператор повного ізотопічного спіну в системі з двох нуклонів має вигляд

$$\hat{T} \equiv \vec{t}_1 + \vec{t}_2 = \frac{1}{2} (\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2). \quad (2.46)$$

Оскільки при додаванні ізотопічних спінів діють звичайні правила додавання моментів, то два нуклони перебувають або у синглетному ($T = 0$), або у триплетному ($T = 1$) зарядових станах. Для квантового опису таких станів уведемо функцію ψ_{TT_z} зарядових змінних, яка характеризується значеннями сумарного ізоспіну T та його проекції T_z :

$$\begin{aligned} \hat{T}^2 \Psi_{TT_z} &= T(T+1) \Psi_{TT_z}; \\ \hat{T}_z \Psi_{TT_z} &= T_z \Psi_{TT_z}, \quad -(2T+1) \leq T_z \leq (2T+1). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Оператори $\hat{T}^2$, $\hat{T}_z$ комутують між собою і тому відповідні їм фізичні величини зберігаються одночасно. Нормовані хвильові функції ψ_{T_z} мають вигляд

$$\begin{aligned}\psi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \xi_p(1) \xi_n(2) - \xi_n(1) \xi_p(2) \}; \\ \psi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \xi_p(1) \xi_n(2) + \xi_n(1) \xi_p(2) \}; \\ \psi_{1-1} &= \xi_n(1) \xi_n(2); \quad \psi_{11} = \xi_p(1) \xi_p(2),\end{aligned}\tag{2.48}$$

де $\xi_p(j)$ ($\xi_n(j)$) – ізоспінова хвильова функція j -го нуклона, що знаходиться у протонному (нейтронному) стані.

З формул (2.48) видно, що у станах з $T_z = 0$ кожен з нуклонів не перебуває в якомусь фіксованому зарядовому стані, а з ймовірністю $1/2$ може бути як у протонному, так в нейтронному станах.

Оскільки нуклони тотожні і мають спіни $1/2$, то вони є ферміонами і підпорядковуються статистиці Фермі – Дірака. Введення додаткової зарядової змінної приводить до надлишку ступенів вільності при перерахуванні станів нуклонів порівняно з протонами та нейтронами. Для усунення зайвого ступеня вільності використовують узагальнений принцип Паулі, згідно з яким в ядрі у кожному індивідуальному стані, що характеризується п'ятьма координатами $(\vec{r}_i, m_{s,i}, t_{z,i})$, не може бути більше одного нуклона. Це означає, що хвильова функція системи нуклонів повинна бути антисиметричною ²⁾ стосовно перестановок усіх координат двох нуклонів. Узагальнений принцип Паулі не є додатковим припущенням, а пов'язаний з уведенням зарядової змінної для деталізації стану нуклона.

Система двох нуклонів має такі властивості симетрії.

1. Перестановка просторових декартових координат (дзеркальне відображення координат відносно центра мас системи) приводить до появи множника $(-1)^L$, де L – орбітальний момент відносного руху (§ 1.6, 2.2).

2. Перестановки спінових змінних у стані з сумарним спіном S приводять до фактора $(-1)^{S+1}$. Це впливає з властивостей симетрії спінових хвильових функцій $\psi_{SS_z}(1, 2)$ у двонуклонних станах з фіксованими значеннями повного

²⁾ Дійсно, нехай хвильова функція системи A нуклонів є антисиметричною: $\psi(2, 1, \dots, A) = -\psi(1, 2, \dots, A)$. Якщо частинки 1 та 2 перебувають у однаковому стані, то функції $\psi(2, 1, \dots, A)$ і $\psi(1, 2, \dots, A)$ повинні збігатися, тобто $\psi = -\psi$, $2\psi = 0$, $\psi = 0$ і тому такого стану не існує.

спіну S і його проекції S_Z :

$$\begin{aligned}\psi_{S=0, S_Z=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \chi_{1/2, +1/2}(1) \chi_{1/2, -1/2}(2) - \chi_{1/2, -1/2}(1) \chi_{1/2, +1/2}(2) \right\}; \\ \psi_{S=1, S_Z=1} &= \chi_{1/2, +1/2}(1) \chi_{1/2, +1/2}(2); \\ \psi_{S=1, S_Z=-1} &= \chi_{1/2, -1/2}(1) \chi_{1/2, -1/2}(2); \\ \psi_{S=1, S_Z=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \chi_{1/2, +1/2}(1) \chi_{1/2, -1/2}(2) + \chi_{1/2, -1/2}(1) \chi_{1/2, +1/2}(2) \right\},\end{aligned}\tag{2.49}$$

де $\chi_{1/2, \pm 1/2}(j)$ – спінова хвильова функція j -го нуклона.

3. Симетрія ізоспінової хвильової функції (2.48) аналогічна спіновій і перестановка ізоспінових змінних зводиться до появи множника $(-1)^{T+1}$.

Звідси маємо, що одночасна перестановка всіх координат у хвильовій функції $\psi_{L,S,T}$ системи двох нуклонів з фіксованими значеннями L, S, T приводить до появи множника $(-1)^{L+S+T}$, а вимога антисиметрії хвильової функції (зміна її знака при зміні всіх координат на протилежні: $P\psi(1, 2) = \psi(2, 1) = -\psi(1, 2) = (-1)^{L+S+T} \psi(1, 2)$) приводить до співвідношення

$$(-1)^T = (-1)^{L+S+1}.\tag{2.50}$$

Формула (2.50) визначає можливі значення T (0 або 1) двонуклонної системи у станах з фіксованими величинами L і S . Наприклад, у випадку $S = 1$ та парного L (як у дейтрона) маємо $T = 0$.

Згідно з співвідношенням (2.42) переходи між протонним та нуклонним станами нуклонів відповідають обертання в ізоспіновому просторі. Зарядово незалежна взаємодія має бути інваріантна щодо таких поворотів і тому може визначатися лише скалярними величинами, побудованими з операторів $\vec{\tau}_1$ і $\vec{\tau}_2$ для нуклонів типу 1, 2. Існують тільки два таких незалежних скаляри: одиничний оператор $\hat{I}$ і скалярний добуток $(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)$. Дійсно, $\vec{\tau}_1^2 = \vec{\tau}_2^2 = 3\hat{I}/4$, тому оператори $\vec{\tau}_j^{2k}$ кратні одиничному оператору, а добутки $(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)^k$ з $k \geq 2$ лінійно залежать від $\hat{I}$ та $(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)$, наприклад,

$$(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)^2 = \frac{3}{16} \hat{I} - \frac{1}{2} (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2).\tag{2.51}$$

Отже, зарядово-інваріантна взаємодія між двома нуклонами має такий загальний вигляд

$$\hat{V} = \hat{V}_I + \hat{V}_{II} (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2), \quad (2.52)$$

де $\hat{V}_I, \hat{V}_{II}$ – незалежні від ізоспінових змінних оператори типу (2.33).

Оскільки власні значення оператора $(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)$ у станах з фіксованими величинами сумарного ізоспіну визначаються формулою

$$(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) \Psi_{TT_z} \equiv \frac{1}{2} \left(\hat{T}^2 - \frac{3}{2} \hat{I} \right) \Psi_{TT_z} = \Psi_{TT_z} \begin{cases} \frac{1}{4}, & T = 1, \\ -\frac{3}{4}, & T = 0, \end{cases} \quad (2.53)$$

то оператори $\hat{U}_0, \hat{U}_1$ ($\hat{V} \Psi_{TT_z} \equiv \hat{U}_T \Psi_{TT_z}$) міжнуклонної взаємодії у станах із значенням $T = 0, 1$ зв'язані з операторами $\hat{V}_I, \hat{V}_{II}$ співвідношеннями

$$\hat{U}_0 = \hat{V}_I - \frac{3}{4} \hat{V}_{II}, \quad \hat{U}_1 = \hat{V}_I + \frac{1}{4} \hat{V}_{II}, \quad (2.54)$$

і формулу (2.52) можна переписати у вигляді

$$\hat{V} = \frac{1}{4} \left(\hat{U}_0 + 3\hat{U}_1 \right) + \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_0 \right) (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2). \quad (2.55)$$

Уведення в потенціал компонентів сил пропорційних скалярному добутку $(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)$ ізоспінів дає змогу коректно врахувати зарядову незалежність ядерної взаємодії.

2.5. Обмінний характер ядерної взаємодії

Згідно з співвідношеннями (2.33), (2.52) незалежний від швидкості ядерний потенціал взаємодії двох нуклонів, який задовольняє умови ротаційної інваріантності та ізотопічної симетрії, має такий загальний вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{V} = & V_c(r) + V_\sigma(r) (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + V_\tau(r) (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) + \\ & + V_{\sigma\tau}(r) (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) + V_T(r) S_{12} + V_{T\tau}(r) S_{12} (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2), \end{aligned} \quad (2.56)$$

де замість операторів спінів використано матриці Паулі; функції $V_\alpha(r)$, $(\alpha = c, \sigma, \tau, \dots)$ визначають силу відповідних компонентів взаємодії, а оператор $\hat{S}_{12}$ задається формулою

$$\hat{S}_{12} = 3 (\vec{\sigma}_1 \vec{n}) (\vec{\sigma}_2 \vec{n}) - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) , \quad (2.57)$$

яка випливає з співвідношення (2.30).

Залежність потенціалу (2.56) від спінових та ізоспінових змінних можна також подати в іншому вигляді, який має більш наочну фізичну інтерпретацію, а саме:

$$\begin{aligned} V = & V_W(r) + V_M(r) \hat{P}_r + V_B(r) \hat{P}_\sigma - V_H(r) \hat{P}_\tau + \\ & + V_{TW}(r) \hat{S}_{12} + V_{TM}(r) \hat{S}_{12} \hat{P}_r, \end{aligned} \quad (2.58)$$

де при переході від (2.57) до (2.58) були використані співвідношення $\hat{S}_{12} \hat{P}_\sigma = \hat{P}_\sigma \hat{S}_{12} = \hat{S}_{12}$ та (2.63).

Перший компонент у виразі (2.58), що залежить лише від просторових координат називають силами Вігнера. Подальші доданки називають силами Майорана, Бартлета і Гайзенберга, п'ятий компонент – тензорні сили і шостий – тензорні сили Майорана. Ці сили названі прізвищами вчених, які їх вперше вивчали. Оператори

$$\begin{aligned} \hat{P}_\sigma &= \frac{1}{2} (1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)) , \quad \hat{P}_\tau = \frac{1}{2} (1 + (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)) , \\ \hat{P}_r &= -\hat{P}_\sigma \hat{P}_\tau = -\frac{1}{4} (1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)) (1 + (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)) \end{aligned} \quad (2.59)$$

є операторами обміну спінових, ізоспінових та просторових координат двох нуклонів:

$$\begin{aligned} \hat{P}_\sigma \psi(\vec{r}_1, m_{s,1}, t_{z,1}; \vec{r}_2, m_{s,2}, t_{z,2}) &= \psi(\vec{r}_1, m_{s,2}, t_{z,1}; \vec{r}_2, m_{s,1}, t_{z,2}) , \\ \hat{P}_\tau \psi(\vec{r}_1, m_{s,1}, t_{z,1}; \vec{r}_2, m_{s,2}, t_{z,2}) &= \psi(\vec{r}_1, m_{s,1}, t_{z,2}; \vec{r}_2, m_{s,2}, t_{z,1}) , \\ \hat{P}_r \psi(\vec{r}_1, m_{s,1}, t_{z,1}; \vec{r}_2, m_{s,2}, t_{z,2}) &= \psi(\vec{r}_2, m_{s,1}, t_{z,1}; \vec{r}_1, m_{s,2}, t_{z,2}) . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Оператор $\hat{P}_r$ переставляє просторові координати; його називають обмінним оператором Майорана. Оператор $\hat{P}_\sigma$, який переставляє спінові координати частинок, називають обмінним оператором Бартлета, а оператор $\hat{P}_\tau$, який переставляє ізоспінові координати, називають обмінним оператором Гайзенберга. Квадрати операторів $\hat{P}_\alpha$ дорівнюють одиниці:

$$\hat{P}_r^2 = \hat{P}_\sigma^2 = \hat{P}_\tau^2 = 1. \quad (2.61)$$

За узагальненим принципом Паулі, згідно з яким функція системи нуклонів повинна бути антисиметричною, маємо

$$\hat{P}_\tau \hat{P}_\sigma \hat{P}_r = -1. \quad (2.62)$$

Із виразів (2.61) і (2.62) видно, що обмінний оператор Гайзенберга одночасно переставляє як просторові, так і спінові координати частинок:

$$\hat{P}_\tau = -\hat{P}_r \hat{P}_\sigma \equiv -\hat{P}_{r\sigma}. \quad (2.63)$$

Форма запису ядерної взаємодії у вигляді (2.58) більш загальна, ніж у вигляді (2.56). Оскільки після заміни відповідно (2.63) формулу (2.58) можна використовувати також у випадку, коли формалізм ізотопічного спіну явно не застосовується. Функції, що описують залежність від просторових координат у виразах (2.56) та (2.58), зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{aligned} V_c &= V_W + \frac{1}{2}V_B - \frac{1}{2}V_H - \frac{1}{4}V_M, \quad V_\sigma = \frac{1}{2}V_B - \frac{1}{4}V_M, \\ V_\tau &= -\frac{1}{2}V_H - \frac{1}{4}V_M, \quad V_{\sigma\tau} = -\frac{1}{4}V_M, \\ V_T &= V_{TW} - \frac{1}{2}V_{TM}, \quad V_{T\tau} = -\frac{1}{2}V_{TM}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

і навпаки:

$$\begin{aligned} V_W &= V_c - V_\sigma - V_\tau + V_{\sigma\tau}, \quad V_M = -4V_{\sigma\tau}, \quad V_B = 2V_\sigma - 2V_{\sigma\tau}, \\ V_H &= -2V_\tau + 2V_{\sigma\tau}, \quad V_{TW} = -V_T - V_{T\tau}, \quad V_{TM} = -2V_{T\tau}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Із співвідношень (2.61) можна отримати, що власні значення π_r, π_σ і π_τ операторів $\hat{P}_r, \hat{P}_\sigma, \hat{P}_\tau$ дорівнюють ± 1 . У станах двонуклонної системи із фіксованими величинами L, S, T власні значення визначаються співвідношеннями (§ 2.4):

$$\pi_r = (-1)^L, \quad \pi_\sigma = (-1)^{S+1}, \quad \pi_\tau = (-1)^{T+1}. \quad (2.66)$$

Характерною особливістю ядерних сил (2.56) та (2.58) є їх залежність від характеристик станів, а саме від хвильових функцій станів, і в різних станах вони можуть змінитися від притягання до відштовхування. Така поведінка сил визначається властивостями симетрії хвильової функції відносно перестановки або обміну координат пар нуклонів. Тому відповідні сили називають обмінними.

Виявляється, що саме обмінний характер ядерних сил приводить до насичення ядерної речовини.

Уперше ядерні обмінні сили були введені В.Гайзенбергом (1932 р.) за аналогією з силами хімічного зв'язку. Щодо фізичної інтерпретації ці сили можна розглядати як такі, що виникають між двома нуклонами внаслідок обміну третьою частинкою.

Основи першої обмінної теорії ядерних сил розробив Юкава (1935 р.). Наявність взаємодії між будь-якими системами означає, що між ними здійснюється обмін енергією. Юкава припустив, що ядерна взаємодія, як і електромагнітна, також передається порціями (квантами). Такий процес обміну є суто квантовим і короткочасним процесом. Дійсно, якби система, що складається з нуклона та частинки носія взаємодії, перебувала у стаціонарному стані, то поглинання та випромінювання частинок привело б до порушення закону збереження енергії, так як при обміні частинка повинна виносити та приносити у нуклон деяку енергію ΔE , а нуклон має залишатися незмінним. Інша ситуація виникає коли процес обміну триває протягом деякого короткого часу Δt і описується законами квантової механіки. У цьому випадку має місце співвідношення невизначеності енергія–час, згідно з яким у системі зі скінченим часом життя (тобто у нестаціонарній системі) енергія не є точно фіксованою, а визначена неоднозначно з точністю до величини $\Delta E \geq \hbar/\Delta t$. Саме завдяки цьому співвідношенню стає можливим випромінювання частинки–носія одним нуклоном та поглинання її іншим; тепер лише необхідно щоб увесь процес випромінювання та поглинання був нестаціонарним і тривав протягом достатньо стислого часу, такого, щоб розкид енергії (величина "порушення" закону збереження енергії) узгоджувався зі співвідношенням невизначеності. Такі стани і процеси малої тривалості, існування яких обумовлено наявністю співвідношення невизначеності, називають віртуальними, а проміжні частинки, що беруть участь у таких процесах, називають віртуальними частинками (від латинського *vires* – можливість).

Поняття про віртуальні процеси та віртуальні частинки посідає центральне місце у сучасній квантовій теорії поля. За цією теорією віртуальними частинками є такі, що виникають та зникають внаслідок флуктуацій відповідного (квантового) поля, яке описує ці частинки і реально існує у природі. Взаємодія частинок та їхні взаємні перетворення розглядаються як народження та поглинання вільними частинками віртуальних. Реальна частинка безперервно випромінює та поглинає віртуальні частинки різних типів, які мають такі ж значення спіну,

електричного та баріонного заряду, як і реальні частинки.

Унаслідок короткодійного характеру ядерної взаємодії роль носія ядерної взаємодії можуть виконувати лише частинки з масою відмінною від нуля. Дійсно, нехай віртуальна частинка, що обумовлює ядерну взаємодію, має масу m_v і рухається зі швидкістю світла c . При її випромінюванні або поглинанні виникає зміна енергії на величину $\Delta E \simeq m_v c^2$ і тому згідно з співвідношенням невизначеності тривалість віртуального процесу визначається часом $\Delta t \simeq \hbar / \Delta E$. Нехай r_{int} – радіус дії сил і віртуальна частина рухається з максимально можливою швидкістю, а саме зі швидкістю світла c , тоді маємо таке співвідношення між r_{int} та масою відповідних віртуальних частинок:

$$r_{int} = c \Delta t \simeq \frac{\hbar c}{\Delta E} \simeq \frac{\hbar c}{m_v c^2}. \quad (2.67)$$

Радіус ядерної взаємодії за порядком значення є $r_{int} = 1,5$ фм, тому маємо, що маса частинок – носіїв ядерної взаємодії, має бути щонайменше у ≈ 250 разів більше за масу спокою електрону:

$$m_v c^2 \simeq \frac{\hbar c}{r_{int}} \simeq 197,3/1,5 \simeq 130 \text{ MeV}.$$

Такими частинками є пі-мезони, які зазвичай називаються більш коротко – піони (мезон у перекладі з грецької – середній, проміжний, а літера "п" з'явилася від англійського слова *prima* – первинний). Існує три типи пі-мезонів: π^+ , π^0 , π^- . Усі пі-мезони є адронами з нульовими баріонними зарядами та спінами. Їх можна розглядати як різні зарядові стани однієї частинки зі значеннями електричного заряду: $q_{\pi^+} = +e$, $q_{\pi^-} = -e$, $q_{\pi^0} = 0$. Заряджені піони були зареєстровані у 1947 р. (Пуелл і Оккіаліні) як вільні реальні частинки космічного випромінювання, а у 1950 р. були зареєстровані і нейтральні піони (Берклунд та ін.). Маси нейтрального і заряджених пі-мезонів трохи відрізняються і дорівнюють: $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139,57 \text{ MeV}$, $m_{\pi^0} = 134,98 \text{ MeV}$.

Характер обмінної взаємодії залежить від типу π -мезону, яким обмінюються нуклони. Наприклад, перестановку просторових координат протона і нейтрона схематично можна уявити, як процеси обміну мезонами π^+ та π^- :

$$\begin{aligned} p + n &\rightleftharpoons n' + \pi^+ + n \rightleftharpoons n' + p'; \\ n + p &\rightleftharpoons p' + \pi^- + p \rightleftharpoons p' + n'. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ці процеси зумовлюють обмін електричного заряду між нуклонами: протон стає нейтроном, а нейтрон – протоном, тобто нуклони ніби обмінюються місцями

(переставляються) у просторі. Тому такі процеси породжують сили Майорана. У процесах типу (2.68) одночасно може мати місце й обмін спінів нуклонів, що приводить до виникнення сил Гайзенберга.

У процесах обміну нейтральним пі-мезоном заряди нуклонів не змінюються і нуклони не обмінюються просторовими координатами, але можуть змінюватися спінові координати. Тому такі процеси можуть породжувати сили Бартлета.

Необхідно відмітити, що "обмін" не слід трактувати надто буквально тому, що він здійснюється віртуальними частинками, існування яких має умовний зміст. Крім того, важливо розуміти чітку різницю між концепцією обмінного механізму взаємодії та поняттям обмінних сил, що залежать від обміну координатами взаємодіючих частинок. Історично ці поняття розвивалися паралельно і спочатку ототожнювалися. Але насправді концепція обмінних сил має вузькі межі нерелятивістської квантової механіки, де йдеться про потенціальну енергію, що залежить від операторів обміну. Концепція ж обмінного механізму взаємодії більш універсальна. Вона припускає існування носія взаємодії і вважається, що такий механізм притаманний всім фундаментальним взаємодіям. Наприклад, електромагнітна взаємодія характеризується обмінним механізмом (заряджені частинки обмінюються фотонами), але електромагнітні сили не є обмінними силами, що приводять до насичення.

Пі-мезони виконують роль частинок-переносників ядерної взаємодії на великих (з погляду ядерних сил) відстанях $\gtrsim 0,4$ фм. На менших відстанях нуклон-нуклонна взаємодія визначається обміном більш важкими мезонами – η ($m_\eta = 549$ МеВ), ρ ($m_\rho = 770$ МеВ) і ω ($m_\omega = 782$ МеВ), які відповідають за взаємодію на відстанях $r_{int}(\eta) \simeq 0,36$ фм і $r_{int}(\rho) \simeq r_{int}(\omega) \simeq 0,25$ фм.

Обмін піонами фіксує форму просторової частини потенціалу взаємодії між нуклонами на великих відстанях. Такий асимптотичний потенціал, що створюється хмарою піонів, має вигляд потенціалу Юкави (§ 2.3): $V(r) = -g_N \exp(-r/r_{int}(\pi))/r$, де $r_{int}(\pi) = \hbar/(m_\pi c^2)$ – радіус взаємодії, g_N – константа ядерної взаємодії, яку аналогічно з випадком електромагнітної взаємодії іноді називають ядерним зарядом: $g_N^2 \simeq 10 \hbar c$. На відстанях, які менші за 0,2 фм, міжнуклонний потенціал стає відштовхувальним, що пояснюється обміном ρ і ω мезонами.

Розглянута картина ядерної взаємодії у вільному просторі називається мезонною теорією ядерних сил і полягає в тому, що ядерна взаємодія є результатом обміну нуклонів віртуальними мезонами. Так як мезони є бозонами, тобто ча-

стинками, які задовольняють статистику Бозе, то вищезгадані потенціали, що обумовлені обміном однієї частинки, називаються потенціалами однобозонного обміну (One- Boson- Exchange Potentials, ОВЕР). Вони враховують процеси одноразового обміну бозонами з масою меншою 1 GeV. Іноді, як наприклад у випадку так званого Бонського міжнуклонного потенціалу, також враховують і одночасний обмін декількома бозонами.

2.6. Кваркова природа ядерних сил та ефективні ядерні сили

Згідно з сучасними уявленнями мезонна картина ядерної взаємодії є усередненою і може описати міжнуклонний потенціал лише наближено. Дослідження з фізики частинок показали, що нуклони не є безструктурними точковими об'єктами, а мають розмір ≈ 1 фм і складаються з трьох фундаментальних частинок – кварків, які на сучасному рівні знань можна вважати точковими. Кваркову модель будови адронів запропонували Гелл-Манн і Цвейг у 1963 р. Три частинки, з яких складаються нуклони, Цвейг назвав "тузами", але цей термін не поширився, а закріпилася назва³⁾ запропонована Гелл-Маном – "кварки".

Численні експерименти привели до висновку, що існують шість типів, або, як кажуть⁴⁾, "ароматів", кварків з масою від 0,33 GeV до ≈ 175 GeV у складі адрона. Їх умовно позначають – d (down), u (up), s (strange), c (charm), b (beauty, а також bottom), t (top, а також truth) та відповідно називають – нижній, верхній, дивний, чарівний, вродливий та найвищий (див. Табл. 2.2). Кварки є ферміонами зі спіном $J^\pi = 1/2^+$. Несподіваними виявилися дробові електричні та баріонний заряди кварків: баріонний заряд кварків дорівнює $1/3$, а електричні заряди різних кварків мають значення $\pm e/3$, $\pm 2e/3$. Мезони згідно з цією моделлю складаються з кварка та антикварка (див. Табл. 2.3). Також виявилось, що кварки можуть також перебувати у трьох різних станах, які відрізняються новим квантовим числом не зв'язаним з електричним зарядом і спіном (Н.Н. Боголюбов,

³⁾ Слово "кварк" має літературне походження і було взяте Гелл-Маном з роману ірландського письменника Дж.Джойса "Поминки по Фіннегату". Герой бачить у сні, що над бурхливим морем літають чайки та різко кричать: "Три кварка для містера Марка". Це слово ніде далі у романі не зустрічається та сприймається як щось невизначене і містичне. Тому воно залишилося як назва частинок з властивостями, що значно відрізняються від властивостей інших частинок.

⁴⁾ У кварковій моделі дуже широко використовуються повсякденні поняття, які роблять більш наочними абстрактні твердження та висновки.

Таблиця 2.2
Властивості кварків (спін $J^{\pi} = \frac{1}{2}^{+}$, баріонний заряд $B = \frac{1}{3}$)

Характеристика		Тип кварка (аромат)					
		d	u	s	c	b	t
Електричний заряд	Q[e]	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
Ізоспін	I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
Проекція ізоспіна	I ₃	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
Дивність	S	0	0	-1	0	0	0
Шарм(очарування)	C	0	0	0	+1	0	0
Вродливість	B	0	0	0	0	-1	0
тор-заряд	T	0	0	0	0	0	+1
Маса в складі адрона, ГеВ		0,33	0,33	0,51	1,8	5	174

Б.В. Струмінський, А.М. Тавхелідзе та незалежно Намбу і Хан, 1965 р.). Це квантове число називають "кольором" (або кольоровим зарядом), а його три значення позначають як червоне (r), жовте (y) (або зелене (g)) та синє (b).

Баріони складаються з кварків різного кольору. При цьому кварки у баріоні представлені у всіх трьох кольорових станах, тобто у баріоні кожен із трьох кварків має інший колір і всі разом вони утворюють безколірну (білу) комбінацію (за аналогією зі звичайним світлом: суміш трьох основних кольорів – червоного, жовтого (або зеленого) та синього сприймається оком як білий колір, тобто веде до відсутності кольору або безбарвності). У мезонах – кольору кварка відповідає антиколір антикварка. Таким чином, адрони (баріони і мезони), які спостерігаються у природі, абсолютно незабарвлені (білі) і мають нульовий кольоровий заряд.

Усередині адронів кварки взаємодіють за рахунок віртуального обміну безмасовою електрично – нейтральною частинкою зі спіном 1 і відмінним від нуля кольоровим зарядом. Така частинка-носій сильної міжкваркової взаємодії називається глюоном (від англійського слова glue – клей, клеїти). У глюонів, носіїв сильної взаємодії і фотонів, носіїв електромагнітної взаємодії, існує низка загальних рис. Насамперед їхні маси дорівнюють нулю; спін глюона, як і спін фотона, є рівним одиниці; роль та функції кольорових зарядів кварків і глюонів у сильних взаємодіях подібні до ролі та функцій відповідно електричних зарядів заряджених частинок і фотонів у електромагнітних взаємодіях.

Однак між електромагнітним полем та полем глюонів існує і принципова різниця. Електричні заряди бувають двох типів ("+" і "-"), а кольорові заряди

кварків — шести (три кольори і три антикольори); фотон є електрично – нейтральним і тим самим єдиним у своєму роді, а глюони мають кольоровий заряд і кольорових глюонів вісім.

Таблиця 2.3

Властивості деяких адронів. Баріони $B=1$, мезони $B=0$

Частинка	Кваркова структура	Маса, Мев	Час життя(с)	Спін-парність	B
p	uud	938,27	$>10^{32}$ р.	$1/2^+$	1
n	udd	939,57	882 ± 2	$1/2^+$	1
π^+	$u\bar{d}$	139,57	$2,6 \cdot 10^{-8}$	0^-	0
π^-	$d\bar{u}$	139,57	$2,6 \cdot 10^{-8}$	0^-	0
π^0	$u\bar{u} - d\bar{d}$	134,98	$8,4 \cdot 10^{-17}$	0^-	0
η	$u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}$	547	$5,5 \cdot 10^{-19}$	0^-	0
ρ^+	$u\bar{d}$	769	$4,4 \cdot 10^{-24}$	1^-	0
ρ^-	$d\bar{u}$	769	$4,4 \cdot 10^{-24}$	1^-	0
ρ^0	$u\bar{u} - d\bar{d}$	769	$4,4 \cdot 10^{-24}$	1^-	0
ω	$u\bar{u} + d\bar{d}$	783	$7,8 \cdot 10^{-23}$	1^-	0
J/ψ	$c\bar{c}$	3097	$7,5 \cdot 10^{-21}$	1^-	0

Глюони – "двокольорові": кожен з них характеризується комбінацією кольору і антикольору, а кольоровий заряд визначається сумарним значенням кольору глюона. При взаємодії глюонів з кварками колір кварків змінюється; наприклад, синій кварк при взаємодії з червоно-антисинім глюоном стає червоним: глюон немовби гасить своїм антикольором колір кварка і передає йому свій колір. Аромат кварків, їхній електричний та баріонний заряди при взаємодії з глюонами не змінюються, тобто колір є найбільш важливою властивістю кварків при взаємодії. Теорія, що описує таку взаємодію, називається квантовою хромодинамікою (КХД). Така назва віддзеркалює подібність у побудові КХД та квантової електродинаміки (КЕД) (тобто квантової теорії поля та його взаємодію з зарядженими частинками), а також підкреслює значення фундаментальної властивості "кольору" для даних явищ (хромос у перекладі з грецької означає "колір").

Наявність кольорового заряду приводить до того, що глюони сильно взаємодіють

не тільки з кварками, але й один з одним. Якщо фотони випромінюються тільки зарядженими частинками і не випромінюються фотонами, то кольорові глюони можуть бути випроміненими не тільки кольоровими кварками, але й кольоровими глюонами. Якби остання ситуація реалізувалася у випадку фотонів, то виникало немовби світло що "світиться". Тому рівняння глюонного поля (у протилежність рівнянням Максвелла для електромагнітного поля) виявляються нелінійними. Глюонне поле, що називається неабелевим калібровочним полем, квантами якого є глюони, на відміну від електромагнітного, має дивовижну властивість: сила взаємодії кольорових кварків унаслідок обміну кольоровими глюонами збільшується зі збільшенням відстані між кварками (електромагнітна взаємодія стає слабкішою зі зростанням відстані між електричними зарядами). Така властивість неабелевих калібровочних полів отримала назву асимптотичної свободи: при наближенні кварків один до одного сили взаємодії між ними майже зникають і на відстанях $\Delta r \rightarrow 0$ кварки стають вільними (невзаємодіючими).

Взаємодію між двома кварками на відстанях відмінних від нуля можна параметризувати потенціалом типу водокруту

$$V_s = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s \hbar c}{r} + kr,$$

де α_s – константа сильної взаємодії, а k – так звана стала струни. Величина α_s зменшується з енергією і при енергії в декілька ГеВ $\alpha_s \simeq 0,3$. Перший доданок у виразі для V_s , що домінує на малих відстанях ($< 0,2$ фм), обумовлений обміном одного глюона і має такий же вигляд як і потенціал кулонівської взаємодії між одиничними зарядами різного знаку. Другий доданок, що домінує на великих відстанях, утворюється внаслідок багатоглюонного обміну. Згідно з експериментальними даними $k \simeq 1$ ГеВ/фм. Тому, щоб розсунути два кварки на відстань 1 фм, потрібна фантастична енергія $\simeq 1$ ГеВ. Кварки постійно містяться усередині адронів і не можуть вилітати звідти один за одним. Це явище – утримання кварків у адронах – називають словом "конфайнмент" (від англійського confinement – тюремне ув'язнення, обмеження свободи).

У відповідність з асимптотичною свободою кварки усередині адронів майже вільні, але при "спробі" кварка вирватися назовні, подолати конфайнмент, сили його взаємодії з рештою кварків адронів стають настільки великими, що виліт окремого кварку стає неможливим. За рахунок цієї сильної взаємодії можуть виникнути нові кварк–антикваркові пари, кожен кварк, що вилітає, "вкриваєть-

ся" ними, унаслідок чого із адрона можуть вилітати тільки адрони. Процес перетворення народжених кварків у адрони називається адронізацією. Народжені адрони "пам'ятають", що їхнє походження пов'язане з парою первинних кварків і зберігають інформацію про них. Як наслідок, адрони утворюються у вигляді двох струменів, що вилітають у протилежних напрямках. Струмені адронів, які були передбачені як прояв кваркової структури адронів, уперше спостерігалися у 1975 р. (Стенфорд, США).

Квантова хронодинаміка достатньо точно описує процеси, в яких відстань між кварками мала і вони внаслідок асимптотичної свободи слабо зв'язані між собою (наприклад, КХД змогла відтворити вид потенціалу між кварками усередині адрона). Але у процесах, коли кварки перебувають один від одного на відстанях порядку радіуса адрона (≈ 1 фм), де вони сильно зв'язані між собою (наприклад, конфайнмент, адронізація кварків і глюонів, ядерна взаємодія між нуклонами), кількісний опис зустрічається з дуже великими труднощами, які в даний час не переборені. Таким чином, хоча первинна природа ядерної взаємодії між нуклонами відома (сильна кольорова міжкваркова взаємодія, яка обумовлена віртуальними процесами випромінювання та поглинання кольорових глюонів кольоровими кварками), але її кількісний опис у теорії КХД дуже ускладнений. Сильна ж ядерна взаємодія між нуклонами є деяким залишком сильної кольорової кварк-глюонної взаємодії.

Наближено вдається описати нуклон-нуклонну взаємодію за допомогою спрощених теорій мезонного обміну без використання КХД тому, що як нуклони, так і мезони складаються з кварків, а ядерний потенціал на відстанях, що є важливими у нерелятивістській ядерній фізиці, головним чином залежить від обміну систем з трьох кварків системами з двох кварків, якими і є мезони.

Вирази (2.56) та (2.58) для потенціалу нуклон-нуклонної взаємодії, які побудовані на базі загальних фізичних уявлень та емпіричних даних, містять шість не зовсім визначених функцій, що залежать від відстані між нуклонами. Зараз використовується декілька потенціалів взаємодії між нуклонами у вільному просторі, які враховують всі компоненти ядерних сил. Це, наприклад, Паризький потенціал однобозонного обміну; потенціали Рейда і Хамада-Джонсона у вигляді суми потенціалів Юкави з відштовхувальним кором на малих відстанях; потенціал Волкова у вигляді суми потенціалів Гаусса. Параметри таких потенціалів фіксують переважно за експериментальними даними з розсіяння нуклонів у вільному просторі та згідно з характеристиками малонуклонних си-

стем.

Хоча емпіричні дані підтверджують, що взаємодію між вільними нуклонами при не дуже високих енергіях можна характеризувати потенціалами переважно статичного типу, існують дані, які свідчать про наявність значних компонент потенціалу, залежних від швидкості нуклонів.

Такі сили, згідно з галілеєвою інваріантністю, є функціями відносного імпульсу $\vec{p} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) / 2$. Зазвичай обмежуються найнижчим наближенням за швидкістю – лінійним. Єдиним лінійним за імпульсами виразом, що не порушує загальних властивостей симетрії, є спін-орбітальний член типу $([\vec{r} \times \vec{p}] \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2))$; відповідний спін-орбітальний компонент двочастинкової взаємодії має вигляд

$$\hat{V}_{ls} = v_{ls}(r) (\hat{\vec{L}} \hat{\vec{S}}) . \quad (2.69)$$

Тут $\hat{\vec{L}} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ – оператор відносного орбітального моменту; $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{s}}_1 + \hat{\vec{s}}_2$ – оператор сумарного спіну. Хоча внесок такого потенціалу при розсіянні нуклонів малий, але його наявність призводить до спін-орбітального компонента у одночастинковому потенціалі самоузгодженого середнього поля нуклонів у ядрах, який дозволяє отримати магічні числа ядер (§ 3.5).

Ядерні сили є короткодійними і тому можна сподіватися, що для параметризації функцій, що описують їх радіальну залежність, можна використовувати точковий (контактний) потенціал нульового радіуса дії, а саме: δ – сили у вигляді δ -функції

$$V_{\delta}(\vec{r}) = V_{\delta}^{(0)} \delta(\vec{r}) . \quad (2.70)$$

де амплітуда $V_{\delta}^{(0)}$ повинна залежити від відносної швидкості нуклонів, якщо за допомогою потенціалу (2.70) моделюється дія потенціалів із скінченим радіусом. Це можна побачити, якщо розглянути поведінку в імпульсному просторі $\vec{p}$ потенціалу $V(\vec{r})$ з довільною залежністю від відстані $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, тобто, якщо обчислити матричний елемент цього потенціалу в імпульсному просторі

$$\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{r}/\hbar} V(\vec{r}) d\vec{r} . \quad (2.71)$$

Очевидно, що δ -сили приводять до сталого матричного елемента, але використання будь-якого потенціалу з довільним скінченим радіусом дії зумовить залежність матричного елемента (2.71) від імпульсів. Найпростіше ротаційно-інваріантне наближення для нього має вигляд

$$(2\pi\hbar)^3 \langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = V_0 + V_1 \vec{p}'^2 + V_1 \vec{p}^2 + V_2 (\vec{p} \vec{p}') . \quad (2.72)$$

У координатному просторі цьому виразу відповідає такий оператор точкової взаємодії

$$V(\vec{r}) = V_0 \delta(\vec{r}) + V_1 \left(\hat{p}^2 \delta(\vec{r}) + \delta(\vec{r}) \hat{p}^2 \right) + V_2 \hat{p} \delta(\vec{r}) \hat{p}, \quad (2.73)$$

де $\hat{p} = -i\hbar (\vec{\nabla}_1 - \vec{\nabla}_2) / 2$ – оператор відносного імпульсу, який у виразі (2.73) діє на функції, розташовані праворуч від нього (коли він розташований праворуч від δ -функції) і навпаки; амплітуди V_j від швидкостей не залежать. Сили вигляду (2.73) застосовуються дуже часто, як двочастинковий компонент ефективної взаємодії між нуклонами в середніх і важких ядрах.

Як уже зазначалося, при розв'язанні ядерних задач багатьох тіл широко використовується і відіграє дуже важливу роль концепція ефективних потенціалів взаємодії між нуклонами. Це пов'язано з такими причинами:

- 1) розрахунки ядерних характеристик з реалістичними нуклон-нуклонними потенціалами типу (2.58) дуже трудомісткі через складність цих потенціалів;
- 2) у середніх і важких ядрах такі розрахунки можна виконати лише, обмежившись деяким скінченним числом можливих ступенів свободи системи, а для врахування решти ступенів свободи необхідно модифікувати парні ядерні сили;
- 3) потенціали взаємодії між нуклонами у вільному просторі принципово відрізняються від нуклон-нуклонних потенціалів у ядерному середовищі, оскільки нуклони в ядрі перебувають в оточенні інших нуклонів і відчують середнє поле, що генерується іншими нуклонами у процесі обміну мезонами. Останнє зумовлює залежність взаємодії від густини розподілу нуклонів.

У 1956 р. Скірм запропонував як ефективну взаємодію використовувати двочастинкові і тричастинкові сили нульового радіуса дії. Двочастинковий компонент мав вигляд (2.73), а тричастинкові сили $V(1, 2, 3)$ були силами нульового радіуса дії:

$$V(1, 2, 3) = t_3 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_3). \quad (2.74)$$

У подальшому виявилось, що цей компонент сил може бути модельований двочастинковим потенціалом, який залежить від густини нуклонів ρ :

$$V_\rho(1, 2) = \frac{1}{6} t_3 (1 + P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rho \left(\frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \right). \quad (2.75)$$

Компонент потенціалу такого вигляду з $t_3 > 0$ призводить до відштовхування на малих відстанях.

Взаємодії (2.73) і (2.75) називають силами Скірма і дуже широко використовують для обчислення різних характеристик ядер. Параметри потенціалу Скірма зазвичай знаходять з умови отримання за допомогою цих сил відомих значень величин, що характеризують загальні властивості ядерної матерії, а саме – густини ядерної речовини, енергії симетрії, нестисливості, що визначає вплив зміни густини нуклонів на повну енергію системи і тим самим стабільність ядерної матерії. Також часто параметри сил Скірма знаходять з умови узгодження результатів теоретичних розрахунків енергій зв'язку, енергій одночастинкових рівнів та радіусів деяких ядер з експериментальними даними.

У виразах для ефективної взаємодії нуклонів як двочастинковий компонент використовують і більш реалістичні потенціали зі скінченним радіусом дії. Це, наприклад, взаємодія, яка називається сили Гоні, у вигляді суми потенціалів Гаусса для двочастинкового компонента і з тричастинковим компонентом вигляду (2.75).

У цілому ефективні сили взаємодії між нуклонами у ядрах завжди залежать від густини розподілу нуклонів. Один з найпростіших виразів такого типу був запропонований Мігдалом при визначенні властивостей ядер у теорії скінченних фермі-систем. Сили Мігдала мають вигляд

$$V(1, 2) = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) [f + g(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + f'(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) + g'(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)], \quad (2.76)$$

де f і f' – функції вигляду

$$f = f_{in} + (f_{ex} - f_{in}) \frac{\rho(0) - \rho(r)}{\rho(0)} = f_{ex} + (f_{in} - f_{ex}) \frac{\rho(r)}{\rho(0)}, \quad (2.77)$$

де $\rho(r)$ – густина розподілу нуклонів ядра у вигляді функції Фермі (1.37); f_{ex} і f_{in} – сили взаємодії у вільному просторі та центрі ядра (фактично в однорідному ядерному середовищі). Існують декілька наборів параметрів цієї взаємодії, наприклад:

$$f_{in} = 0,0685; \quad f_{ex} = -2,165; \quad f'_{in} = 0,3315; \quad f'_{ex} = 0,465; \quad (2.78)$$

$V_0 = 380 \text{ Мев фм}^3$; $g = 0,0575$; $g' = 0,725$,
або трохи інший

$$f_{in} = -0,163, \quad f_{ex} = -4,36; \quad f'_{in} = f'_{ex} = 1,53 (1 + 2,55A^{-2/3}); \quad (2.79)$$

$$V_0 = 350 \text{ Мев фм}^3; \quad g = 0; \quad g' = 1,2.$$

З формул (2.76), (2.77) видно, що значення ефективних сил значно змінюються при переході від внутрішньої області ядра до вільного простору. Порівняння

експериментальних даних та розрахунків з силами Скірма та Гоні показує, що більш реалістичними є від'ємні значення параметра f_{in} .

Ефективні сили Мігдала, як із сили Скірма та Гоні, моделюють повну ймовірність взаємодії двох нуклонів у ядрі, що включає багатократні зіткнення нуклонів в ядерному середовищі, де діє принцип Паулі. Це дає змогу розглядати ядро як систему незалежних квазічастинок, що рухаються у середньому полі, сформованому цими ефективними силами. Залежність ефективної взаємодії від імпульсу призводить до так званої ефективної маси нуклона, коли одночастинкові стани ядер відповідають руху квазічастинки з масою відмінною від маси нуклона у вільному просторі.

Глава 3

Одночастинкові та колективні явища в ядрах

3.1. Необхідність побудови моделей структури ядер

Однією з головних задач теорії атомного ядра є пояснення та передбачення характеристик основних і збуджених станів ядер. Можливі два підходи для її вирішення. Можна намагатися досліджувати властивості ядер мікроскопічними методами квантової теорії багатьох тіл, базуючись на ядерній взаємодії між нуклонами, а можна застосовувати прості феноменологічні моделі. У феноменологічних наближеннях ядро замінюється деякою модельною фізичною системою, що досить добре описує визначені властивості ядра і допускає досить простий математичний розгляд.

Перший підхід відомий як мікроскопічна теорія ядра. Оскільки реальна ядерна взаємодія точно невідома, а для неї використовують різні параметризації, то такий метод є все ж таки деяким наближенням і тому його часто називають наполовину мікроскопічним підходом. Головними проблемами у використанні мікроскопічних методів є математичне розв'язування квантової задачі багатьох тіл та фізична інтерпретація отриманих результатів. Для важких ядер математичні труднощі є не лише технічними, але й принциповими і призводять до необхідності спрощень у формулюванні задач. Дійсно, у квантовій теорії система з A нуклонів у деякому стані α описується хвильовою функцією

$$\Psi_{\alpha}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A; m_{s,1}, m_{s,2}, \dots, m_{s,A}) \equiv \langle \{\vec{r}_j\}, \{m_{s,j}\} | \alpha \rangle, \quad (3.1)$$

що залежить від $3A$ просторових координат $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A$ та від A спінових індексів $m_{s,1}, m_{s,2}, \dots, m_{s,A}$, кожен з яких пробігає два значення, що відповідають двом можливим орієнтаціям спіну нуклона. Тому рівняння Шредінгера,

наприклад, для ядра із ста нуклонів, має вигляд диференціального рівняння в частинних похідних від $300-3=297$ просторових змінних (після виділення руху центра мас) і містить $2^{100} \approx 10^{30}$ спінових функцій. Очевидно, що така задача не може бути розв'язана без серйозних математичних, а тому і часто неконтрольованих фізичних, спрощень. Сучасна мікроскопічна теорія ядра є деяким різновидом моделі, яка хоч і дозволяє розрахувати багато характеристик реальних ядер, але поки що одне із найважливіших її призначень – це визначення меж застосування більш простих феноменологічних моделей, що описують конкретні властивості ядер. Мікроскопічна теорія може виявити внутрішню єдність різних феноменологічних моделей та усунути суперечності між протилежними, як на перший погляд, початковими припущеннями на яких вони базуються.

3.2. Загальна класифікація ядерних моделей

Ядерні моделі розрізняються між собою залежно від того, які ступені свободи руху нуклонів вони враховують. Точна хвильова функція (3.1) залежить від A просторових координат $\vec{r}_i$, які відраховуються від центра інерції ядра, тобто

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' - \vec{R}_C, \quad \vec{R}_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i', \quad (3.2)$$

де $\vec{r}_i'$ - координати відносно нерухомої (лабораторної) системи координат. З формули (3.2) маємо

$$\sum_{i=1}^A \vec{r}_i = 0. \quad (3.3)$$

Таким чином, з $3A$ просторових координат $\vec{r}_i$ незалежними є $3(A-1)$, тобто система з A нуклонів має $3(A-1)$ ступенів свободи у координатному просторі.

У кожній феноменологічній моделі враховується лише певне обмежене число ступенів свободи ядра. Ступені свободи природно поділити на одночастинкові, що описують рух окремих частинок, та колективні, що відповідають корельованому руху великої кількості частинок. Відповідно до цього, моделі, які використовуються в ядерній фізиці, можна поділити на колективні та одночастинкові, а також узагальнені, в яких враховуються як колективні, так і одночастинкові ступені свободи.

За аналогією з суцільним середовищем колективні моделі, що враховують корельовані ступені свободи ядра, називають моделями з сильною взаємодією.

У колективних моделях ядро моделюється або рідиною або твердим тілом. У таких середовищах колективні ефекти виникають внаслідок частих та інтенсивних зіткнень частинки з її ближніми сусідами. Це означає, що радіус дії сил між нуклонами r_{int} та довжина l вільного пробігу нуклонів вважаються малими порівняно з радіусом ядра R_0 :

$$R_0 \gg \{r_{int}, l\}. \quad (3.4)$$

Одночастинкові моделі враховують ступені свободи, що описують рух індивідуальних нуклонів. Припускається, що кожна частинка рухається незалежно від інших у деякому самоузгодженому полі, яке створюється сукупним рухом усіх нуклонів ядра. Тому такі моделі часто називають моделями незалежних частинок і ядро розглядається як деякий газ у замкнутому об'ємі. Вважається, що вільний пробіг нуклонів є значно більшим від радіуса ядра, а останній значно перевищує радіус взаємодії:

$$l \gg R_0 \gg r_{int}. \quad (3.5)$$

З погляду класичної теорії суцільних середовищ у колективних та одночастинкових моделях роблять протилежні та взаємовиключні припущення про довжину вільного пробігу нуклона в ядрі і співіснування таких моделей виглядає досить парадоксально. Вирішення цього парадокса полягає в тому, що ядерне середовище відрізняється від класичного, а довжина пробігу – характеристика класичної механіки. Рух нуклонів у ядрі є квантовим процесом, дебройлівська довжина хвилі нуклона в ядрі має порядок розмірів ядра і тому таку ж невизначеність має і значення довжини вільного пробігу нуклона.

Перелічимо найчастіше використовувані феноменологічні моделі ядра. Історично першими моделями, які дозволили описати основні глобальні властивості ядер, були колективні моделі. До них належать такі підходи.

1. Ядерна матерія – модель, що вивчає властивості гіпотетичного необмеженого суцільного середовища, яке складається з протонів та нейтронів, що взаємодіють за допомогою ядерних сил. При однаковій густині протонів ρ_p та нейтронів ρ_n ядерна матерія називається симетричною, при $\rho_p \neq \rho_n$ – асиметричною.

Область застосування такої моделі: розрахунки густини і питомої енергії зв'язку ядерної речовини, дослідження насичення ядерних сил та поведінки

нуклонів при великих енергіях збудження і т. ін. Модель може бути використана для опису руху нуклонів у центрі важких ядер та дослідження деяких типів колективних збуджень.

2. Краплинна модель. Ядро трактується, як заряджена крапля рідини (у модифікованому варіанті – як крапля протонної та нейтронної рідин), густина якої дорівнює густині нуклонів у центрі ядра. Енергія ядра записується у вигляді суми об'ємної, поверхневої та кулонівської компонент. Додатково враховуються, виходячи за рамки уявлень класичної фізики, енергії симетрії та спарювання.

Область використання: побудова напівемпіричної формули мас, що описує поведінку усередненої енергії зв'язку ядер як функції A та Z ; розгляд поверхневих коливань сферичних ядер; фізичне пояснення процесу поділу ядер. Основою для використання цієї моделі є такі властивості: постійність густини ядерної речовини, що свідчить про її "нестисливість"; пропорційність енергії зв'язку ядра його масовому числу, яка подібна до пропорційності енергії випаровування з рідкої краплі її маси; насичення ядерних сил подібне до властивості сил у рідині.

3. Модель несферичного ядра. Ядро розглядають, як згусток ядерної речовини, який з деяких причин має несферичну форму у рівноважному стані. Враховуються обертальні та коливальні ступені свободи.

Область застосування: опис нижніх обертальних та коливальних рівнів парно-парних ядер несферичної форми; дослідження властивостей ядерних систем з великими швидкостями обертання, які утворюються при зіткненні важких іонів.

Колективні моделі не дають змоги описати оболонкову структуру ядер. Це можна зробити лише користуючись одночастинковими моделями, до яких належать такі.

1. Модель ядерного фермі-газу, яка є найпростішою одночастинковою моделлю. Ядро розглядається як ідеальний фермі-газ невзаємодіючих один з одним нуклонів. Об'єм, що займає фермі-газ, беруть рівним об'єму ядра, а поверхневі явища не враховують.

Область застосування: обчислення глибини ефективної ядерної потенціальної ями; якісне пояснення насичення ядерних сил та ефекту симетрії; наближений опис розподілу нуклонів за імпульсами.

2. Оболонкові моделі ядра. Вважається, що нуклони рухаються майже незалежно один від одного в деякому середньому потенціальному полі, що створюється рухом усіх нуклонів ядра. Реальна взаємодія між нуклонами розгля-

дається у вигляді суми домінуючого самоузгодженого поля і достатньо слабкої залишкової взаємодії. Існують різні варіанти оболонкових моделей, які розрізняються методами врахування залишкової взаємодії. У першому варіанті цієї моделі, яку часто називають одночастинковою моделлю оболонок, залишкової взаємодії немає. Усі інші варіанти об'єднують під загальною назвою "оболонкові моделі з парними кореляціями та залишковою взаємодією".

Область застосування одночастинкової оболонкової моделі: отримання магічних чисел; пояснення спінів, парності та магнітних моментів основних та деяких збуджених станів ядер, що відрізняються від магічних на один нуклон.

Варіанти оболонкової моделі з парними кореляціями та залишковою взаємодією характеризуються головним чином типом і способами врахування залишкової взаємодії.

У моделі оболонок з феноменологічним спарюванням залишкова взаємодія явно не враховується, а ефект спарювання нуклонів одного типу використовується при побудові хвильових функцій ядра. Вважається, що нуклони одного сорту об'єднуються в пари з нульовим моментом кількості руху та додатною парністю і тому повна хвильова функція ядра формується хвильовими функціями пар нуклонів.

Область застосування: пояснення значень спінів та парності всіх парно-парних ядер і майже всіх парно-непарних ядер; наближене обчислення магнітних моментів майже всіх парно-непарних ядер.

Надплинна модель відрізняється від попередньої явним введенням залишкової взаємодії, яка забезпечує ефект спарювання нуклонів. Ця модель на більш глибокому рівні пояснює ефект спарювання і дає теоретичну базу для попереднього підходу.

Основні властивості колективних та одночастинкових моделей враховані в узагальненій моделі ядра. Вважається, що ядро є згустком ядерної речовини деякої форми, яка може бути оточена декількома зовнішніми нуклонами. Поведінка остова описується однією з колективних моделей, а поведінка зовнішніх нуклонів – самоузгодженим полем з залишковою взаємодією або без неї. Окрім цього, вводиться більш або менш інтенсивна взаємодія між колективними (остов) та одночастинковими (зовнішні нуклони) ступенями свободи. Враховується можливість деформації остова, що приводить до несферичності ядер. Область застосування: обчислення квадрупольних моментів та характеристик великої кількості рівнів з невеликими енергіями.

Тепер після ознайомлення з загальним характером руху нуклонів в ядрах та моделями його опису, розглянемо деякі моделі ядра більш детально.

3.3. Незалежний рух нуклонів у моделі ядерного фермі-газу

Модель фермі-газу – це найпростіша модель незалежного руху нуклонів в ядрі. Відповідно до неї ядро розглядається як система виродженого ядерного фермі-газу, тобто як система невзаємодіючих нуклонів, що підпорядковуються принципу Паулі. Рух нуклонів описується законами квантової механіки і припускається, що він близький до вільного руху частинок. Згідно з принципом Паулі, якщо немає зіткнень, нуклони незбудженого (холодного) ядра повністю заповнюють всі нижні енергетичні рівні аж до деякого рівня з енергією

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} \quad (3.6)$$

включно. Ця максимальна енергія заповнених одночастинкових станів називається енергією Фермі і відраховується від дна потенціальної ями. Величина p_F – це максимальний (граничний) імпульс нуклона або імпульс Фермі, нижче якого всі стани зайняті. Таким чином, густина розподілу нуклонів за імпульсами $\rho_{\vec{p}}(\vec{p})$ у холодному ядрі дорівнює нулю при $p > p_F$ і тому повна кількість нуклонів A в ядрі та його енергія E_0 зв'язані з густиною нуклонів в імпульсному просторі $\rho_{\vec{p}}(\vec{p})$ та імпульсом Фермі такими співвідношеннями:

$$A = \int_{p \leq p_F} \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) d\vec{p}; \quad E_0 = \int_{p \leq p_F} \frac{p^2}{2m} \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) d\vec{p}, \quad (3.7)$$

де інтегрування виконується за об'ємом імпульсного простору з $p \leq p_F$.

Знайдемо вираз для густини розподілу $\rho_{\vec{p}}$. Вважаємо, що об'єм системи достатньо великий і тому форма поверхні не істотно впливає на $\rho_{\vec{p}}$. Ядро апроксимуємо кубом з ребром L і об'ємом $V = L^3$. Хвильова функція частинки, що рухається в такому кубі, має вигляд

$$\psi \equiv \text{const} \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z). \quad (3.8)$$

Для виключення ефектів, пов'язаних з рухом центра мас, використовуємо систему центра мас і вважаємо, що кожна з координат змінюється в інтервалі

від $-L/2$ до $+L/2$, оскільки центр мас кубу збігається з його геометричним центром. Нехтуючи ймовірністю знаходження нуклонів зовні ядра та враховуючи неперервність хвильової функції на межі системи, маємо, що на поверхні хвильова функція повинна дорівнювати нулю. Тоді хвильове число $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ буде задовільняти такі умови квантування:

$$\pm k_x \frac{L}{2} = \pi n_x, \quad \pm k_y \frac{L}{2} = \pi n_y, \quad \pm k_z \frac{L}{2} = \pi n_z, \quad (3.9)$$

де коефіцієнти n_x, n_y, n_z набувають цілих значень. Співвідношення (3.9) означають, що одночастинкові енергії $\varepsilon \equiv \hbar^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)/2m$ є дискретними, а числа n_x, n_y, n_z визначають значення енергії, $\varepsilon = (\hbar^2/2m)(2\pi/L)^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = (2/\pi\hbar)^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)/2mV^{2/3}$, і тим самим стан системи. Відмітимо, що умова рівності нулю хвильової функції на межі зайнятого об'єму та вибір початку координат у центрі мас призводять до таких самих значень хвильових чисел, як і використання періодичних граничних умов: $\psi(\vec{r} + \vec{L}) = \psi(\vec{r})$.

Відповідно до принципу Паулі у кожній комірці розміру $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$ може бути чотири нуклони – два нейтрони або два протони з двома проекціями спіну. Тому згідно з (3.9) кількість станів нуклонів, значення імпульсів яких лежить у інтервалі $\Delta \vec{p} \equiv \Delta \vec{k}/\hbar$, дорівнює

$$\Delta N(\vec{p}) \equiv 4\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{4V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (3.10)$$

Для великої системи $V = L^3 \gg 1$, тому $\Delta k_j \rightarrow 0$ і

$$dN(\vec{p}) \equiv \frac{4V}{(2\pi\hbar)^3} d\vec{p}; \quad d\vec{p} \equiv \hbar^3 d\vec{k}. \quad (3.11)$$

Тобто густина розподілу нуклонів за імпульсами для моделі фермі-газу стала при $p \leq p_F$ і дорівнює

$$\rho_{\vec{p}}(\vec{p}) = \frac{dN(\vec{p})}{d\vec{p}} = \frac{4V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{r_0}{\pi\hbar} \right)^3 A. \quad (3.12)$$

Тут було використано стандартне співвідношення між об'ємом та кількістю нуклонів у ядрі

$$V = 4\pi R_0^3/3 = 4\pi r_0^3 A/3. \quad (3.13)$$

За формулами (3.7) і (3.12) знаходимо співвідношення

$$A = \int_{p \leq p_F} \rho_{\vec{p}} d\vec{p} = \frac{4}{3} \pi p_F^3 \rho_{\vec{p}} = \rho_0 V \quad (3.14)$$

між граничним імпульсом Фермі p_F та густиною ρ_0 ядерної речовини у координатному просторі,

$$\rho_0 = \frac{A}{V} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \cong 0,14 \text{ фм}^{-3}. \quad (3.15)$$

За допомогою (3.14), користуючись (3.12), (3.15), отримуємо вирази для хвильового числа Фермі k_F і енергії Фермі:

$$k_F \equiv \frac{p_F}{\hbar} = \left(\frac{3}{2} \pi^2 \rho_0 \right)^{1/3} \equiv \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \frac{1}{r_0} \cong 1,27 \text{ фм}^{-1}; \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_F &\equiv \frac{(\hbar k_F)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \frac{1}{r_0^2} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{2} \rho_0 \right)^{2/3} = \\ &= \frac{48,496}{r_0^2 [\text{фм}^2]} \text{ MeV} = 126,082 (\rho_0 [\text{фм}^{-3}])^{2/3} \text{ MeV} \cong 34 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Числові значення у формулах (3.15)- (3.17) були обчислені з $r_0 = 1,2$ фм та з масою m , що відповідає значенню одиниця атомної маси m_u , (1.2): $\hbar^2/m_u = 41,80349 \text{ фм}^2 \text{ MeV}$.

З формул (3.7) і (3.13) знаходимо вираз для енергії системи нуклонів:

$$E_0 \equiv E_0(A) = \int_{p \leq p_F} \frac{p^2}{2m} \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) d\vec{p} = A \varepsilon_{av}, \quad (3.18)$$

де ε_{av} – стала середня енергія, що припадає на один нуклон,

$$\varepsilon_{av} \equiv \frac{E_0}{A} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \cong 22 \text{ MeV}. \quad (3.19)$$

Таким чином, у обмеженому фермі-газі, як і в ядрі (у відповідності до формули Вейцекера), енергія системи E_0 пропорційна кількості частинок (об'єму системи). Разом з тим величина енергії (3.18) додатна, оскільки енергія, яка визначена згідно з формулою (3.7), є лише повною кінетичною енергією системи нуклонів. Тому при застосуванні до ядра модель вільного фермі-газу має бути модифікована, для чого необхідно врахувати потенціальну енергію, тобто

той факт, що нуклони ядра утворюють зв'язану систему і тому мають бути в деякому потенціальному полі сил притягання. Якщо апроксимувати це поле прямокутною потенціальною ямою з нескінченно високими стінками, то всі попередні результати не зміняться. Глибину ями V_0 можна оцінити з умови тотожності експериментального значення енергії S_n відриву нуклона від ядра ($S_n \cong 8 \text{ MeV}$) і теоретичного значення цієї величини, $S_n = V_0 - \varepsilon_F$. Останнє співвідношення випливає з того, що енергія Фермі є енергію найменш зв'язаного нуклона, якщо немає потенціальної ями (див. рис. 3.1). Таким чином, маємо:

$$V_0 = S_n + \varepsilon_F \cong 34 + 8 = 42 \text{ MeV}. \quad (3.20)$$

Таке значення V_0 близьке до середнього значення глибини потенціалу Вудса – Саксона, за допомогою якого можна досить точно обчислити характеристики одночастинкових станів у сферичних ядрах (§ 3.5).

У варіанті моделі фермі-газу, розглянутій вище, не враховувався той факт, що ядро складається з різних типів нуклонів (Z протонів і N нейтронів) і тому його можна застосовувати тільки у ядрах з однаковою кількістю протонів та нейтронів. У більшості стабільних ядер $N \neq Z$ і тому ядерну систему необхідно розглядати як суміш двох вироджених фермі-газів, а саме газу з Z протонів і газу з N нейтронів, які містяться у одному і тому ж об'ємі $V = 4\pi r_0^3 A/3$, що дорівнює об'єму еквівалентного сферичного ядра (див. (3.13)).

Значення енергій Фермі для протонів $\varepsilon_F^{(p)}$ і нейтронів $\varepsilon_F^{(n)}$ знаходимо з виразів, які визначають кількість протонів та нейтронів у ядрі, і які аналогічні формулі (3.14):

$$\begin{aligned} Z &= \int_{p \leq p_F^{(p)}} \rho_{\vec{p}}^{(p)} d\vec{p} = \frac{4}{3}\pi \left(p_F^{(p)}\right)^3 \rho_{\vec{p}}^{(p)} = \rho_0^{(p)} V, \\ N &= \int_{p \leq p_F^{(n)}} \rho_{\vec{p}}^{(n)} d\vec{p} = \frac{4}{3}\pi \left(p_F^{(n)}\right)^3 \rho_{\vec{p}}^{(n)} = \rho_0^{(n)} V, \end{aligned} \quad (3.21)$$

де $p_F^{(p)}$ і $p_F^{(n)}$ – імпульси Фермі для протонів і нейтронів, що визначають енергії Фермі для протонів і нейтронів:

$$\varepsilon_F^{(p)} = \frac{\left(p_F^{(p)}\right)^2}{2m_p}, \quad \varepsilon_F^{(n)} = \frac{\left(p_F^{(n)}\right)^2}{2m_n}. \quad (3.22)$$

Величини $\rho_{\vec{p}}^{(p)}$, $\rho_{\vec{p}}^{(n)}$ і $\rho_0^{(p)}$, $\rho_0^{(n)}$ в (3.21) є густинами протонів та нейтронів відповідно в імпульсному та координатному просторах:

$$\rho_{\vec{p}}^{(p)}(\vec{p}) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{r_0}{\pi\hbar} \right)^3 A,$$

$$\rho_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{p}) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{r_0}{\pi\hbar} \right)^3 A, \quad (3.23)$$

$$\rho_0^{(p)} = \frac{Z}{V} = \rho_0 \frac{Z}{A}, \quad \rho_0^{(n)} = \frac{N}{V} = \rho_0 \frac{N}{A}. \quad (3.24)$$

У формулах (3.23) і (3.24) $\rho_{\vec{p}}$ і ρ_0 – густини нуклонів у імпульсному та координатному просторах, які задаються співвідношеннями (3.12) і (3.15). Густина розподілу протонів і нейтронів у імпульсному просторі у два рази менші ніж густини розподілу нуклонів, (3.12), $\rho_{\vec{p}}^{(p)} = \rho_{\vec{p}}^{(n)} = \rho_{\vec{p}}/2$, оскільки у випадку нетотожних нуклонів одночастинкові стани лише двократно вироджені (за спіном). Відзначимо, що у імпульсному просторі густини розподілу протонів і нейтронів однакові але зосереджені в різних областях імпульсного простору: $p \leq p_F^{(p)}$ – для протонів і $p \leq p_F^{(n)}$ – для нейтронів.

За допомогою формул (3.21) – (3.24) знаходимо такі вирази для імпульсів Фермі $p_F^{(p)}$, $p_F^{(n)}$ протонів і нейтронів та енергій Фермі:

$$p_F^{(p)} = \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} p_F, \quad p_F^{(n)} = \left(\frac{2N}{A} \right)^{1/3} p_F; \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_F^{(p)} = \left(\frac{2Z}{A} \right)^{2/3} \left(\frac{m}{m_p} \right) \varepsilon_F, \quad \varepsilon_F^{(n)} = \left(\frac{2N}{A} \right)^{2/3} \left(\frac{m}{m_n} \right) \varepsilon_F. \quad (3.26)$$

Аналогічно формулі (3.18), маємо для енергії двокомпонентного фермі-газу:

$$E_0 \equiv E_0(Z, N) = \int_{p \leq p_F^{(p)}} \frac{p^2}{2m_p} \rho_{\vec{p}}^{(p)} d\vec{p} + \int_{p \leq p_F^{(n)}} \frac{p^2}{2m_n} \rho_{\vec{p}}^{(n)} d\vec{p} =$$

$$= \frac{3}{5} \left[Z \varepsilon_F^{(p)} + N \varepsilon_F^{(n)} \right] = \quad (3.27)$$

$$= A \varepsilon_{av} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2Z}{A} \right)^{5/3} \left(\frac{m}{m_p} \right) + \left(\frac{2N}{A} \right)^{5/3} \left(\frac{m}{m_n} \right) \right],$$

де ε_{av} – середня енергія, що припадає на один нуклон (3.19).

У випадку симетричного фермі-газу, тобто якщо $Z = N = A/2$ і $m_p \cong m_n \cong m$ (m – маса нуклона), співвідношення (3.25) і (3.26) збігаються з аналогічними виразами моделі (3.16) – (3.19) однокомпонентного нуклонного фермі-газу.

Запишемо формулу (3.27) для енергії $E_0(Z, N)$ двокомпонентної системи нуклонів у такому вигляді ($m_p \cong m_n \cong m$):

$$E_0(Z, N) = \frac{3}{10} \varepsilon_F A \left[(1 + I)^{5/3} + (1 - I)^{5/3} \right], \quad I = \frac{N - Z}{A}, \quad (3.28)$$

де I – відносний нейтронний надлишок. Розклад виразу у квадратних дужках за ступенями I з точністю до членів другого порядку малості дає

$$E_0(Z, N) = E_0(A) + E_{sym},$$

$$E_{sym} = \frac{1}{3} \varepsilon_F \frac{(N - Z)^2}{A} \equiv \frac{1}{3} \varepsilon_F \frac{(A - 2Z)^2}{A}. \quad (3.29)$$

Звідси видно, що енергія $E_0(Z, N)$ набирає при заданому масовому числі $A = Z + N$ найменшого значення тоді, коли у даному об'ємі ядра кількість нейтронів і протонів однакова. Це пов'язано з тим, що за принципом Паулі в незбудженому ядрі послідовно заповнюються всі стани з енергіями нижчими від енергій Фермі $\varepsilon_F^{(p)}$ і $\varepsilon_F^{(n)}$. Енергії Фермі нелінійно залежать від нейтронного залишку так, що при $Z \neq N$ зміни енергій Фермі $\varepsilon_F^{(p)}$ і $\varepsilon_F^{(n)}$ не компенсуються, а сумарна енергія $E_0(Z, N)$ збільшується порівняно з енергією $E_0(A) = 3\varepsilon_F A/5$ симетричного ядра з $Z = N = A/2$.

Другий компонент у розкладі (3.29) має вигляд енергії симетрії у формулі Вейцекера (1.17) для енергії зв'язку нуклонів в ядрах, але значення коефіцієнта $a_4 \simeq 24$ МеВ, що фіксує значення енергії симетрії у формулі Вейцекера, удвічі перевищує значення відповідного коефіцієнта $a_4^{(0)} \equiv \varepsilon_F/3 \cong 12$ МеВ у формулі (3.29). Це пов'язано з тим, що сумарна енергія $E_0(Z, N)$ моделі фермі-газу є лише повною кінетичною енергією системи нуклонів і не враховує потенціальну енергію взаємодії між ними в ядрі. Внесок потенціальної енергії в a_4 зумовлений тою особливістю ядерних сил, що взаємодія нейтрона з протоном у середньому сильніша, ніж взаємодія між однаковими нуклонами завдяки більшій кількості

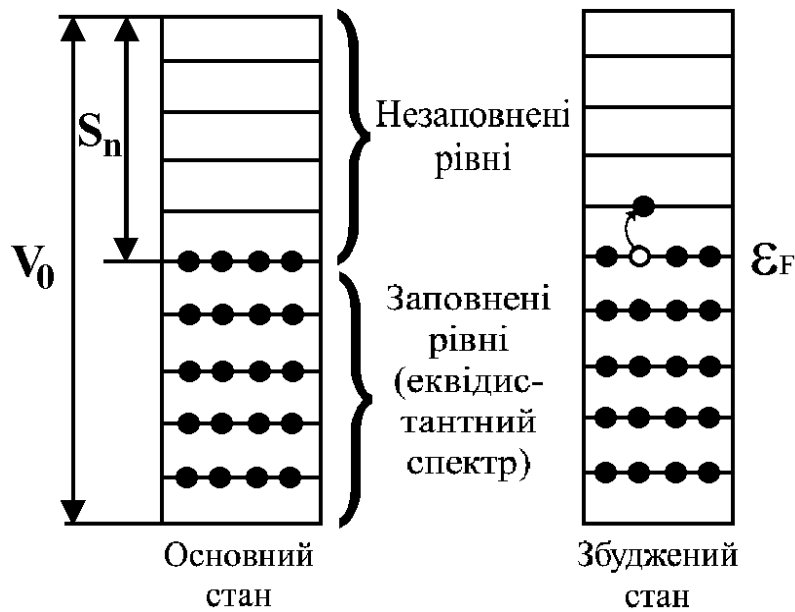


Рис. 3.1. Схематичне зображення ядра як системи виродженого фермі-газу

можливих двочастинкових станів при $(n - p)$ -взаємодії (§ 2.4). Тому при фіксованому A максимум потенціальної енергії (а тому і мінімум повної енергії) досягається при $Z = N$, оскільки саме у цьому випадку внесок $(n - p)$ -взаємодії буде найбільшим.

Схематичне зображення ядра як системи виродженого ядерного фермі-газу, тобто як системи нуклонів, що описуються законами квантової механіки, які підпорядковуються принципу Паулі та повністю заповнюють усі нижні енергетичні рівні у холодному ядрі, ілюструє рис. 3.1.

Збудженому стану відповідає перехід частинки з заповнених рівнів на незаповнені. Вакансії, які з'являються на заповнених рівнях, називають дірками. У моделі фермі-газу існує різка границя між заповненими та незаповненими станами. Урахування залишкової парної взаємодії між нуклонами може привести до такого розмиття границі Фермі, що розподіл нуклонів за рівнями не буде мати чіткої межі. Дійсно, хоча поява вакансій або "дірок" на нижніх орбітах та частинок на верхніх і буде збільшувати повну енергію системи, але притягання між нуклонами, яке дає від'ємний внесок в енергію, може компенсувати це збільшення. Тому з деякою ймовірністю частина нуклонів може бути розміщена на рівнях вищих від рівня Фермі і частина нижчих рівнів не буде заповнена повністю. Таким чином, кореляція у русі нуклонів призводить до розмиття границі Фермі. Ступінь цього розмиття та ймовірність переходу частинки на рівень з енергією більшою ніж ϵ_F дуже залежить від енергетичного інтервалу (ΔE) ,

що відокремлює рівень Фермі від наступного рівня. Сукупність експериментальних даних та теоретичні розрахунки показують, що в тих випадках, коли цей інтервал великий, як це має місце для магічних ядер, уявлення про ядро як про систему незалежних нуклонів, що рухаються в потенціальному полі і заповнюють без пропусків енергетичні рівні до рівня Фермі, є досить гарним першим наближенням до дійсної картини руху нуклонів в ядрах. Зокрема, саме короткодійний характер нуклон-нуклонного потенціалу приводить до невеликої ймовірності обміну великими імпульсами при зіткненні двох нуклонів і тим самим зумовлює можливість переходу нуклонів лише при деякому досить малому значенні ΔE . Пояснимо роль короткодії взаємодії на простому прикладі. Нехай два нуклони в ядрі з імпульсами $\vec{p}_1$ та $\vec{p}_2$ взаємодіють один з одним за допомогою потенціалу Гаусса:

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -V_0 \exp \left[-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 / \mu^2 \right]. \quad (3.30)$$

Ймовірність того, що частинки в кінцевому стані будуть мати імпульси $\vec{p}_1'$ та $\vec{p}_2'$ визначається квадратом матричного елемента переходу з початкового стану в кінцевий і в першому наближенні має вигляд:

$$\begin{aligned} & |\langle \vec{p}_1', \vec{p}_2' | V | \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle|^2 \equiv \\ & \equiv \left| \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 e^{-i(\vec{p}_1' \vec{r}_1 + \vec{p}_2' \vec{r}_2)} V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) e^{i(\vec{p}_1 \vec{r}_1 + \vec{p}_2 \vec{r}_2)} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Уведемо нові змінні $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ і виконаємо інтегрування. Виключаючи рух центра мас та враховуючи закон збереження імпульсу $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$, отримуємо, що матричний елемент у формулі (3.31) є пропорційним величині

$$V(\vec{p}) = \int d\vec{r} e^{-i\vec{p}\vec{r}} V(\vec{r}) = -\pi^{3/2} \mu^3 V_0 e^{-\frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')^2 \mu^2}{4}}, \quad (3.32)$$

де $\vec{p} \equiv \vec{p}_1 - \vec{p}_1'$, і тому при взаємодії двох нуклонів ймовірність обміну імпульсами з великими змінами їхніх значень ($|\vec{p}_1 - \vec{p}_1'| \gg 1/\mu$) мала. Цей результат справедливий для довільних короткодійних потенціалів.

Короткодійний характер нуклон-нуклонної взаємодії та принцип Паулі відповідають за те, що модель незалежних частинок можна взяти за основу при

розгляді структури ядра. Дійсно, всі сусідні рівні, окрім самих високих, заповнені нуклонами, а на заповнені стани нуклони (згідно з принципом Паулі) перейти не можуть. У випадку короткодійних ядерних сил переходи між далекими рівнями також малоймовірні, так як взаємодія двох нуклонів з великим переданим імпульсом мала.

3.4. Формування середнього поля

Покажемо, що в ядрах нуклони рухаються в деякому самоузгодженому середньому полі. Добре відомо, що електрони атомів також рухаються в середньому полі, але фізичні причини виникнення такого поля в ядрах і атомах зовсім різні. Якщо в атомі середнє поле є далекодіючим кулонівським полем, яке пов'язане з наявністю зарядженого виділеного центра (нескінченно важкого ядра відносно електронів атома), то в ядрі немає такого центру притягання і середній ядерний потенціал утворюється усередненою взаємодією даного нуклона з усіма іншими. Взаємне притягання нуклонів приводить до їх просторової концентрації біля центра ядра, але стисканню системи заважає принцип Паулі та відштовхування на малих відстанях. У результаті формується досить плавний розподіл густини нуклонів у координатному просторі, і середній потенціал в ядрі породжується наявністю такого розподілу. Дійсно, приміром для потенціалу взаємодії нейтрона з іншими нуклонами маємо:

$$\begin{aligned}
 V_n(\vec{r}) &\equiv \sum_{n'} V_{nn'}(\vec{r}_n, \vec{r}_{n'}) + \sum_p V_{np}(\vec{r}_n, \vec{r}_p) = \\
 &= \sum_{i_n} V_{nn'}(\vec{r}_n, \vec{r}_{i_n}) \left[\frac{\Delta N_n(\vec{r}_{i_n})}{\Delta \vec{r}_{i_n}} \right] \Delta \vec{r}_{i_n} + \\
 &+ \sum_{i_p} V_{np}(\vec{r}_n, \vec{r}_{i_p}) \left[\frac{\Delta N_p(\vec{r}_{i_p})}{\Delta \vec{r}_{i_p}} \right] \Delta \vec{r}_{i_p}, \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

де $V_{nn'}$, V_{np} – потенціали взаємодії нейтронів відповідно з нейтронами та протонами; $\Delta N_n(\vec{r}_i)$ ($\Delta N_p(\vec{r}_i)$) – кількість нейтронів (протонів) у такому малому об'ємі $\Delta \vec{r}_i \ll 1$ поблизу точки $\vec{r}_i$, що двочастинкові потенціали в ньому можна вважати незмінними. Припускаючи існування густин розподілів нейтронів $\rho_n(\vec{r}_i) \equiv \Delta N_n(\vec{r}_i) / \Delta \vec{r}_i$ та протонів $\rho_p(\vec{r}_i) \equiv \Delta N_p(\vec{r}_i) / \Delta \vec{r}_i$ при $\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0$, виконуємо стандартний перехід у формулі (3.33) від підсумовування до інтегрування. Тоді одержуємо такий вираз для потенціалу взаємодії нейтрона в ядрі:

$$\begin{aligned}
V_n(\vec{r}) &= \int V_{nn}(\vec{r}, \vec{r}') \rho_n(\vec{r}') d\vec{r}' + \\
&+ \int V_{np}(\vec{r}, \vec{r}') \rho_p(\vec{r}') d\vec{r}' \equiv V_{av}^{(n)}(\vec{r}).
\end{aligned}
\tag{3.34}$$

Очевидно, що вираз для потенціалу взаємодії протона має вигляд, подібний (3.34), після заміни індексів p на n та додавання електростатичного кулонівського потенціалу.

Згідно з формулами (3.33), (3.34) потенціал $V_{av}^{(n)}(\vec{r})$, що діє на нуклон, залежить не від координат всіх нуклонів, а лише від його координат, тобто є одностинковим середнім потенціалом. Саме просторова концентрація нуклонів біля центру ядра, яка дає змогу ввести поняття густини розподілу нуклонів $\rho_n(\vec{r})$, $\rho_p(\vec{r})$, зумовлює виникнення середнього поля ядра, у якому рухаються нуклони. Причому це поле має бути узгодженим з густиною розподілу нуклонів. Таке поле зазвичай називають самоузгодженим. Атомне ядро є прикладом самоорганізованої системи, властивості якої визначаються внутрішніми процесами, що в ній протікають, у відмінність від несамоорганізованих систем, рух в яких визначається зовнішніми полями, наприклад, електронної оболонки атому, де рух електронів зумовлюється їхньою взаємодією з майже точковим кулонівським полем ядра.

Густина $\rho_\alpha(\vec{r})$ розподілу нуклонів типу α ($\alpha = n, p$ для нейтронів і протонів відповідно) визначається повною хвильовою функцією $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ ядра, яка залежить від координат усіх нуклонів (див. (1.108)),

$$\rho_\alpha(\vec{r}) = \int |\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)|^2 \sum_{i=1}^{X_\alpha} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_A,
\tag{3.35}$$

де $X_\alpha = N, Z$ для нейтронів $\alpha = n$ і протонів $\alpha = p$. Тому і для знаходження середнього ядерного потенціалу (3.34) треба знати точну хвильову функцію $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$, яка є розв'язком багаточастинкового рівняння Шредінгера. Очевидно, що у загальному випадку середнє поле можна знайти лише наближено з тією ж точністю, з якою можна обчислити функцію $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$.

У припущенні незалежного руху нуклонів у ядрі з хвильовою функцією $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ у вигляді добутку одностинкових хвильових функцій $\varphi_{\alpha_j}(\vec{r}_j)$,

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \prod_j \varphi_{\alpha_j}(\vec{r}_j), \quad (3.36)$$

середній одночастинковий потенціал (3.33) буде залежати від квадратів одночастинкових хвильових функцій

$$\begin{aligned} V_{av}^{(n)}(\vec{r}) &= \sum_{j=1}^N \int V_{nn'}(\vec{r}, \vec{r}') |\varphi_{\alpha_j}(\vec{r}')|^2 d\vec{r}' + \\ &+ \sum_{i=1}^Z \int V_{np}(\vec{r}, \vec{r}') |\varphi_{\alpha_i}(\vec{r}')|^2 d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Таким чином, багаточастинкове рівняння Шредінгера для функції (3.36) зводиться до системи одночастинкових рівнянь Шредінгера для хвильових функцій $\varphi_{\alpha_j}(\vec{r}_j)$ з нелінійною взаємодією (3.37). Самоузгоджене поле при обчисленні повної хвильової функції системи багатьох частинок вперше було послідовно введено Д.Хартрі у 1927 р. при дослідженні властивостей атомів. У 1930 р. цей метод суттєво доповнив В.А.Фок, коректно врахувавши дію принципу Паулі. При обчисленні властивостей зв'язаних станів системи багатьох частинок середній потенціал вигляду (3.37) часто називають потенціалом Хартрі або наближенням Хартрі для середнього поля. У теорії розсіювання частинок на ядрах потенціали вигляду (3.34) називають потенціалами згортки (folding potentials).

Завдяки короткодіючому характеру ядерних сил середній потенціал (3.34) за формою близький до розподілу густини нуклонів. У граничному випадку контактного потенціалу з нульовим радіусом дії, а саме: коли радіальна залежність V_{ab} має вигляд дельта-функції: $V_{ab}(\vec{r}, \vec{r}') = V_{ab}^{(0)} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, форма середнього потенціалу (3.34) повторює радіальну залежність густини нуклонів:

$$V_n(\vec{r}) \equiv V_{nn}^{(0)} \rho_n(\vec{r}) + V_{np}^{(0)} \rho_p(\vec{r}). \quad (3.38)$$

Тому як феноменологічні однонуклонні ядерні потенціали здебільшого використовують потенціали з тією ж залежністю від просторових координат, що й у виразах для густини розподілу нуклонів. У сферичних ядрах густина розподілу має вигляд функції Фермі (1.37) і таку ж форму мають середні потенціали:

$$V_n(r) = -V_0^{(n)} f_F(r), \quad V_p(r) = -V_0^{(p)} f_F(r), \quad (3.39)$$

$$f_F(r) = \left[1 + \exp \left\{ \frac{r - R_0}{a} \right\} \right]^{-1},$$

де $R_0 = r_0 A^{1/3}$ – ефективний радіус ядра; a – параметр дифузності.

Одночастинкові потенціали вигляду (3.39) називаються потенціалами Вудса – Саксона. Аналіз рівнів непарних ядер, що розташовані біля магічних, дозволив отримати такі значення для параметрів потенціалу:

$$r_0 = 1,27 \text{ фм}, \quad a = 0,67 \text{ фм}, \quad (3.40)$$

які близькі до тих, які використовують для опису густини розподілу ядерної величини (§ 1.5):

$$r_0 = r'_0 = 1,25 \text{ фм}; \quad a = a' = 0,55 \text{ фм}. \quad (3.41)$$

Значення параметрів r_0 , a є більшими ніж r'_0 , a' , оскільки малий, але скінченний радіус дії парних сил між нуклонами приводить до того, що область дії середнього потенціалу має бути більшою від області, в якій зосереджені нуклони. У формулі (3.39) вже відокремлено знак мінус, який відповідає потенціалу притягання, тому глибини відповідних потенціалів $V_0^{(\alpha)}$, ($\alpha = n, p$) додатні.

Оскільки густини розподілу нейтронів ρ_n і протонів ρ_p в ядрах не збігаються ($\rho_n/\rho_p \cong N/Z$), то згідно з виразом (3.38) значення глибин потенціалів $V_0^{(\alpha)}$ для нуклонів різного типу можуть бути різними і залежати від заряду ядра та кількості нуклонів. Глибини середніх потенціалів нейтрона і протона також відрізняються внаслідок дії принципу Паулі, який приводить до взаємодії нуклонів різного типу у синглетному і триплетному станах, а нуклонів одного типу – лише у синглетному (§ 2.3). Параметри $V_0^{(\alpha)}$ зазвичай подають у вигляді

$$V_0^{(n)} = V_0 - V_1 \frac{N - Z}{2A}, \quad V_0^{(p)} = V_0 + V_1 \frac{N - Z}{2A}. \quad (3.42)$$

Значення V_0 та V_1 знайдено емпірично і виявилось, що

$$V_0 \cong 50 \text{ Мев}, \quad V_1 \cong 2V_0. \quad (3.43)$$

Для протонів до середнього потенціалу вигляду Вудса – Саксона необхідно також додати електростатичний кулонівський потенціал

$$V_c(\vec{r}) = \int \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_p(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (3.44)$$

Якщо як протонну густину взяти сферично-симетричний розподіл у вигляді сходинок $\rho_p = \rho_0^{(p)} \Theta(R - r)$, то кулонівський потенціал буде мати вигляд потенціалу рівномірно зарядженої сфери:

$$V_c(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{e^2 (Z - 1)}{R}, & r \leq R, \\ \frac{e^2}{r} (Z - 1), & r > R. \end{cases} \quad (3.45)$$

Потенціал $V_c(\vec{r})$ створюється дією $(Z - 1)$ протонів на деякий один з Z протонів ядра, тому порівняно із формулою (1.29) у вираз (3.45) входить додатковий множник $(Z - 1)$. Урахування дифузності розподілу протонів неістотно змінює вираз (3.45) і у розрахунках, як правило, використовують саме такий кулонівський потенціал.

Згідно з співвідношеннями (3.33), (3.34), взаємодію одного нуклона з рештою можна апроксимувати сумою потенціалу домінуючого самоузгодженого поля V_{av} і деякої залишкової взаємодії V_{res} . Схематично взаємодію нуклона в ядрі можна записати у вигляді

$$V(\vec{r}, \{\vec{r}_j\}) \equiv \sum_j V(|\vec{r} - \vec{r}_j|) = V_{av}(\vec{r}) + V_{res}(\vec{r}, \{\vec{r}_j\}), \quad (3.46)$$

де $\vec{r}$ – координата даного нуклона, а $\{\vec{r}_j\}$ – координати всіх інших нуклонів.

У цілому залишкова взаємодія V_{res} не дуже велика внаслідок короткодійного характеру ядерних сил та відносно малого об'єму, що займають нуклони в ядрі ($\sim 20\%$ від об'єму ядра, див. (1.48)).

3.5. Одночастинковий рух у моделі оболонки

У моделі оболонки, як і в моделі ядерного фермі-газу, ядро розглядають як систему невзаємодіючих нуклонів у потенціальній ямі. У моделі фермі-газу характеристики одностатійних станів (орбіт) і середнє поле явно не розглядаються. Вважаючи, що орбіти повністю заповнені до рівня з граничним імпульсом Фермі p_F (або з енергією Фермі ε_F) включно, обчислюють середню густину розподілу одностатійних станів в імпульсному просторі, яку використовують при розрахунках значення імпульса Фермі та повної енергії. У моделі ж оболонки деталізують як середнє поле, так і поняття стану нуклона з урахуванням

законів збереження, зокрема, закону збереження кутового моменту. За допомогою потенціалу середнього поля обчислюють енергетичний спектр одноклонних станів і далі, користуючись принципом Паулі, будують схему послідовного заповнення нуклонами орбіт, починаючи з найнижчої.

Вивчення оболонкової моделі ядра почнемо з обчислення енергетичного спектра однокластикових станів у ядрах із сферично-симетричним середнім потенціалом $V(r)$, який не залежить від спіну. Хвильова функція $\psi(\vec{r})$, що описує рух нуклона, є розв'язком рівняння Шредінгера:

$$\hat{h}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (3.47)$$

з однокластиковим гамільтоніаном:

$$\hat{h} = \frac{\hat{p}^2}{2m_p} + V(r) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m_p}\Delta + V(r), \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.48)$$

де Δ – оператор Лапласа; E – енергія орбіти; m_p – маса нуклона (маси протона та нейтрона вважаємо однаковими: $m_p = m_n$). На підставі сферичної симетрії потенціалу, оператор Лапласа зручно записати у сферичних координатах. Тоді маємо (див. (2.5) і (2.6)):

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{\ell}^2}{r^2}, \quad (3.49)$$

де $\hat{\ell}^2 \equiv \hat{l}^2/\hbar^2$ – оператор квадрата орбітального моменту (1.66) в одиницях $\hbar^2$.

Унаслідок сферичної симетрії потенціалу $V(r)$ момент кількості руху є інтегралом руху і хвильову функцію $\psi(\vec{r})$ можна записати у вигляді добутку радіальної функції R_{nl} на кутову функцію Y_{lm} :

$$\psi(\vec{r}) \equiv \psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.50)$$

Кутова функція $Y_{lm}(\theta, \phi) \equiv Y_{lm}(\hat{r})$ – це сферична функція, яка є власною функцією однокластикового стану з фіксованими значеннями моменту кількості руху l та його проекції на вісь Z :

$$\hat{\ell}^2 Y_{lm} \equiv l(l+1) Y_{lm}, \quad \hat{\ell}_z Y_{lm} \equiv m Y_{lm}. \quad (3.51)$$

Сферична функція є добутком приєднаної функції Лежандра $P_l^m(\cos \theta)$ (1.52), (1.90) та функції $\exp(im\varphi)$:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \xi_{m0} \cdot \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (3.52)$$

де

$$\xi_{m0} = \begin{cases} 1, & m \geq 0, \\ (-1)^m, & m < 0, \end{cases}$$

а індекси l та m набувають цілих значень і $l \geq 0$. Значення проекції орбітального моменту лежать у межах $-l \leq m \leq l$ та змінюються через одиницю. Сферичні функції ортонормовані умовою

$$\int Y_{l_1 m_1}^* (\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2} (\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (3.53)$$

де $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ – диференціал суцільного кута. Сферичні функції задовольняють такі умови симетрії:

$$Y_{lm}^* (\theta, \varphi) \equiv Y_{lm} (\theta, -\varphi) = (-1)^m Y_{l, -m} (\theta, \varphi). \quad (3.54)$$

Наведемо приклади деяких сферичних функцій:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2 - 3 \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Вигляд деяких сферичних гармонік у тривимірному просторі показано на рис. 3.2; значення декартових координат визначені наступним чином: $\mathcal{X} = |Y_{lm}|^2 \sin \theta \cos \varphi$, $\mathcal{Y} = |Y_{lm}|^2 \sin \theta \sin \varphi$, $\mathcal{Z} = |Y_{lm}|^2 \cos \theta$.

Рівняння для радіальної функції R_{nl} знаходимо після підстановки (3.50) у рівняння (3.48). Враховуючи (3.49)–(3.51) отримуємо радіальне рівняння Шредінгера:

$$\frac{d^2 R_{nl}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{nl}}{dr} + \frac{2m_p}{\hbar^2} \left[E_{nl} - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m_p} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl} = 0. \quad (3.56)$$

Тут індексами nl явно вказані величини, від яких залежить енергія та хвильова функція одночастинкового стану. Енергії орбіт $E = E_{nl}$ є власними значеннями рівняння (3.56) і згідно з його виглядом не залежать від проекції кутового моменту m (кажуть, що вони є виродженими за m). Індекс n нумерує різні орбіти з одним і тим же значенням кутового моменту, його називають головним квантовим числом. У сферичних ядрах його значення збігається з кількістю вузлів (перетинів з віссю абсцис r) радіальної хвильової функції R_{nl} плюс одиниця.

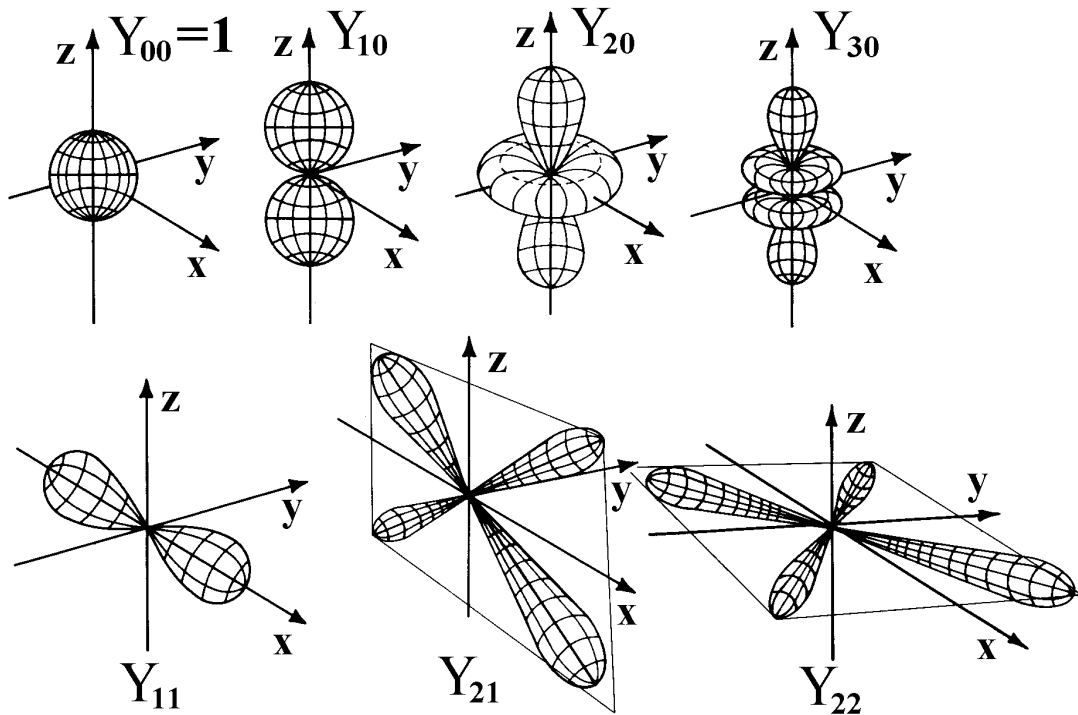


Рис. 3.2. Тривимірний вигляд деяких сферичних гармонік

Радіальні хвильові функції мають бути неперервними, скінченними в центрі ядра $r = 0$ і дорівнювати нулю на нескінченності. Вони також нормовані згідно з співвідношенням

$$\int_0^{\infty} r^2 R_{nl}^2(r) dr = 1. \quad (3.57)$$

Ці умови є наслідком фізичної інтерпретації $R_{nl}^2(r)$ як ймовірності знаходження частинки на сферичній поверхні радіуса r .

Енергії одночастинкових зв'язаних станів знаходяться з умови неперервності функції R_{nl} у всіх точках простору. Зокрема, використовують умову зшивання хвильової функції у внутрішній області та асимптотичній (див. § 2.2), де можна знехтувати взаємодією. Як вже відзначалося, рівні $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ називають s, p, d, f, g, h, i, j тощо. В ядрах, що існують у природних умовах, зазвичай не зустрічаються стани з $l > 7$.

У сферичних потенціалах кожен рівень характеризується $(2l + 1)$ кратним виродженням за проекцією кутового моменту. Крім того, кожен стан є двократно вироджений за спіном та ізспином (останнє, якщо знехтувати кулонівською взаємодією). Згідно з принципом Паулі в одному і тому ж стані не можуть

перебувати два однакових ферміони. Стан ферміона характеризується числами n, l, m_s і зарядом. Тому на кожному рівні можуть бути $2(2l + 1)$ нуклони одного сорту (протони чи нейтрони).

Розглянемо рух нуклонів у середньому полі у вигляді сферичної прямокутної ями з нескінченними стінками (потенціал непроникної сфери):

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq R, \\ \infty, & r > R. \end{cases} \quad (3.58)$$

У цьому випадку частинка не може перебувати зовні потенціальної ями і функції R_{nl} на границі і зовні ядра мають бути тотожно рівними нулю. Тому для даної задачі необхідно розв'язувати рівняння (3.56) тільки на інтервалі $r \in [0; R]$. Функція R_{nl} має задовольняти такі граничні умови: бути скінченною при $r = 0$ і дорівнювати нулю при $r = R$. Усередині ядра радіальне рівняння Шредінгера (3.56) набуває вигляду

$$\frac{d^2 R_{nl}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{nl}}{dr} + \frac{2m_p}{\hbar^2} \left[E_{nl} + V_0 - \frac{\hbar^2}{2m_p} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl} = 0. \quad (3.59)$$

Загальний розв'язок цього рівняння є суперпозицією сферичних функцій Бесселя j_l та Неймана η_l :

$$R_{nl}(r) = c_{nl} j_l(\rho) + d_{nl} \eta_l(\rho), \quad (3.60)$$

$$\rho = k_{nl} r, \quad k_{nl} = \left[\frac{2m_p}{\hbar^2} (V_0 + E_{nl}) \right]^{1/2}.$$

При малих $\rho \rightarrow 0$ сферичні функції Бесселя мають таку асимптотичну поведінку:

$$j_l(\rho) \rightarrow \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}, \quad \eta_l(\rho) \rightarrow \frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}, \quad (3.61)$$

а при великих $\rho \gg 1$

$$j_l(\rho) \rightarrow \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right), \quad \eta_l(\rho) \rightarrow -\frac{1}{\rho} \cos\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right). \quad (3.62)$$

Унаслідок скінченності хвильової функції при $\rho \rightarrow 0$ коефіцієнт d_{nl} у формулі (3.60) дорівнює нулю і радіальна функція пропорційна регулярній сферичній функції Бесселя:

$$R_{nl}(r) = c_{nl} j_l(k_{nl} r), \quad r \leq R. \quad (3.63)$$

Функції Бесселя $j_l(\rho)$ мають вигляд рядів за оберненими степенями аргументу ρ , помноженими на синус або косинус. Наприклад,

$$j_0(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho}, \quad j_1 = \frac{\sin \rho}{\rho} - \frac{\cos \rho}{\rho}, \quad j_2 = \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right) \sin \rho - \frac{3}{\rho^2} \cos \rho. \quad (3.64)$$

Невизначені інтеграли від квадратів цих функцій мають вигляд

$$\begin{aligned} \int j_l^2(\rho) \rho^2 d\rho &= \frac{1}{2} \rho^3 [j_l^2(\rho) - j_{l-1}(\rho) j_{l+1}(\rho)], \quad l > 0, \\ \int j_0^2(\rho) \rho^2 d\rho &= \frac{1}{2} \rho [1 + \rho j_0(\rho) (j_1(\rho) - j_0(\rho))] . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Власні значення E_{nl} знаходять з умови "зшивання", а саме з умови неперервності радіальних хвильових функцій на межі $r = R$ зміни потенціалу ($R_{nl}(R - \epsilon) = R_{nl}(R + \epsilon)$, $\epsilon \rightarrow +0$), тобто як розв'язок рівняння

$$R_{nl}(R) = 0 \Rightarrow j_l(k_{nl}R) \equiv j_l(X_{nl}) = 0, \quad k_{nl} = \left[\frac{2m_p}{\hbar^2} (V_0 + E_{nl}) \right]^{1/2}, \quad (3.66)$$

звідки

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_p} k_{nl}^2 - V_0 \equiv -V_0 + \varepsilon_{nl}, \quad \varepsilon_{nl} \equiv \frac{\hbar^2 X_{nl}^2}{2m_p R^2}, \quad (3.67)$$

де X_{nl} – значення нулів сферичних функцій Бесселя; $\varepsilon_{nl} \equiv E_{nl} + V_0$ – значення енергії, що обчислюється від дна потенціальної ями. З урахуванням (3.57) і (3.65) нормовані радіальні функції прямокутної ями з нескінченними стінками набувають вигляду

$$R_{nl}(r) = c_{nl} j_l(k_{nl}r), \quad c_{nl} = \frac{(2R^{-3})^{1/2}}{j_{l+1}(k_{nl}R)}, \quad r \leq R. \quad (3.68)$$

При $l = 0$, тобто для s -станів, розв'язок трансцендентного рівняння (3.66) зводиться до пошуку коренів рівняння $\sin(X_{n0}) = 0$, звідки

$$X_{n0} \equiv k_{n0}R = \pi n, \quad E_{n0} = -V_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m_p R^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.69)$$

Радіальні хвильові функції s -станів мають вигляд

$$R_{n0}(r) = c_{n0} \theta(R - r) \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \Big/ \left(\frac{n\pi r}{R}\right). \quad (3.70)$$

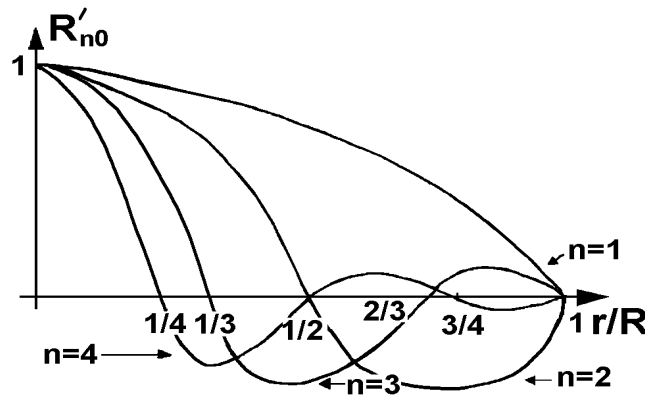


Рис. 3.3. Хвильові функції s -станів у потенціалі з нескінченною стінкою

Нормовані на одиницю в нулі функції $R'_{n0}(r) \equiv R_{n0}(r)/c_{n0}$ з $n \leq 4$ зображені на рис. 3.3. Мінімальну енергію має $1s$ стан ($n = 1$) і його радіальна хвильова функція не перетинає вісь абсцис. У $2s$ стані ($n = 2$) радіальна хвильова функція має один вузол при $r = R/2$. Хвильова функція $3s$ стану має два вузли при $r = R/3$ та $r = 2R/3$ і т. д. Таким чином, видно, що принаймні у полі непроникної сфери головне квантове число n , яке визначає енергію стану, збігається з кількістю вузлів радіальної хвильової функції орбіти плюс одиниця. Для даного потенціалу це число також збігається з кількістю нулів функції R_{nl} .

У загальному випадку корені $X_{nl} \equiv k_{nl}R$ сферичних функцій Бесселя знаходять числовим розв'язуванням трансцендентного рівняння (3.66). Відповідні їм енергії зображено на рис. 3.4, з якого видно, що енергії станів з однаковою кількістю вузлів n , але з різними орбітальними моментами задовольняють співвідношення

$$\varepsilon_{nl_2} > \varepsilon_{nl_1}, \quad l_2 > l_1. \quad (3.71)$$

Тобто стану з меншим значенням орбітального моменту відповідає і менше значення енергії. Цей ефект можна пояснити внеском відцентрової енергії $V_B = \left\langle \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right\rangle \simeq 3\hbar^2 l(l+1)/(2mR^2)$ у рух нуклона; тут, як і раніш (див. (1.39)), символом $\langle \dots \rangle$ позначено усереднення за ймовірністю знаходження нуклона у координатному просторі. Значення V_B збільшується зі зростанням l , що призводить до ефективного зменшення глибини потенціальної ями і стани стають менш зв'язаними. Фізичну причину пропорційності енергії ε_{nl} кількості вузлів $n - 1$ радіальної хвильової функції можна зрозуміти так. Збільшення числа

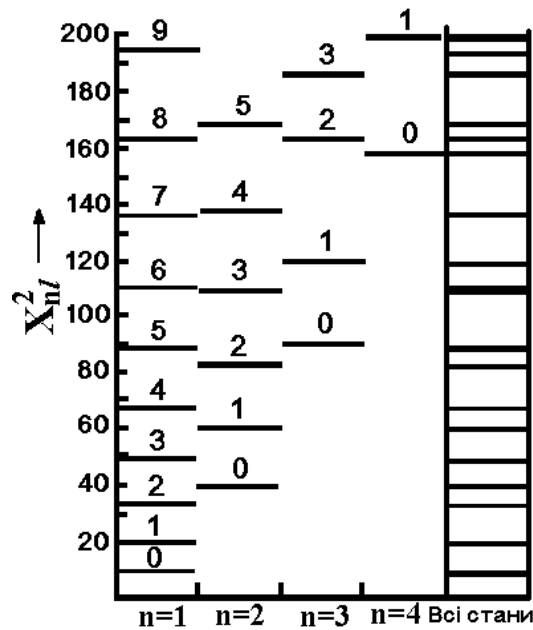


Рис. 3.4. Енергетичні рівні ε_{nl} частинки у непроникній сфері в одиницях $\hbar^2 / (2m_p R^2)$: числа всередині – значення l

n означає зменшення ефективної довжини хвилі $\lambda = 2\pi\hbar/p$ частинки (див. рис. 3.3). Тому збільшується кінетична енергія $T = p^2/2m_p = 2(\hbar\pi)^2 / (m_p\lambda^2)$ частинки, а отже і її повна енергія, що узгоджується з співвідношенням

$$\varepsilon_{n_2 l} > \varepsilon_{n_1 l} \quad \text{при} \quad n_2 > n_1. \quad (3.72)$$

Зауважимо, що співвідношення (3.71) та (3.72) для одночастинкових енергій є загальними у сферичних полях і не залежать від конкретного вигляду потенціалу.

Із вигляду схеми розташування всіх рівнів, зображеної у останньому стовпчику на рис. 3.4, також видно, що вже у потенціалі непроникної сфери існують групи рівнів, які близько розташовані один до одного. У реалістичних самоузгоджених потенціалах цей ефект виражений чіткіше, що схематично показано на рис. 3.5. Групи близьких одночастинкових станів називають оболонками. Для переміщення нуклона з однієї оболонки на іншу потрібна досить велика енергія, що істотно перевищує енергії, необхідні для переходів між станами всередині однієї оболонки.

Тому ядра, у яких усі нуклони хоча б одного сорту перебувають в замкнутих (тобто повністю заповнених) оболонках, повинні мати підвищену стійкість. Як уже зазначалось у § 1.4, такі особливо стійкі ядра справді існують, вони отримали назву магічних. За дослідними даними на лінії бета-стабільності та-

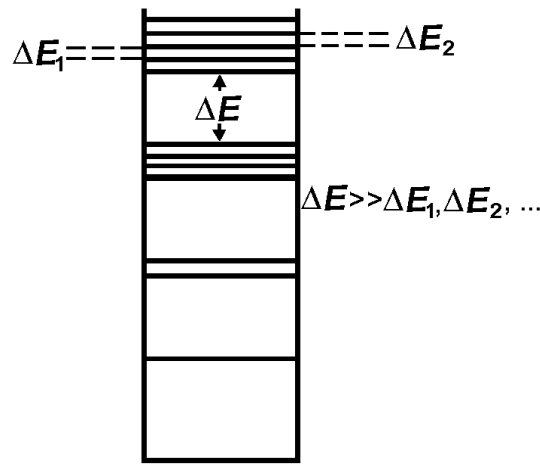


Рис. 3.5. Групування одночастинкових рівнів самоузгодженого потенціалу в оболонки

кими є ядра з кількістю нуклонів одного сорту (протонів або нейтронів) – 2, 8, 20(28), 50, 82, 126. Ці числа також називають магічними. Ядра з магічними числами одночасно для протонів і нейтронів називають двічі магічними. Таких ядер відомо п'ять:

$${}^4_2\text{He} (Z = 2, N = 2), \quad {}^{16}_8\text{O} (Z = 8, N = 8), \quad {}^{40}_{20}\text{Ca} (Z = 20, N = 20),$$

$${}^{48}_{20}\text{Ca} (Z = 20, N = 28), \quad {}^{208}_{82}\text{Pb} (Z = 82, N = 126).$$

Ці ядра надзвичайно стійкі. Наприклад, у них перші збуджені стани розташовані на $1 \div 2$ MeV вище порівняно з сусідніми ядрами.

Отримаємо магічні числа у випадку сферичної прямокутної ями з непроникними стінками. Для цього обчислимо кількість частинок на одночастинкових рівнях, що знаходиться послідовним заповненням рівнів відповідно до принципу Паулі (табл. 3.1).

У другому стовпчику табл. 3.1 наведено різницю значень енергій одночастинкових рівнів з мінімальною енергією в одиницях відносної енергії $1s$ -стану ε_{10} :

$$\varepsilon_{10} = E_{n=1,l=0} + V_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_p R^2} \cong \frac{131}{A^{2/3}} \quad (\text{MeV}). \quad (3.73)$$

У третьому стовпчику наведено числа N_{nl} ферміонів (нуклонів або протонів) на відповідних окремих рівнях, у четвертому – повне число частинок на замкнутій оболонці, а в останньому – експериментальні значення магічних чисел. З табл. 3.1 видно, що розміщення частинок на рівнях прямокутної ями з нескінченними стінками відповідає тільки двом першим експериментальним значенням

Таблиця 3.1
Магічні числа в ямі з непроникними стінками

Орбіти $n \ l$	$\frac{(E_{nl} - E_{10})}{\varepsilon_{10}}$	$N_{nl} = 2(2l + 1)$	$N = \sum_{nl} N_{nl}$	Магічні числа
1 s (0)	0	2	2	2
1 p (1)	1,02	6	8	8
1 d (2)	2,38	10	18	
2 s (0)	3,02	2	20	20 (28)
1 f (3)	4,0	14	34	
2 p (1)	5,12	6	40	50
1 g (4)	5,84	18	58	
2 d (2)	7,52	10	68	
1 h (5)	7,9	22	90	82
3 s (0)	8,0	2	92	
2 f (3)	9,18	14	106	
1 i (6)	10,10	26	132	126

магічних чисел – 2 і 8. Число 2 відповідає заповненню $1s$ -стану, число 8 – заповненню $1s$ - і $1p$ -станів. Можна вважати, що третє експериментальне магічне число 20 також можна отримати, оскільки рівні $1d$ та $2s$ розміщені близько один до одного. У цьому разі число 20 відповідає заповненню $1s$ -, $1p$ -, $1d$ - та $2s$ -станів. З таблиці також видно, що числа 28, 50, 80 та 126 не можуть бути отримані заповненням нуклонами орбіт сферичної прямокутної ями з нескінченними стінками. Інтенсивні дослідження показали, що жодній з одночастинкових моделей, в яких середнє поле залежить лише від координат нуклонів, не вдається пояснити всю сукупність експериментальних даних. Зокрема, неможливо одночасно пояснити експериментальні магічні числа на лінії бета-стабільності та розподіл густини нуклонів. Найбільш реалістичним є потенціал Вудса – Саксона (3.34) з скінченним радіусом дії. У важких ядрах близькими до обчислених за допомогою потенціалу Вудса – Саксона є рівні прямокутної ями. У легких ядрах ближчим до реалістичного потенціалу є потенціал гармонічного осцилятора вигляду

$$V_G(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m_p\omega_0^2 r^2, \quad \hbar\omega_0 \cong 41 A^{-1/3}(\text{MeV}), \quad (3.74)$$

де вираз для частоти $\omega_0 \cong 41 A^{-1/3} (\text{MeV}/\hbar)$ обчислено з умови рівності середньоквадратичного радіуса у потенціалі гармонічного осцилятора з його експериментальним значенням. Глибину потенціалу V_0 часто визначають з умови $V_G(r = R) = 0$, яка аналогічна тій, що виконується для потенціалу прямокутної ями; звідси маємо $V_0 = m_p\omega_0^2 R^2/2$. Відмітимо, що реалістичні середні потенціали

типу Вудса – Саксона (3.34) є скінченними. Тому за їх допомогою можна описати рух частинок у випадку, коли вони знаходяться зовні ядра і можуть мати будь-яку додатню енергію. Стани з додатньою енергією утворюють неперервний спектр, на відміну від дискретного спектру зв'язаних станів з від'ємними енергіями і ненульовими відстанями між їх значеннями ¹⁾.

Вирішальною для отримання експериментальних значень магічних чисел ядер на лінії бета-стабільності виявилась ідея, яку висунули Гепперт-Майер, Йенсен і Гаксел та Зюсман у 1949 році. Згідно з нею значну роль у розташуванні одночастинкових станів у ядрі відіграє спін-орбітальна взаємодія, що залежить від взаємної орієнтації спіну та кутового моменту. Хоча ця взаємодія не дуже значна і становить близько 10% від загальної енергії взаємодії, але вона спричиняє розщеплення рівнів і значний їх перерозподіл. Уперше спін-орбітальну взаємодію було використано в атомній фізиці, але для атома ця взаємодія має обернений знак і значно менше значення. Велика заслуга Гепперт-Майер, Йенсена та Гакселя і Зюсмана полягає в тому, що вони виявили роль спін-орбітальної взаємодії V_{ls} в ядрах, де вона зумовлює сильну кореляцію між орбітальним кутовим моментом l та спіном s .

Потенціал V_{ls} має вигляд

$$V_{ls} = -v_{ls}(r) (\hat{l} \hat{s}) \equiv -\frac{1}{2} v_{ls}(r) [\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2], \quad (3.75)$$

де $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$ – оператор повного кутового моменту нуклона; $\hat{l}$ та $\hat{s}$ – векторні оператори його кутового та спінового моментів; радіальний форм-фактор $v_{ls}(r)$ спін-орбітальної взаємодії має поверхневий характер і вибирається у вигляді

$$v_{ls}(r) = \frac{b}{r} \frac{dV}{dr}, \quad (3.76)$$

де $V(r)$ – незалежний від спіну компонент середнього потенціалу; b – деяка константа, яку називають сталою спін-орбітальної взаємодії; $b \approx 0,7$ фм² для середнього поля у вигляді потенціалу Вудса – Саксона (3.39).

У потенціалі зі спін-орбітальною взаємодією зберігається не кутовий момент частинки, а повний кутовий момент нуклона (j) та його проекція m_j (§ 1.6). Їх значення містяться в інтервалах

$$|l - s| \leq j \leq l + s, \quad -j \leq m_j \leq j \quad (3.77)$$

¹⁾ Використання нескінченних потенціалів не приводить до серйозних проблем у випадку зв'язаних одночастинкових станів, коли вплив ймовірності знаходження частинки зовні ядра на його властивості малий. Але, якщо розглядати збуджені стани у таких потенціалах, то завжди можна отримати стани з такою енергією, яка у випадку реалістичного потенціалу відноситься до станів неперервного спектра з нульовою відстанню між їх енергіями.

для частинок зі спіном s .

У цьому випадку одноклонні стани характеризують чотирма квантовими числами: n, l, j, m_j , де повний кутовий момент нуклона ($s = 1/2$) набуває двох значень $l + \frac{1}{2}$ і $l - \frac{1}{2}$ для орбітальних моментів $l > 0$ та одне – $j = \frac{1}{2}$ при $l = 0$; m_j – проекція повного моменту набуває $2j + 1$ значень; n – головне квантове число, яке нумерує порядок розміщення рівнів з даним значенням l . Орбітальний момент l визначає парність рівня $\pi_r = (-1)^l$.

Хвильова функція $\psi_{nljm_j}(\vec{r})$ нуклона у стані з фіксованими значеннями n, l, j, m_j є власною функцією квадрата оператора повного кутового моменту $\hat{j}^2$,

$$\hat{j}^2 \psi_{nljm_j} = \hbar^2 j(j+1) \psi_{nljm_j}, \quad \hat{j}_z \psi_{nljm_j} = \hbar m_j \psi_{nljm_j}, \quad (3.78)$$

яку можна подати у вигляді

$$\psi_{nljm_j}(\vec{r}) = R_{nlj}(r) Y_{jm_j}^{ls=1/2}(\theta, \varphi). \quad (3.79)$$

Радіальні функції $R_{nlj}(r)$ є розв'язками радіального рівняння Шредінгера вигляду (3.56) і не сильно залежать від спін-орбітальної взаємодії. Як і раніше значення головного квантового числа дорівнює числу вузлів радіальної функції плюс одиниця. Кутові функції $Y_{jm_j}^{ls}$ є суперпозицією сферичних гармонік (3.51) – (3.54) та спінових функцій (1.75) і називаються тензорними сферичними гармоніками або шаровими тензорами,

$$Y_{jm_j}^{ls}(\theta, \varphi) = \sum_{m_l, m_s} C_{l m_l s m_s}^{j m_j} Y_{l m_l}(\theta, \varphi) \chi_{s m_s}. \quad (3.80)$$

Коефіцієнти $C_{l m_l s m_s}^{j m_j}$ є амплітудами ймовірностей того, що орбітальний момент l та спін s з проекціями m_l, m_s складаються у повний кутовий момент j із проекцією m_j . Вони називаються коефіцієнтами Клебша – Гордона і визначають ймовірність формування повного кутового моменту системи з кутових моментів l, s двох її незалежних підсистем. Коефіцієнти Клебша – Гордона можна обчислити явно за довільних значень кутових моментів та їхніх проекцій і вони мають вигляд рядів щодо цих величин. Відповідно до правил векторного додавання кутових моментів відрізняються від нуля лише коефіцієнти для яких виконується умова трикутника (3.77) та умова $m_l + m_s = m_j$.

Тензорні сферичні гармоніки (3.80) є власними значеннями оператора квадрата повного кутового моменту, оператора проекції повного кутового моменту,

а також операторів квадратів орбітального моменту та спіну:

$$\begin{aligned}\hat{j}^2 Y_{jm_j}^{ls} &= \hbar^2 j(j+1) Y_{jm_j}^{ls}, & \hat{j}_z Y_{jm_j}^{ls} &= \hbar m_j Y_{jm_j}^{ls}, \\ \hat{l}^2 Y_{jm_j}^{ls} &= \hbar^2 l(l+1) Y_{jm_j}^{ls}, & \hat{s}^2 Y_{jm_j}^{ls} &= \hbar^2 s(s+1) Y_{jm_j}^{ls}.\end{aligned}\quad (3.81)$$

Величину s (значення спіну) в означеннях шарових тензорів називають рангом шарового тензора, а тензорні сферичні гармоніки при $s = 1/2$ називають шаровими спінорами.

При врахуванні спін-орбітальної взаємодії одночастинкові стани у ядрі зі сферичним середнім полем $V(r)$ позначають nx_j , де x – символ орбітального моменту ($s, p, d, f, \dots$). Квантове число m_j не пишуть, оскільки рівні сферичного поля вироджені за проекцією m_j , тобто мають однакові енергії для різних значень m_j з однаковим j .

Спін-орбітальна взаємодія приводить до розщеплення рівнів з відмінним від нуля орбітальним моментом l на два підрівні з $j = l + 1/2$ і $j = l - 1/2$; величина енергії розщеплення приблизно дорівнює

$$\Delta E_{ls} \cong -20 \lambda_{ls} A^{-2/3} \text{ (MeV)}, \quad (3.82)$$

де λ_{ls} – власне значення оператора спін-орбітального зв'язку $(\vec{l}\vec{s}) \equiv (\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2)/2$, яке згідно з формулами (3.78) – (3.81) дорівнює

$$\begin{aligned}\lambda_{ls} &= \frac{1}{2} \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} l, & j = l + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} (l+1) (1 - \delta_{l0}), & j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}\end{aligned}\quad (3.83)$$

У відповідності із співвідношеннями (3.82), (3.83) стан з паралельним спіновим та кутовим моментами ($j = l + 1/2$) розміщений нижче від стану з антипаралельними $\vec{l}$ та $\vec{s}$ ($j = l - 1/2$) і значення розщеплення зростає зі збільшенням орбітального моменту. На рис. 3.6 показано теоретичні нейтронні рівні для ядер на лінії β -стабільності, що обчислені у сферичному потенціалі Вудса – Саксона із спін-орбітальною взаємодією виду

$$V(r) = -V_0 f_F(r) + V_{ls,0} (\vec{l}\vec{s}) r_0^2 \frac{1}{r} \frac{df_F(r)}{dr}, \quad (3.84)$$

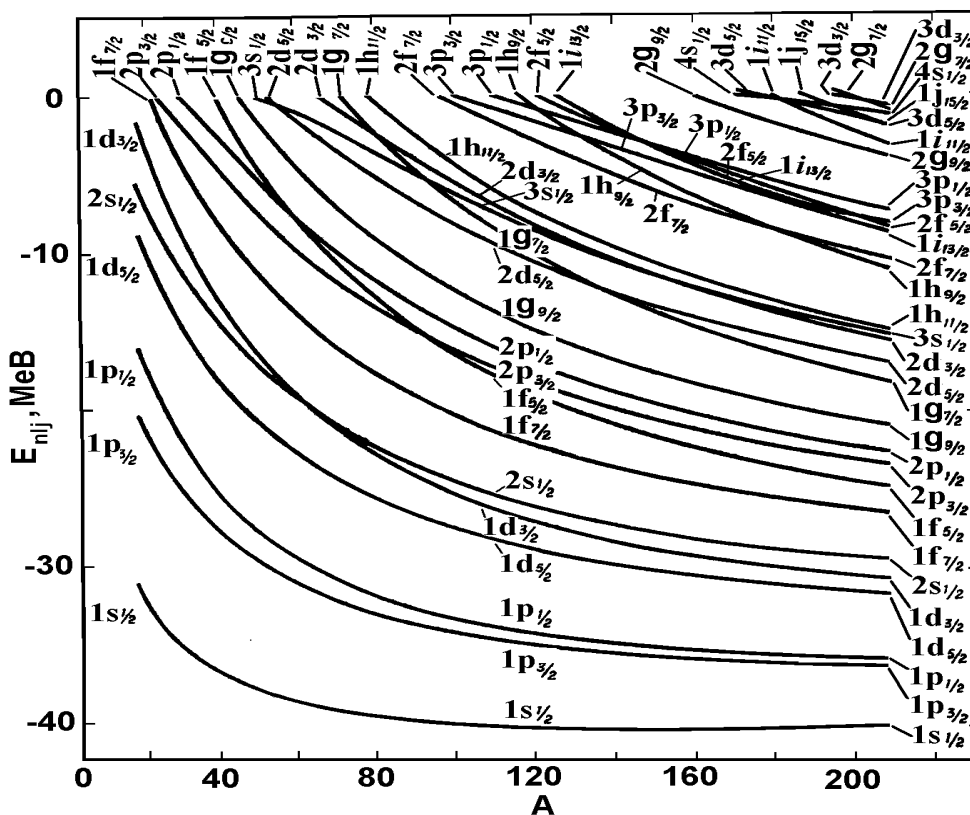


Рис. 3.6. Теоретичні нейтронні рівні в потенціалі Вудса – Саксона

де $V_0 = 51 - 31(N - Z)/A$, $V_{ls,0} = 0,44 V_0$; $f_F(r)$ – функція Фермі (3.34) з параметрами $r_0 = 1,27$ фм, $a = 0,67$ фм.

Унаслідок спіно-орбітального розщеплення змінюється розміщення рівнів з досить великим l і кількість нуклонів у замкнутих оболонках збігається з такою, що відповідає магічним числам.

Результати емпіричного аналізу структури ядерних оболонок (до сьомої оболонки) з урахуванням спіно-орбітальної взаємодії наведено в табл. 3.2. Характеристики станів отримано з дослідження ядер не дуже віддалених від лінії β -стабільності. Магічні числа для оболонок з номерами вище п'ятої для протонів і шостої для нейтронів – теоретичні оцінки з використанням феноменологічного сферичного потенціалу Вудса – Саксона. У другій колонці табл. 3.2 вказано порядок розміщення енергетичних рівнів, починаючи з меншого значення енергії. Жирним шрифтом виділені рівні, які внаслідок спіно-орбітального розщеплення опиняються в різних оболонках. Двічі магічні ядра, які подано в останній колонці, мають повністю заповнені протонні та нейтронні оболонки. Нагадаємо, що нейтрони і протони не є тотожними частинками і тому вони заповнюють

оболонки незалежно. Якщо у хімічного елемента підкреслено нижній індекс, то це означає заповнення протонної оболонки з даним номером, якщо підкреслено верхній індекс, то – нейтронної оболонки.

Четверта оболонка має підоболонку, яка містить вісім станів рівня $1f_{7/2}$, досить далеко розміщених за енергією від інших її орбіт. Заповнення цієї підоболонки відповідає ядру $^{48}_{20}\text{Ca}$ з магічним числом 20 для протонів і з "наполовину магічним" числом 28 для нейтронів. Незважаючи на те, що ядро $^{132}_{50}\text{Sn}$ є двічі магічним, воно є нестабільним щодо β -розпаду через надлишок нейтронів. Проте олово має найбільшу кількість стійких ізотопів – 10.

У достатньо вивчених ядер вищі оболонки, заповнені протонами та нейтронами, мають відповідно номери 5 і 6. Зараз інтенсивно досліджуються ядра з кількістю протонів, що відповідає шостій оболонці. Ці експериментальні дослідження надзвичайно трудомісткі, так як такі ядра є метастабільними й існують лише протягом малого часу (див. гл. 4). Теоретичні оцінки дають різні значення магічного числа для цієї оболонки, наприклад, не тільки $Z = 126$, як у табл. 3.2, а і значення $Z = 114$. Експериментальні дослідження вказують на підвищену стабільність ядер з числами протонів $Z = 112 \div 114$, тобто демонструють існування у цій області "острову стабільності" (С.Хофман та ін., 1996 р.; Ю.Ц. Оганесян та ін., 1999 р.). Теорія прогнозує і сьому нейтронну оболонку, при заповненні якої утворюється ядро з $N = 184$. Як наслідок може існувати острів стабільності, що містить ядра, розташовані поруч з елементом $^{298}_{114}\text{X}$. У цілому зі збільшенням номера оболонки порядок її заповнення стає більш чутливим до особливостей деталей форми середнього потенціалу і дослідження у області надважких ядер дають змогу отримати інформацію про властивості ядерних систем і взаємодій в екзотичних умовах, що можуть виникати в зірках.

У потенціалі Вудса – Саксона неможливо отримати явні аналітичні вирази для радіальних хвильових функцій і всі розрахунки є числовими. Нільссон запропонував потенціал, який дає змогу отримувати аналітичні вирази для характеристик одночастинкових станів. Цей потенціал (потенціал Нільссона) є осциляторним потенціалом із спіно-орбітальною взаємодією та доданком, що містить залежність від квадрата кутового моменту:

$$V(r) \equiv V_N(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m_p\omega_0^2r^2 + C\left(\vec{l}\vec{s}\right) + D\vec{l}^2, \quad (3.85)$$

де C і D – постійні коефіцієнти; значення C від'ємне і визначає силу спіно-орбітального зв'язку. Параметр D характеризує ступінь відхилення осциляторного потенціалу від більш реалістичного потенціалу типу Вудса – Саксона. Для

Таблиця 3.2

Емпіричні одночастинкові стани ядер за аналізом структури ядерних оболонок (сьома оболонка – теоретичні розрахунки)

№ оболонки	Позначення рівнів	$Z(N)$ в оболонці $\sum_j (2j+1)$	$Z(N)$ в ядрі	Двічі магічні ядра
I	$1s_{1/2}$	2	2	$\frac{4}{2}He$
II	$1p_{3/2}, 1p_{1/2}$	6	8	$\frac{16}{8}O$
III	$1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}$	12	20	$\frac{40}{20}Ca, \frac{48}{20}Ca$
IV	$1f_{7/2}$	8	28	$\frac{48}{20}Ca$
	$2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}$	22	50	$\frac{132}{50}Sn$
V	$1g_{7/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}$ $3s_{1/2}, 1h_{11/2}$	32	82	$\frac{132}{50}Sn, \frac{208}{82}Pb$ $\frac{208}{82}Pb$
VI	$1h_{9/2}, 2f_{7/2}, 2f_{5/2},$ $3p_{3/2}, 3p_{1/2}, 1i_{13/2}$	44	126	$\frac{208}{82}Pb$
VII	$2g_{9/2}, 3d_{5/2}, 1i_{11/2}, 2g_{7/2}$ $4s_{1/2}, 3d_{3/2}, 1j_{15/2}$	58	184	

легких ядер D наближено дорівнює нулю, а для важких має від'ємне значення, наприклад, $D \simeq -0,056 \text{ MeV}/\hbar^2$ у ядрі $\frac{208}{82}Pb$. Доданок з $\hat{l}^2$ зменшує енергії рівнів з великими значеннями орбітального моменту і тому вдається досить точно відтворити експериментальні значення магічних чисел.

На підставі аналізу одночастинкових станів в ядрах для ядер на лінії β -стабільності та аналітичних виразів моделі гармонічного осцилятора також були одержані напівемпіричні модельно-незалежні формули для розрахунків енергій одонуклонних орбіт. Згідно з дослідженнями Лодхі і Вок (Lodhi, Waak, 1974 р.), вони мають такий вигляд (MeV):

1) для нейтронних енергій

$$\begin{aligned}
 E_{nlj}^{(n)} = & -94,902 + 17,951 \cdot n + 90,0 \cdot n/A^{1/3} - \\
 & -2,572 \cdot n^2 + 70,838 \cdot l/A^{1/3} + \\
 & + 43,285 \cdot l(l+1)/A - 18,038 \cdot j(j+1)/A^{2/3};
 \end{aligned}
 \tag{3.86}$$

2) для протонних енергій

$$E_{nlj}^{(p)} = -95,02 + 24,02 \cdot n + 76,284 \cdot n/A^{1/3} - 2,954 \cdot n^2 + \\ + 82,382 \cdot l/A^{1/3} - 17,54 \cdot j(j+1)/A^{2/3}. \quad (3.87)$$

Зазначимо, що при побудові схем заповнення нуклонних орбіт фактично використовують багаточастинкову модель незалежних частинок. Дійсно, оскільки в моделі оболонок з послідовним заповненням орбіт повна енергія ядра має вигляд суми енергій E_{α_j} нуклонів

$$E = \sum_{j=1}^A E_{\alpha_j}, \quad (3.88)$$

то повний гамільтоніан $\hat{H}$ ядра є сумою одночастинкових гамільтоніанів $\hat{h}_j$ (3.48) окремих нуклонів,

$$\hat{H}(\{\vec{r}_j, s_{z,j}, t_{z,j}\}) = \sum_{j=1}^A \hat{h}_j, \quad \hat{h}_j \equiv \hat{h}(\{\vec{r}_j, s_{z,j}, t_{z,j}\}). \quad (3.89)$$

На підставі принципу Паулі повна хвильова функція ядра $\Psi_{\{\alpha_j\}}$ у наближенні незалежного руху нуклонів є антисиметричним добутком (детермінантом Слетера) одночастинкових функцій ψ_{α_j} :

$$\Psi_{\{\alpha_j\}}(\{\vec{r}_j, s_{z,j}, t_{z,j}\}) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha_1}(x_1) & \psi_{\alpha_1}(x_2) & \dots & \psi_{\alpha_1}(x_A) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{\alpha_A}(x_1) & \psi_{\alpha_A}(x_2) & \dots & \psi_{\alpha_A}(x_A) \end{vmatrix} \\ \equiv \frac{1}{\sqrt{A!}} \det \psi_{\alpha_j}(x_j) \equiv \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \hat{P}_{\nu} \prod_{j=1}^A \psi_{\alpha_j}, \quad (3.90)$$

де α_j – узагальнені індекси, що характеризують одночастинковий стан; узагальнені координати $x_j \equiv \{\vec{r}_j, s_{z,j}, t_{z,j}\}$ містять залежність від просторових координат $\vec{r}_j$, спінових ($s_{z,j}$) та ізоспінових ($t_{z,j}$) змінних; $\hat{P}_{\nu}$ – оператор перестановки узагальнених координат пар нуклонів.

Багаточастинкові стани системи незалежних частинок також називаються конфігураціями системи.

У цілому модель ядерних оболонок пояснює існування відносно стабільних магічних ядер й особливо стабільних двічі магічних ядер. Вона описує спіни,

парності та магнітні моменти ядер, у яких або є один нуклон над заповненою оболонкою, або не вистачає одного нуклона до повного заповнення оболонки. Серед збуджених станів ядра також спостерігаються стани, які можуть бути інтерпретовані як одночастинкові на основі механізму переходу останнього нуклона з одного рівня на інший з більшою енергією. Разом з тим значення квадрупольних моментів ядер, що обчислені за одночастинковою оболонковою моделлю, порівняно невеликі ($|Q|_{max} \lesssim 50 \text{ фм}^2$) і мають від'ємний знак. Це суперечить експериментальним дослідженням (див. рис. 1.10) і ніякі уточнення моделі незалежних частинок не змінюють такий висновок.

3.6. Парні кореляції. Квазічастинкові стани

Одним з найважливіших компонентів залишкової ядерної взаємодії є кореляційний потенціал спарювання нуклонів, який являє собою сильну короткодійчу взаємодію притягання, що зв'язує тотожні нуклони в пари з нульовим повним спіном (М.М.Боголюбов; О.Бор, Б.Моттelson, Д.Пайнс, 1958 р.). Теорія спарювання нуклонів у ядрах при дії кореляційного парного потенціалу між одночастинковими станами вперше була розглянута незалежно В.Г.Соловьевим і С.Т.Беляєвим (1959 р.), а також Кисленгером і Соренсоном (1960 р.). Виявляється, що спарювальна взаємодія приводить до такого сильного змішування конфігурацій оболонкової моделі, що можна ввести ймовірність V_j^2 того, що одночастинкова орбіта j зайнята (заселена) і ймовірність U_j^2 того, що вона порожня; очевидно,

$$V_j^2 + U_j^2 = 1, \quad (3.91)$$

а повне число частинок на орбіті j дорівнює

$$n_j = (2j + 1) V_j^2. \quad (3.92)$$

Під дією сил спарювання енергії E_j одночастинкових рівнів модифікуються так, що замість них формується спектр нових станів з енергіями ε_j :

$$\varepsilon_j = \left\{ (E_j - \lambda)^2 + \Delta^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.93)$$

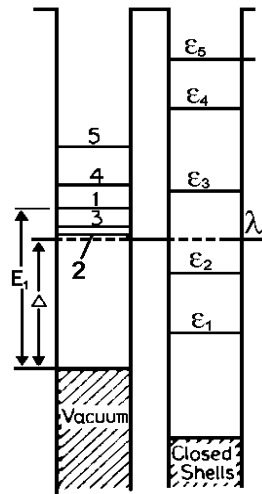


Рис. 3.7. Схематична діаграма енергій орбіт із силою спарювання і без неї

Величини ε_j можна інтерпретувати як енергії квазічастинок у квазічастинкових станах, які можуть заповнюватися з деякою ймовірністю V_j^2 . У формулі (3.93) λ – енергія Фермі, що відраховується від краю потенціальної ями ($\lambda \simeq \varepsilon_F - V_0 = S_n$, див. § 3.3), а Δ – параметр, який називають енергетичною щільною. Схематично співвідношення між енергіями ε_j квазічастинок і енергіями частинок E_j представлені на рис. 3.7.

Згідно з (3.93) енергія самого нижнього квазічастинкового рівня, що формується незбуреною орбітою біля поверхні Фермі, має значення

$$\varepsilon_g \approx \Delta, \quad (3.94)$$

тобто існує відстань, говорять утворюється щілина, Δ між енергіями основного стану ядра і його першого збудженого стану.

За теорією спарювання основний стан парно-парного ядра можна розглядати як квантово-механічний вакуумний стан, з якого може народитися пара квазічастинок, якщо енергія достатня для її утворення. Збуджені стани непарно-парних ядер відповідають переходу однієї частинки на квазічастинкові енергетичні рівні ε_j . Енергія основного стану парно-непарного ядра задається (3.94), а співвідношення (3.93) зв'язує послідовність одночастинкових рівнів ε_j , що спостерігаються в непарно-парному ядрі, з незбуреними одночастинковими рівнями E_j .

Якщо зв'язана пара нейтронів або протонів додається до непарно-парного ядра, то всі E_j рухаються вниз, оскільки поява додаткових нуклонів приводить до збільшення радіуса еквівалентного потенціалу. Коли енергії E_j зменшуються, то зменшуються і енергії ε_j доти, доки енергія E_j не перейде через значення

λ . У області $E_j \approx \Delta$ значення рівня ε_j залежить від спіну основного стану ядра. Такий характер змін енергій одночастинкових рівнів можна простежити у непарних ізотопах одного й того ж ядра.

На рис. 3.8 показано зміни енергій одночастинкових рівнів у непарно-парних ізотопах паладію ^{103}Pd , ^{105}Pd , ^{107}Pd і ^{109}Pd (енергії E_j незбурених рівнів розташовані у такій послідовності $d_{5/2}$, $g_{7/2}$, λ , $s_{1/2}$, $h_{11/2}$, $d_{3/2}$ і $|E_{g_{7/2}} - \lambda| < \Delta$). Тому, коли додаються зв'язані пари до ^{103}Pd , значення енергій всіх рівнів, крім рівня $g_{7/2}$, зменшується, а енергія останнього рівня зростає, оскільки незбурений рівень $g_{7/2}$ лежить дуже близько до енергії Фермі.

Теорія спарювання також зв'язує ймовірність заселеності V_j^2 з величинами E_j і Δ :

$$V_j^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{E_j - \lambda}{\left\{ (E_j - \lambda)^2 + \Delta^2 \right\}^{1/2}} \right], \quad (3.95)$$

отже,

$$U_j^2 = 1 - V_j^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{E_j - \lambda}{\left\{ (E_j - \lambda)^2 + \Delta^2 \right\}^{1/2}} \right]. \quad (3.96)$$

Безпосереднім наслідком формул (3.95) і (3.96) є те, що ймовірність заселеності орбіти в основному стані, де $E_g - \lambda \ll \Delta$, близька до половини,

$$V_g^2 \approx 0,5. \quad (3.97)$$

Це співвідношення ілюструє той факт, що спарювання значно піднімає частинки з їх нормальних незбурених станів. Перший від'ємний знак у виразі (3.95) гарантує, що стани з високими енергіями заповнюються з меншими ймовірностями.

Із формул (3.92) і (3.95) можна одержати такий вираз для повного числа частинок на орбіті j :

$$n_j = \frac{1}{2} (2j + 1) \left[1 - \frac{E_j - \lambda}{\left\{ (E_j - \lambda)^2 + \Delta^2 \right\}^{1/2}} \right] = 2\Omega_j V_j^2, \quad (3.98)$$

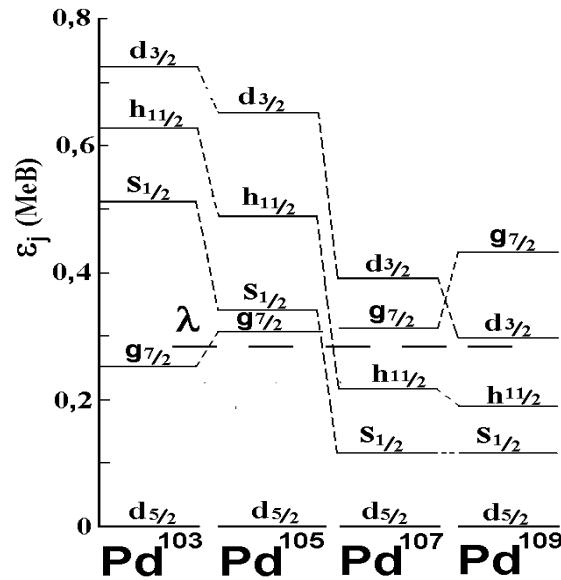


Рис. 3.8. Зміни енергій одночастинкових рівнів ізотопів паладію ^{103}Pd , ^{105}Pd , ^{107}Pd і ^{109}Pd

де $\Omega_j = (2j + 1) / 2 = j + 1/2$ – число вироджених пар на рівні з повним кутовим моментом j . Із формул (3.93), (3.95) і (3.96) також маємо

$$\Delta = 2\varepsilon_j V_j U_j, \quad E_j - \lambda = \frac{\Delta (U_j^2 - V_j^2)}{2V_j U_j}. \quad (3.99)$$

Параметр енергетичної щілини Δ задовольняє таке рівняння

$$G^{-1} = \frac{1}{2} \sum_j \frac{2j + 1}{\left\{ (E_j - \lambda)^2 + \Delta^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\Delta} \sum_j (2j + 1) V_j U_j, \quad (3.100)$$

де константа G – сила взаємодії спарювання з однаковими матричними елементами між одночастинковими станами.

Повне число частинок

$$N = \sum_j n_j = \sum_j 2\Omega_j V_j^2. \quad (3.101)$$

Величини, що з'являються в теорії спарювання, мають такі типові значення, MeV:

$$G \simeq 24/A, \quad \Delta \simeq 0,7 \div 1,2 \quad \text{і} \quad \lambda \approx 4 \div 5. \quad (3.102)$$

Амплітуди ймовірностей V_j можна визначити експериментально, досліджуючи заселення одночастинкових рівнів у ядерних реакціях.

3.7. Узагальнена модель ядра.

Колективна енергія рідкої краплини.

Великі значення власних квадрупольних моментів означають, що в цілому у ядрах відхилення розподілу заряду від сферичної форми значно сильніші, ніж в оболонковій моделі. Зазначимо, що в багаточастинковій оболонковій моделі квадрупольний момент заповненої оболонки дорівнює нулю, тобто розподіл нуклонів у заповнених оболонках є сферично-симетричним. Лише наявність нуклонів зовні заповнених оболонок приводить до несферичного розподілу заряду і відмінного від нуля квадрупольного моменту. Великі експериментальні значення квадрупольних моментів вказують на те, що несферичний розподіл заряду повинен формуватися також за участю нуклонів заповнених оболонок.

Самоузгоджене середнє поле формується нуклонами ядра і згідно з виразами (3.33), (3.34) при несферичному розподілі заряду також буде несферичним. Характер та величина деформованості розподілу заряду, а отже і середнього поля, визначається кількістю нуклонів поза межами заповнених оболонок та залишковою взаємодією між нуклонами відносно сферичного потенціалу.

Можна очікувати, що при невеликій кількості додаткових нуклонів (нуклонної хмари зовні заповнених оболонок) їхній вплив на формування середнього поля і форми ядра буде незначним. Тому потенціал ядра і його форма залишаються сферично-симетричними. Із зростанням кількості нуклонів поза заповненими оболонками вплив індивідуального руху нуклонів і залишкової взаємодії нуклонів на самоузгоджений потенціал посилюється. Сферична форма таких ядер буде поступово втрачати стійкість. Залишкова взаємодія між зовнішніми нуклонами спричиняє корельований рух частинок, внаслідок якого форма ядра починає відрізнятися від сферичної.

Фізичне уявлення про ядро як про багаточастинкову систему, що складається з внутрішньої стійкої області – "ядерного остову", утвореного нуклонами, які входять до складу замкнених оболонок і зовнішніх нуклонів, що рухаються в полі цього остову і призводять до його деформації (тим самим до деформації ядра в цілому), лежить в основі так званої узагальненої моделі ядра. Ця модель часто називається узагальненою моделлю Бора–Моттельсона (О.Бор, Б.Моттельсон, Дж.Рейнуотер, 1950–1953 рр.). Зміни рівноважної форми ядра та його орієнтації у просторі у такій моделі описуються за допомогою колективних змінних $\alpha_{\lambda\mu}$, що є відносними зміщеннями радіуса ядра в лабораторній системі координат. Ці параметри визначають радіус ядра і вводяться аналогічно

тому, як це робиться в краплинній моделі, де ядро розглядається як краплина ідеальної нестисливої рідини з безвихровим рухом. А саме, в лабораторній системі координат $\mathcal{K}(X, Y, Z)$ радіус ядра записується у наступному вигляді

$$R(\theta, \varphi) = R'_0 \left(1 + \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right), \quad (3.103)$$

де параметри $\alpha_{\lambda\mu} \equiv \alpha_{\lambda\mu}(t)$ збурення поверхні ядра залежать від часу; R'_0 – середній радіус деформованого ядра, що враховує збереження об'єму ядра (§1.5); R'_0 є функцією параметрів зміщень і його явний вид залежить від максимальної кількості параметрів, що враховуються в розкладі (3.103). У першому порядку по відносним зміщенням $R'_0 = R_0$ з $R_0 = r_0 A^{1/3}$ для радіуса сферичного ядра еквівалентного об'єму. У відмінність від позначень § 1.5, параметри $\alpha_{\lambda\mu}$ у формулі (3.103) є множниками при сферичних гармоніках з кутами θ, φ , що визначені у лабораторній системі координат.

Величини λ і μ у формулі (3.103) характеризують просторовий вигляд збурень у системі координат з полярним та азимутальним кутами θ, φ , відповідно; даному значенню λ відповідає $2\lambda + 1$ значень μ . При малих збуреннях компоненти з $\lambda = 0$ і $\lambda = 1$ відсутні, оскільки $\lambda = 0$ відповідає ізотропним розширенню та стисканню системи, а $\lambda = 1$ – зміщенню центра мас (§1.5). Значення $R(\theta, \varphi)$ є дійсним. Це приводить до наступних умов симетрії для параметрів збурень: $\alpha_{\lambda-\mu} = (-1)^\mu \alpha_{\lambda\mu}^*$. Радіус ядра є скалярною величиною, що не змінюється при обертаннях, тому його загальний вигляд (3.103) не залежить від того, яка система координат використовується – лабораторна $\mathcal{K}(X, Y, Z)$, або власна – $\mathcal{K}'(X', Y', Z')$, що жорстко зв'язана з ядром і початок якої співпадає з центром тяжіння ядра; тобто

$$R(\theta, \varphi) = R(\theta', \varphi') \equiv R'_0 \left(1 + \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta', \varphi') \right). \quad (3.104)$$

де параметри деформації поверхні $\beta_{\lambda\mu}$ ($\beta_{\lambda-\mu} = (-1)^\mu \beta_{\lambda\mu}^*$) визначені у власній (внутрішній) системі координат $\mathcal{K}'$ (§ 1.5) з кутами θ', φ' . Взаємна орієнтація внутрішньої та лабораторної систем задається трьома кутами Ейлера $\{\theta_\alpha\} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, де кути θ_2, θ_1 є відповідно полярним ($\tilde{\theta}$) та азимутальним кутами ($\tilde{\varphi}$) осі Z' власної системи в лабораторній системі $\mathcal{K}$, ($\tilde{\theta} = \theta_2$, $\tilde{\varphi} = \theta_1$), а кути θ_2, θ_3 визначають полярний ($\tilde{\theta}'$) та азимутальний ($\tilde{\varphi}'$) кути осі Z в

системі $\mathcal{K}'$, ($\tilde{\theta}' = \theta_2$, $\tilde{\varphi}' = \pi - \theta_3$). Якщо ядро має ненульовий кутовий момент, то власна система координат обертається відносно лабораторної і кути Ейлера залежать від часу. Тому систему $\mathcal{K}'$ також називають рухомою системою координат. Сферичні функції та параметри збурень при переході від системи координат $\mathcal{K}$ до $\mathcal{K}'$ перетворюються за формулами

$$Y_{\lambda\mu}(\theta', \varphi') = \sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu\mu}^{\lambda*}(\{\theta_\alpha\}) Y_{\lambda\nu}(\theta, \varphi) ,$$

$$\beta_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu\mu}^{\lambda}(\{\theta_\alpha\}) \alpha_{\lambda\nu} , \quad \alpha_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} D_{\mu\nu}^{\lambda*}(\{\theta_\alpha\}) \beta_{\lambda\nu} \quad (3.105)$$

Тут $D_{\nu\mu}^{\lambda}$ – узагальнені сферичні функції або D -функції Вігнера, що описують поворот системи координат $\mathcal{K}'$ у тривимірному просторі. Функції $D_{\nu\mu}^{\lambda}(\{\theta_\alpha\})$ є власними функціями оператора квадрата кутового моменту $\hat{l}^2$ і операторів $\hat{l}_z$, $\hat{l}_z'$, проєкцій кутового моменту на вісі Z та Z' з власними значеннями λ, ν, μ , відповідно²⁾:

$$\hat{l}^2 D_{\nu\mu}^{\lambda} = \hbar^2 \lambda(\lambda+1) D_{\nu\mu}^{\lambda} ,$$

$$\hat{l}_z D_{\nu\mu}^{\lambda} = \hbar \nu D_{\nu\mu}^{\lambda} , \quad \hat{l}_z' D_{\nu\mu}^{\lambda} = \hbar \mu D_{\nu\mu}^{\lambda} . \quad (3.106)$$

Вони задовільняють наступні співвідношення ортогональності

$$\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu_1 \mu}^{\lambda*}(\{\theta_\alpha\}) D_{\nu_2 \mu}^{\lambda}(\{\theta_\alpha\}) = \delta_{\nu_1 \nu_2} , \quad (3.107)$$

$$\sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu \mu_1}^{\lambda*}(\{\theta_\alpha\}) D_{\nu \mu_2}^{\lambda}(\{\theta_\alpha\}) = \delta_{\mu_1 \mu_2} . \quad (3.108)$$

Якщо значення λ цілислове, а один з індексів ν, μ дорівнює нулю, то D -функції Вігнера зводяться до сферичних функцій (§ 3.5):

$$D_{\nu \mu=0}^{\lambda}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \left[\frac{4\pi}{2\lambda+1} \right]^{1/2} Y_{\lambda \nu}(\theta_2, \theta_1) ,$$

²⁾ Відмітимо, що прийняті позначення кутів Ейлера співпадають з тими, які використовуються в книгах Айзенберга, Грайнера; Бора, Моттельсона; Давидова; Соловйова, а D -функції Вігнера визначені у відповідності з книгами Бора, Моттельсона; Давидова та Соловйова. Після комплексного спряження вони тотожні узагальненим сферичним функціям, що використовуються Айзенбергом, Грайнером та Варшаловичем, Москалевим, Херсонським.

$$D_{\nu=0 \mu}^{\lambda}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (-1)^{\mu} \left[\frac{4\pi}{2\lambda + 1} \right]^{1/2} Y_{\lambda \mu}(\theta_2, \theta_3). \quad (3.109)$$

З погляду теорії малих збурень для визначення енергії, яка зв'язана з малими зміщеннями, можна використовувати гармонічне наближення. Зміна параметрів $\alpha_{\lambda\mu}$ збурення поверхні, що задані у лабораторній системі координат з сталими у часі полярним θ та азимутальним φ кутами, може бути обумовлена як коливаннями поверхні, так і обертанням системи. Тому енергія зміщень $\alpha_{\lambda\mu}$ є повною енергією $\mathcal{E}_{col}$ колективного руху. Вона складається з енергії $\mathcal{E}_{vib}$ коливань ядерної поверхні (вібраційна енергія) та енергії $\mathcal{E}_{rot}$ обертань системи (ротаційна енергія):

$$\mathcal{E}_{col} \equiv \mathcal{E}_{vib} + \mathcal{E}_{rot} = T(\{\alpha_{\lambda\mu}\}) + V(\{\alpha_{\lambda\mu}\}), \quad (3.110)$$

де $T(\{\alpha_{\lambda\mu}\})$ – кінетична енергія збурень поверхні,

$$T(\{\alpha_{\lambda\mu}\}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} B_{\lambda\mu} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2, \quad (3.111)$$

$\dot{\alpha}_{\lambda\mu} = d\alpha_{\lambda\mu}(t)/dt$ – похідна по часу; $V(\{\alpha_{\lambda\mu}\})$ – потенціальна енергія,

$$V(\{\alpha_{\lambda\mu}\}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} C_{\lambda\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \quad (3.112)$$

Записав вирази (3.110)-(3.112) для повної енергії $\mathcal{E}_{col}$ у власній (рухомій) системі координат $\mathcal{K}'(X', Y', Z')$, що жорстко пов'язана з ядром, можна явно виділити внески вібраційного та ротаційного рухів. У відсутність ротаційного руху величини $B_{\lambda\mu}$ у формулі (3.111) називаються масовими параметрами (коефіцієнтами), а $C_{\lambda\mu}$ у (3.112) – коефіцієнтами жорсткості.

Розглянемо метод знаходження виразів для вібраційної $\mathcal{E}_{vib}$ та ротаційної $\mathcal{E}_{rot}$ енергій на прикладі ядер з еліпсоїдальною формою збурень, тобто ядер, які мають відмінні від нуля лише значення параметрів квадрупольних зміщень радіуса:

$$\begin{aligned} R(\theta, \varphi) &= R'_0 \left(1 + \sum_{\mu=0, \pm 1, \pm 2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta, \varphi) \right) = \\ &= R(\theta', \varphi') \equiv R'_0 \left(1 + \sum_{\mu=0, \pm 1, \pm 2} \beta_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta', \varphi') \right). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Відмітимо, що в узагальненій моделі (модель Бора–Моттельсона) спочатку розглядалися саме квадрупольні збурення, які приводять до еліпсоїдальної форми поверхні, координати якої задовільняють рівняння

$$\left(\frac{x'}{R_{X'}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{R_{Y'}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{R_{Z'}}\right)^2 = 1, \quad (3.114)$$

де $R_{X'}$, $R_{Y'}$, $R_{Z'}$ – значення напівосей уздовж напрямів трьох головних осей еліпсоїда (див.ф.(3.120)).

При розгляді еліпсоїдальних ядер осі X' , Y' , Z' внутрішньої системи координат вибирають уздовж головних осей еліпсоїда. Тоді для колективних змінних $\beta_{2\mu}$ виконуються наступні рівності:

$$\beta_{2+1} = \beta_{2-1} = 0, \quad \beta_{2+2} = \beta_{2-2}. \quad (3.115)$$

Тобто з п'яти величин $\beta_{2\mu}$ тільки дві будуть незалежні і замість п'яти параметрів $\alpha_{2\mu}$ лабораторної системи координат маємо п'ять нових параметрів, що характеризують властивості збурень, а саме, три кути Ейлера, що визначають обертальні (ротаційні) рухи ядра, та дві дійсні величини β_{20} , β_{2-2} , які характеризують деформацію його поверхні. Як видно з рис.3.2, сферичні гармоніки $Y_{2\pm1}(\theta', \varphi')$ описують збурення того ж типу, що і $Y_{2\pm2}(\theta', \varphi')$ тільки максимумами і мінімумами просторових збурень розташовані під деякими кутами до напрямів осей координат внутрішньої системи. Тому умови (3.115) ніяк не звужують коло можливих зміщень поверхні.

Замість величин β_{20} , β_{22} О.Бор (1952 р.) ввів два нових параметра β , γ за допомогою співвідношень:

$$\beta_{20} = \beta \cos \gamma, \quad \beta_{2+2} = \beta_{2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma. \quad (3.116)$$

Тому радіус ядра (3.114) набуває такого вигляду

$$R(\theta', \varphi') = \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} &= R'_0 \left[1 + \alpha_B \left\{ \cos \gamma Y_{20}(\theta', \varphi') + \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} (Y_{22}(\theta', \varphi') + Y_{22}^*(\theta', \varphi')) \right\} \right] = \\ &= R'_0 \left[1 + \frac{\alpha_B}{2} \left\{ \cos \gamma [3\cos(\theta') - 1] + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2(\theta') \cos(2\varphi') \right\} \right], \end{aligned}$$

де

$$\alpha_B = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta, \quad R'_0 \equiv R'_0(\beta, \gamma) = R_0 \left(1 - \frac{3}{4}\alpha_B^2 + \frac{1}{4}\alpha_B^3 \cos(3\gamma)\right)^{-1/3}. \quad (3.118)$$

Параметр β визначає загальну деформацію ядра

$$\beta^2 = \sum_{\mu=-2}^2 |\beta_{2\mu}|^2 = \beta_{20}^2 + 2\beta_{2+2}^2. \quad (3.119)$$

Параметр γ характеризує відхилення форми ядра від аксіально-симетричної форми і називається параметром неаксіальності або асиметрії. Дійсно, обчисливо значення напівосей уздовж напрямів трьох головних осей еліпсоїдального ядра. Згідно з (3.117) маємо

$$\begin{aligned} R_{X'} &\equiv R\left(\theta' = \frac{\pi}{2}, \varphi' = 0\right) = R'_0 \left(1 - \alpha_B \left\{ \frac{\cos \gamma}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma \right\}\right); \\ R_{Y'} &\equiv R\left(\theta' = \frac{\pi}{2}, \varphi' = \frac{\pi}{2}\right) = R'_0 \left(1 - \alpha_B \left\{ \frac{\cos \gamma}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma \right\}\right); \\ R_{Z'} &\equiv R(\theta' = 0, \varphi' = 0) = R'_0 (1 + \alpha_B \cos \gamma), \end{aligned} \quad (3.120)$$

або

$$R_j = R'_0 \left(1 + \alpha_B \cos\left(\gamma - j \frac{2\pi}{3}\right)\right), \quad j = 1, 2, 3 \equiv X', Y', Z'. \quad (3.121)$$

З цих співвідношень видно, що при значеннях γ кратних $\pi/3$ ядро приймає форму еліпсоїда обертання, тобто поверхня ядра є симетричною відносно однієї з осей і міра деформованості задається лише параметром β . Наприклад, якщо $\gamma = 0$ і $\beta > 0$, то ядро є витягнутим еліпсоїдом обертання з осью симетрії уздовж вісі Z' ,

$$R_{X'} = R_{Y'} = R'_0 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_B\right), \quad R_{Z'} = R'_0 (1 + \alpha_B), \quad (3.122)$$

при $\gamma = \pi/3$, $\beta > 0$ ядро – сплюснений еліпсоїд обертання з осью симетрії уздовж вісі Y' ,

$$R_{X'} = R_{Z'} = R'_0 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_B\right), \quad R_{Y'} = R'_0 (1 - \alpha_B), \quad (3.123)$$

а з $\gamma = \pi$, $\beta > 0$ – сплюснений еліпсоїд обертання з осью симетрії уздовж вісі Z' ,

$$R_{X'} = R_{Y'} = R'_0 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_B \right), \quad R_{Z'} = R'_0 (1 - \alpha_B). \quad (3.124)$$

Однак для інших значень γ ступінь порушення аксіальної симетрії також залежить і від значення γ , так у випадку $\gamma = \pi/6$ форма поверхні ядра є проміжною між формою еліпсоїда з віссю симетрії Z' і еліпсоїда з віссю симетрії Y' . Відмітимо, що для розгляду всіх можливих форм тривісного еліпсоїда достатньо значення β і γ вибирати з інтервалів

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \beta \leq \left(\frac{4\pi}{5} \right)^{1/2} / \cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right). \quad (3.125)$$

У аксіально-симетричних еліпсоїдальних ядрах, тобто коли ($\gamma_0=0$ або π), параметр β моделі Бора–Моттельсона збігається з абсолютним значенням параметру β_{20} розкладу радіуса ядра за сферичними гармоніками (§1.5, ф.(3.104)), а саме:

$$\beta_{20} = \begin{cases} +\beta, & \gamma_0 = 0, \\ -\beta, & \gamma_0 = \pi. \end{cases} \quad (3.126)$$

У змінних β і γ повна кінетична енергія колективного руху T , (див. ф.(3.111)), складається з вібраційного T_{vib} та ротаційного T_{rot} компонентів

$$T = T_{vib} + T_{rot}, \quad (3.127)$$

де, з точністю до квадратичних членів (відносно похідних за часом), вирази для T_{vib} та T_{rot} мають вигляд

$$T_{vib} = \frac{1}{2} \left\{ B_{\beta\beta}(\beta, \gamma) \dot{\beta}^2 + 2\beta B_{\beta\gamma}(\beta, \gamma) \dot{\beta}\dot{\gamma} + \beta^2 B_{\gamma\gamma}(\beta, \gamma) \dot{\gamma}^2 \right\}, \quad (3.128)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_j \omega_j^2 \mathcal{F}_j = \sum_j \frac{(\vec{R})_j^2}{2\mathcal{F}_j}, \quad (\vec{R})_j = \omega_j \mathcal{F}_j, \quad (3.129)$$

$$j = 1, 2, 3 \equiv X', Y', Z'.$$

Тут $(\vec{R})_j$ – проекція на j -ту внутрішню вісь вектора кутового моменту обертання ядра як цілого; $B_{\beta\beta}$, $B_{\beta\gamma}$, $B_{\gamma\gamma}$ – масові (інерційні) параметри, що визначають інертність поверхні ядра відносно відповідних коливань. У випадку моделі рідкої краплини маємо (Kaniowska et al, 1976)

$$\begin{aligned} B_{\beta\beta} &= Ba^2 \left[1 + \alpha_B^2 a^3 b_1 \left(1 + \frac{1}{2} a^3 b_1 b_2 \right) \right], \\ B_{\beta\gamma} &= \frac{1}{4} B \alpha_B^3 a^5 [1 + a^3 b_1 b_2] \sin(3\gamma), \\ B_{\gamma\gamma} &= Ba^2 \left[1 + \frac{1}{8} \alpha_B^4 a^6 b_2 \sin^2(3\gamma) \right], \end{aligned} \quad (3.130)$$

де

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{8\pi} Am R_0^2, \quad a = R'_0 / R_0 = \left(1 - \frac{3}{4} \alpha_B^2 + \frac{1}{4} \alpha_B^3 \cos(3\gamma) \right)^{-1/3}, \\ b_1 &= 1 - \frac{1}{2} \alpha_B \cos(3\gamma), \quad b_2 = 1 + \frac{1}{2} \alpha_B^2. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Зберігши тільки два найнижчих по β компонента в виразах для масових параметрів, отримуємо

$$\begin{aligned} B_{\beta\beta} &= B \left[1 + \frac{15}{8\pi} \beta^2 \right], \\ B_{\beta\gamma} &= B \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4\pi} \right)^{3/2} \beta^3 \sin(3\gamma) \left(1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos(3\gamma) \right), \\ B_{\gamma\gamma} &= B \left[1 + \frac{5}{8\pi} \beta^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Величина ω_j у формулі (3.129) є проекцією на j -ту внутрішню вісь кутової швидкості обертання ядра; $\mathcal{F}_j$ – момент інерції відносно відповідної внутрішньої осі. У випадку гідродинамічної моделі рідкої краплини вони мають вигляд

$$\mathcal{F}_j \equiv \mathcal{F}_{j, \text{hydr}} = \frac{Am}{5} \frac{(R_k^2 - R_l^2)^2}{R_k^2 + R_l^2}, \quad (3.133)$$

$$j, k, l = \{1, 2, 3\}; \{2, 3, 1\}; \{3, 1, 2\},$$

з Am для повної маси ядра. Звідки можна отримати (Kaniovska et al, 1976)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{j, hydr} &= 4\beta^2 D_j(\beta, \gamma) \sin^2 \gamma_j, \quad \gamma_j = \gamma - j \frac{2\pi}{3}, \\ D_j(\beta, \gamma) &= Ba^2 \frac{(1 - 0,5 \alpha_B \cos \gamma_j)^2}{b_2 - \alpha_B \cos \gamma_j - 0,25 \alpha_B^2 \cos(2\gamma_j)}.\end{aligned}\quad (3.134)$$

З точністю до членів квадратичних по β , вираз компонентів моменту інерції задається такою формулою

$$\mathcal{F}_{j, hydr} = 4\beta^2 B \left[1 + \frac{5}{8\pi} \beta^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \gamma_j \right) \right] \sin^2 \gamma_j. \quad (3.135)$$

Видно, що значення моментів інерції $\mathcal{F}_{j, hydr}$ за гідродинамічною моделлю (див.ф. (3.133), (3.135)) дорівнюють нулю у відсутності деформації поверхні ядра.

Проекції кутової швидкості обертання ядра визначаються зміною у часі кутів Ейлера:

$$\begin{aligned}\omega_{X'} &= \omega_1 = -\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3, \\ \omega_{Y'} &= \omega_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3, \\ \omega_{Z'} &= \omega_3 = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3.\end{aligned}\quad (3.136)$$

Відмітимо, що загальний вираз (3.129) для ротаційної енергії T_{rot} , який базується на краплинній моделі, співпадає з ротаційною енергією тривісного твердотілого еліпсоїда, але твердотільні значення моменту інерції також відмінні від нуля і в сферичних ядрах. Вони визначаються квадратами довжин напівосей еліпсоїда і мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_j &\equiv \mathcal{F}_{j, rig} = \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') (x_k'^2 + x_l'^2) = \\ &= \frac{1}{5} Am (R_k^2 + R_l^2), \quad j, k, l = \{1, 2, 3\}; \{2, 3, 1\}; \{3, 1, 2\}.\end{aligned}\quad (3.137)$$

Після врахування співвідношення (3.121) отримуємо

$$\mathcal{F}_{j, rig} = \frac{1}{5} Am R_0'^2 \left[1 - \alpha_B \cos \gamma_j + \frac{\alpha_B^2}{4} (1 + 2 \sin^2 \gamma_j) \right]. \quad (3.138)$$

Видно, що на відміну від краплинкової моделі, твердотільні значення моментів інерції сферичних ядер відмінні від нуля і дорівнюють

$$\mathcal{F}_{j, rig} \equiv \mathcal{F} = \frac{1}{5} Am R_0^2 = \frac{16\pi}{15} B. \quad (3.139)$$

У відповідності з виразами (3.133), (3.137) між твердотільними значеннями моментів інерції та їхніми гідродинамічними значеннями за моделлю рідкої краплини існують такі співвідношення

$$\mathcal{F}_{j, hydr} = \frac{(R_k^2 - R_l^2)^2}{(R_k^2 + R_l^2)^2} \mathcal{F}_{j, rig}. \quad (3.140)$$

У відмінність від твердотільного момента інерції, гідродинамічний момент інерції, має менше значення, так як формується нуклонами у приповерхневій зоні ядра і обумовлений хвилями на його поверхні.

Потенціальна енергія краплини ідеальної нестисливої рідини з рівномірно розподіленим зарядом складається з суми енергії поверхневого натягу та кулонівської енергії. З точністю до третього порядку за значеннями β цю енергію можна подати у наступному вигляді (Бор, Моттelson)

$$V(\beta, \gamma) = V_0 \left[(1-x)\beta^2 - \frac{2}{21} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (1+2x)\beta^3 \cos(3\gamma) \right], \quad (3.141)$$

де $V_0 = 0,5a_2 / \pi$; a_2 – коефіцієнт поверхневої енергії у формулі Вейцзеке-ра (1.17): $a_2 \simeq 18A^{2/3}$ (MeV); x – параметр подільності ядра: $x = (Z^2/A) / (2,315 a_2 A^{-2/3}) \simeq 0,02(Z^2/A)/45$.

При малих зміщеннях поверхні деформованого ядра поблизу його статичних (рівноважних) значень β_0, γ_0 параметрів деформації, потенціал (3.141) приймає такий вигляд

$$V(\beta, \gamma) = \quad (3.142)$$

$$= \frac{C_{\beta\beta}}{2}(\beta - \beta_0)^2 + C_{\beta\gamma}(\beta - \beta_0)(\gamma - \gamma_0) + \frac{C_{\gamma\gamma}}{2}(\gamma - \gamma_0)^2 + V(\beta_0, \gamma_0),$$

$$C_{\beta\beta} = \partial^2 V(\beta, \gamma) / \partial \beta^2 |_{\beta, \gamma}$$

$$= C_{\beta_0, \gamma_0} = 2V_0 \left[(1-x) - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (1+2x)\beta_0 \cos(3\gamma_0) \right],$$

$$C_{\beta\gamma} = \partial^2 V(\beta, \gamma) / \partial \beta \partial \gamma |_{\beta, \gamma = \beta_0, \gamma_0} = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} V_0 (1+2x)\beta_0 \sin(3\gamma_0),$$

$$C_{\gamma\gamma} = \partial^2 V(\beta, \gamma) / \partial \gamma^2 |_{\beta, \gamma = \beta_0, \gamma_0} = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} V_0 (1+2x)\beta_0^3 \cos(3\gamma_0).$$

З формул (3.141), (3.142) маємо, що в аксіально-симетричних ядрах ($\gamma_0 = 0$ або π , $\beta > 0$), виконуються співвідношення $C_{\beta\beta} \neq 0$, $C_{\gamma\gamma} \neq 0$, $C_{\beta\gamma} = 0$. Це означає, що в аксіальних ядрах β і γ коливання є незв'язаними. З формул (3.128) – (3.135), (3.142) отримуємо такий вираз для вібраційної класичної енергії $\mathcal{E}_{vib}$ коливань аксіально-симетричного ядра ($\gamma_0 = 0$ або π , $\beta > 0$)

$$\mathcal{E}_{vib} = \frac{1}{2} \left[\bar{B}_\beta \dot{\beta}^2 + \bar{C}_\beta (\beta - \beta_0)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\bar{B}_\gamma \beta^2 \dot{\gamma}^2 + \beta_0^2 \bar{C}_\gamma \gamma^2 \right], \quad (3.143)$$

$$\bar{C}_\beta = C_{\beta\beta}(\beta_0, \gamma_0 = 0 \text{ або } \pi) = C - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} V_0 (1 + 2x) \beta_0 \sin \gamma_0,$$

$$\bar{C}_\gamma = C_{\gamma\gamma}(\beta_0, \gamma_0 = 0 \text{ або } \pi) = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} V_0 (1 + 2x) \beta_0 \sin \gamma_0,$$

$$\bar{B}_\beta \cong B \left[1 + \frac{15}{8\pi} \beta_0^2 \right], \quad \bar{B}_\gamma \cong B \left[1 + \frac{5}{8\pi} \beta_0^2 \right],$$

а ротаційна енергія дорівнює

$$\mathcal{E}_{rot} \equiv T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \omega_j^2 \mathcal{F}_j = \sum_{j=1,2} \frac{(\vec{R})_j^2}{2\mathcal{F}}, \quad j = 1, 2 \equiv X', Y', \quad (3.144)$$

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \cong 3\beta^2 B, \quad \mathcal{F}_3 \equiv \mathcal{F}_{Z'} = 0, \quad (\vec{R})_3 = 0.$$

В ядрах з сферичною рівноважною формою $\beta_0 = 0$, тому відмінним від нуля є параметр жорсткості $C_{\beta\beta}$ і можливі лише β -коливання. В краплинній моделі енергія $\mathcal{E}_{vib}$ коливань поверхні сферичного ядра має вигляд

$$\mathcal{E}_{vib} = \frac{1}{2} \left[\bar{B}_\beta \dot{\beta}^2 + C \beta^2 \right] + \frac{1}{2} \bar{B}_\gamma \beta^2 \dot{\gamma}^2, \quad (3.145)$$

$$C = \bar{C}_\beta(\beta_0 = 0) = 2V_0(1 - x),$$

$$\bar{B}_\beta \cong \bar{B}_\gamma \cong B,$$

а ротаційна енергія $\mathcal{E}_{rot}$ задається виразом (3.144).

Відмітимо, що обертальний і коливальний рухи є взаємозалежними, так як моменти інерції і ротаційна енергія $\mathcal{E}_{rot}$ залежать від параметра деформації β , зміна якого обумовлена, головним чином, коливаннями поверхні ядра.

В узагальненій моделі ядра вирази для квантових гамільтоніанів $\hat{\mathcal{H}}_{vib}$, $\hat{\mathcal{H}}_{rot}$, що визначають енергії вібраційних (E_{vib}) та ротаційних (E_{rot}) станів, знаходяться за допомогою квантування вищенаведених гідродинамічних виразів моделі

рідкої краплини, а параметри деформації $\{\beta_{\lambda\mu}\}$ розглядаються як колективні змінні. Гамільтоніан $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ одночастинкових збуджень будується за аналогією з оболонковою сферичною моделлю у вигляді оператора, що визначає одночастинкові стани в деякому несферичному середньому потенціалі. Повний гамільтоніан узагальненої моделі ядра має вигляд

$$\hat{H} = \hat{H}(\{\alpha_{\lambda\mu}\}) = \hat{\mathcal{H}}_{vib}(\{\beta_{\lambda\mu}\}) + \hat{\mathcal{H}}_{rot}(\{\beta_{\lambda\mu}\}) + \hat{\mathcal{H}}_{int}(\{\beta_{\lambda\mu}\}), \quad (3.146)$$

де явно вказана залежність від колективних змінних. Кожна з величин $\beta_{\lambda\mu}$ є сумою рівноважних (статичного) компоненту $\bar{\beta}_{\lambda\mu}$, що не змінюється з часом, та динамічної частини $\delta\beta_{\lambda\mu}$, яка визначається рівняннями колективного руху з гамільтоніаном $\hat{H}$ у просторі колективних змінних, $\beta_{\lambda\mu} = \bar{\beta}_{\lambda\mu} + \delta\beta_{\lambda\mu}$. Вважається, що рівноважні компоненти деформацій відповідають формі основного стану ядра.

Залежність компонентів повного гамільтоніану від динамічної частини колективних змінних приводить до взаємозв'язку між різними типами рухів нуклонів у ядрах. Співвідношення між енергіями різних рухів можна якісно оцінити, якщо розглянути періоди відповідних рухів. Оскільки колективний рух зв'язаний з переміщенням великої кількості нуклонів, то можна вважати, що він має велику інерційність і відбувається значно повільніше ніж одночастинковий рух. З квантової механіки випливає, що період коливань T_α у стаціонарному стані з енергією E_α обернено пропорційний значенню енергії: $T_\alpha = 2\pi\hbar/E_\alpha$. Тому можна очікувати справедливості такого співвідношення:

$$T_{in} \equiv \frac{2\pi\hbar}{E_{in}} \ll T_{vib} \equiv \frac{2\pi\hbar}{E_{vib}}, \quad T_{rot} \equiv \frac{2\pi\hbar}{E_{rot}}, \quad (3.147)$$

де T_{in} – середній період одночастинкового руху; T_{vib} і T_{rot} – середні періоди поверхневих коливань та обертання ядра як цілого, відповідно; E_{in} , E_{vib} , E_{rot} – характерні енергії рухів. Оскільки в середніх і важких ядрах коливання формуються значно меншою кількістю нуклонів ніж обертання, а саме, нуклонами, які розміщені поблизу поверхні ядра, то $T_{rot} \gg T_{vib}$. Тобто можна очікувати, що в достатньо важких ядрах для енергії внутрішнього (одночастинкового) руху та колективних енергій виконується нерівність

$$E_{in} \gg E_{vib} \gg E_{rot}. \quad (3.148)$$



Рис. 3.9. Спектри збуджених станів в адіабатичній узагальненій моделі ядра

У такій ситуації різні типи рухів можна вважати незалежними. Цей випадок носить назву адіабатичного наближення. Схематично спектри збуджених станів в такому наближенні зображені на рис. 3.9. Згідно з співвідношеннями (3.147) та (3.148) можна очікувати, що обертання ядра буде настільки повільним, що його впливом на одночастинковий рух та коливання можна знехтувати, а ядерні рухи можна наближено розкласти на три незалежних: внутрішній, вібраційний і обертання ядра як цілого. Це означає, що повний гамільтоніан (3.146) можна записати у вигляді суми трьох компонентів:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \hat{H}_{vib} + \hat{H}_{rot} + \hat{H}_{int}, \\
 \hat{H}_{vib} &\equiv \hat{H}_{vib}(\{\delta\beta_{\lambda\mu}\}) = \hat{\mathcal{H}}_{vib}(\{\beta_{\lambda\mu} = \bar{\beta}_{\lambda\mu} + \delta\beta_{\lambda\mu}\}), \\
 \hat{H}_{rot} &\equiv \hat{H}_{rot}(\{\bar{\beta}_{\lambda\mu}\}) = \hat{\mathcal{H}}_{rot}(\{\beta_{\lambda\mu} = \bar{\beta}_{\lambda\mu}\}), \\
 \hat{H}_{int} &= \sum_{j=1}^A h_j \equiv \hat{H}_{int}(\{\bar{\beta}_{\lambda\mu}\}) = \hat{\mathcal{H}}_{int}(\{\beta_{\lambda\mu} = \bar{\beta}_{\lambda\mu}\}),
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

де $\hat{H}_{rot}$ – оператор енергії обертання при рівноважних значеннях параметрів деформації; $\hat{H}_{vib}$ – вібраційний гамільтоніан, який описує коливання поверхні ядра; компонент $\hat{H}_{int}$ відповідає внутрішньому одночастинковому руху нуклонів і є сумою одночастинкових потенціалів h_j з несферичним середнім полем, що визначається статичними значеннями параметрів деформації.

Згідно з (3.149), якщо не враховувати додаткових умов симетрії у ядрі, то хвильову функцію Ψ будь-якого його стану можна подати у вигляді добутку хвильових функцій окремих збуджень – внутрішнього (χ), вібраційного (φ_{vib}) та обертань D_{rot} :

$$\Psi = \chi \varphi_{vib} D_{rot}. \tag{3.150}$$

Оскільки внутрішній гамільтоніан $\hat{H}_{int}$ у цій моделі ототожнюється з гамільтоніаном моделі незалежного руху нуклонів, то в адіабатичному наближенні число ступенів свободи, що використовується в гамільтоніані (3.149), перевищує реально існуюче на кількість ступенів свободи, зокрема, вібраційного руху.

Якщо адіабатичне наближення (3.148) не виконується, то повний гамільтоніан часто розглядають у вигляді

$$\hat{H} = \hat{H}_{int} + \hat{H}_{rot} + \hat{H}_{vib} + \hat{H}_{corr}, \quad (3.151)$$

де $\hat{H}_{corr}$ – кореляційний доданок, який зв'язує внутрішній одночастинковий рух з колективним. У випадку, коли компонент $\hat{H}_{corr}$ визначає вплив обертання на одночастинковий рух, його називають взаємодією Коріоліса, за аналогією з коріолісовою потенціальною енергією у класичній механіці.

Існує багато різних варіантів узагальненої моделі ядра. Першою такою теорією була узагальнена модель Бора–Моттельсона в адіабатичному наближенні (адіабатична модель Бора–Моттельсона, 1950–1953 рр.). При розгляді властивостей ядер О.Бор і Б.Моттельсон вважали, що ядра є квадрупольно-деформованими і аксіально-симетричними в основному стані ($\beta = \beta_0$, $\gamma_0 = 0$, в сферичних ядрах $\beta_0 = 0$). При обчисленні характеристик збуджених станів враховувалися малі відхилення параметрів β , γ від їхніх рівноважних значень. О.С.Давидов і Г.Ф.Філіппов (1958 р.) запропонували і розробили теорію неаксіальних ядер, яка базується на припущенні, що деформовані ядра вже в основному стані можуть мати форму неаксіального еліпсоїда. При розгляді ротаційних станів використовувалося адіабатичне наближення (модель жорсткого неаксіального ротатора), і вважалося, що ядро не змінює форми при обертанні, тобто ротаційні спектри обчислювалися за умови $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_{eff}$, де γ_{eff} – деякий ефективний параметр неаксіальності. В моделі Давідова і Чабана (1960 р.) була врахована неадіабатичність колективного руху по змінній β , а параметр неаксіальності замінювався деяким ефективним значенням γ_{eff} . Послідовний неадіабатичний метод обчислення характеристик збуджених рівнів ядер, що є аксіально-симетричними в основному стані, був розроблений І.Фесслером і В.Грайнером (1962–1965 рр.) в запропонованій ними ротаційно-вібраційній моделі.

Узагальнена модель дала змогу класифікувати різні типи колективних збуджень, зокрема, виділити вібраційні і ротаційні стани серед всіх збуджених

станів ядер, пояснити їх властивості та кількісно описати деякі їх характеристики.

3.8. Одночастинкові стани в деформованих ядрах

Статично деформовані ядра мають відмінні від нуля значення квадрупольних моментів, а тому ненульові параметри квадрупольної деформації форми ядра (§1.7). В нульовому наближенні можна вважати, що вони є аксіально-симетричними і мають форму еліпсоїда обертання. Властивості симетрії одночастинкового потенціалу відповідають властивостям симетрії розподілу нуклонів, якщо середній розподіл заряду та маси ядра і його рівноважна форма мають вигляд еліпсоїда обертання, то і середній одночастинковий потенціал можна вважати аксіально-симетричним з чисто квадрупольною деформацією або з переважним внеском квадрупольної деформації.

Унаслідок анізотропії середнього потенціалу його власні функції не можуть бути власними функціями квадрата оператора повного кутового моменту $\hat{j}^2$ і при переході від сферичного симетричного потенціалу до деформованого квантові числа l та j перестають зберігатися. Однак за наявності аксіальної симетрії з гамільтоніаном комутує оператор проекції моменту $\hat{j}_{z'}$ (вісь Z' внутрішньої системи координат вибрана уздовж осі симетрії). Проекція m_j одночастинкового кутового моменту на вісь симетрії ядра залишається інтегралом руху, але рівні, що відповідають різним значенням $|m_j|$, вже мають різні значення енергій. Виродження за знаком m_j залишається завдяки рівноправності обох орієнтацій відносно осі симетрії.

В аксіально-деформованих ядрах квантове число проекції моменту m_j зазвичай позначають через K (іноді через Ω). Це пов'язано з тотожністю величини m_j з проекцією K повного кутового моменту на вісь симетрії у випадку, коли внутрішній кутовий момент ядра є одночастинковим (див. далі рис. 3.15). В одночастинковому гамільтоніані деформованих ядер також враховується і спін-орбітальний зв'язок. Якби його не було, то гамільтоніан комутував би з проекціями орбітального $\hat{l}_{z'}$ і спінового $\hat{s}_{z'}$ моментів. При цьому всі рівні були б додатково двічі вироджені і стани з $K_{\pm} = \Lambda \pm \Sigma$ мали б однакову енергію, де Λ (Σ) – квантове число проекції орбітального (спінового) моменту. Для повної характеристики рівня у несферичному потенціалі додатково до K потрібні ще які-небудь квантові числа. У загальному випадку не вдалося знайти (подібний

до величин n, j, l у сферичному потенціалі) такий набір чисел, який би мав наочне фізичне тлумачення. Тому іноді одночастинкові рівні деформованого ядра лиш нумерують у порядку зростання енергії.

В аналітичних обчисленнях часто використовується несферичний потенціал Нільссона, який має вигляд потенціалу гармонічного осцилятора (3.85), але з різними значеннями частот уздовж осей симетрії:

$$V_{ND}(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m_p(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + C(\hat{l} \hat{s}) + D\hat{l}^2. \quad (3.152)$$

Тут і далі в цьому підрозділі для спрощення запису формул не вказані штрихи в позначеннях декартових осей X', Y', Z' внутрішньої системи координат.

В аксіально-деформованих ядрах Нільссон ввів параметр деформації δ такий, що

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_{\perp}^2 = \omega_0^2(\delta) \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right), \quad \omega_z^2 = \omega_0^2(\delta) \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right), \quad (3.153)$$

де частота $\omega(\delta)$ визначається з умови нестисливості ядерної матерії, тобто з умови збереження об'єму ядра при зміні деформації δ . Якщо знехтувати у потенціалі (3.152) останнім доданком, то умова нестисливості приводить до співвідношення³⁾

$$\omega_x \omega_y \omega_z = \omega_0^3 \quad (3.154)$$

з $\omega_0 = 41 A^{-1/3}/\hbar$ для значення частоти при $\delta = 0$. З рівняння (3.154) маємо

$$\omega_0^6(\delta) = \omega_0^6 \left(1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3\right). \quad (3.155)$$

Параметр δ зв'язаний з параметром деформації $\beta_2 \equiv \beta_{20}$, що характеризує радіус деформованого ядра (§ 1.5, 1.7), співвідношенням

$$\delta = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_2 \simeq 0,95 \beta_2. \quad (3.156)$$

³⁾ Осциляторні функції і відповідна густина розподілу нуклонів є функціями добутку br , де $b \propto \omega^{1/2}$ – масштабний множник. Звідси отримуємо, що з умови сталості кількості нуклонів у ядрі з розподілом густини у вигляді сходинок можна знайти (наприклад, у сферичному ядрі) не сам радіус ядра R_0 , а тільки величину bR_0 ; тобто, у моделі із сферичним осциляторним потенціалом $R_0 \propto \omega_0^{-1/2}$. Аналогічно у деформованому ядрі: $R_{0,x} \propto \omega_x^{-1/2}$, $R_{0,y} \propto \omega_y^{-1/2}$, $R_{0,z} \propto \omega_z^{-1/2}$. Тому об'єм сферичного ядра пропорційний $\omega_0^{-3/2}$, а деформованого – $(\omega_x \omega_y \omega_z)^{-1/2}$. Прирівнюючи ці об'єми знаходимо умову (3.154).

Часто використовують параметр деформації ε і частоти $\bar{\omega}(\varepsilon)$, які визначені таким чином:

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_{\perp}^2 = \omega_0^2(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right), \quad \omega_z^2 = \omega_0^2(\varepsilon) \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right). \quad (3.157)$$

Параметри δ і ε зв'язані співвідношеннями

$$\varepsilon = 2\delta + \delta^2/6 + O(\delta^3); \quad \omega_0(\varepsilon) = \omega_0 [1 + \varepsilon^2/9 + O(\varepsilon^3)]. \quad (3.158)$$

Деформований потенціал Нільссона (3.152) можна подати в іншій формі. Якщо врахувати рівняння

$$2z^2 - (x^2 + y^2) = 4\sqrt{\frac{\pi}{5}}r^2Y_{20}(\theta, \varphi), \quad (3.159)$$

маємо

$$V_{ND} = V_N + V_{\delta}, \quad (3.160)$$

де V_N – потенціал Нільссона сферичного ядра (3.89), а V_{δ} – частина потенціалу, що порушує сферичну симетрію

$$V_{\delta} = -\delta \cdot m_p \cdot \omega_0^2 \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\theta, \varphi). \quad (3.161)$$

Тому одночастинковий гамільтоніан можна подати у вигляді

$$\hat{h} = \hat{h}_G + V_{\delta}, \quad (3.162)$$

де $\hat{h}_G$ – гамільтоніаном гармонічного осцилятора сферичного ядра з потенціальною енергією згідно з (3.85).

Для власних функцій (χ) і енергій гамільтоніана $\hat{h}$ (як і для інших одночастинкових несферичних потенціалів деформованих ядер) не знайдено простого аналітичного виразу. Зазвичай при обчисленні власних значень і функцій використовують метод діагоналізації гамільтоніана на обмеженому базисі. Цей метод полягає в розкладі хвильової функції χ у ряд за деяким повним ортонормованим набором функцій $\varphi^{(i)}$

$$\chi = \sum_i a_i \varphi^{(i)}; \quad \int \varphi^{(i)}(\vec{r}) \varphi^{(k)}(\vec{r}) d\vec{r} \equiv \langle \varphi^{(i)} | \varphi^{(k)} \rangle = \delta_{ik}. \quad (3.163)$$

За умови вдалого вибору базисних функцій $\varphi^{(i)}$ функцію χ визначає невелика кількість членів і це суттєво спрощує розрахунки. Вибір базисних функцій, за якими розкладають χ , називають також вибором представлення для χ . Амплітуди a_i знаходять розв'язуванням системи лінійних однорідних рівнянь, що виникає після підставлення χ у вигляді (3.163) у рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (3.162). Спрощено отриману систему можна записати у вигляді

$$\sum_i a_i \left(\langle i' | \hat{h} | i \rangle - E_i \delta_{i'i} \right) = 0; \quad \langle i' | \hat{h} | i \rangle \equiv \int \varphi^{(i')}(\vec{r}) \hat{h} \varphi^{(i)}(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (3.164)$$

де $\langle i' | \hat{h} | i \rangle$ – матричний елемент гамільтоніана $\hat{h}$ на функціях $\varphi^{(i)}$. Власні значення одночастинкових енергій E_i знаходять з умови рівності нулю визначника системи (3.164).

Для дослідження якісних особливостей розв'язків рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (3.161), (3.162) корисно розглянути деякі граничні випадки. Якщо деформації дуже малі, то розв'язки (3.164) майже збігаються з розв'язками для сферично-симетричного гамільтоніана. Потенціал V_δ можна трактувати як мале збурення, тоді поправка до енергії дорівнюватиме діагональному матричному елементу від V_δ за одночастинковими функціями сферичного ядра ψ_{jK} , а саме

$$\Delta E_{NljK} = \langle \psi_{jK} | V_\delta | \psi_{jK} \rangle = -\delta \frac{(N + \frac{3}{2}) \hbar \omega_0}{6j(j+1)} [j(j+1) - 3K^2]. \quad (3.165)$$

З виразу (3.165) випливає, що з зростанням деформації ($\delta > 0$) енергії рівнів з малими K ($3K^2 < j(j+1)$) зменшуються, у той час як енергії рівнів з великими K , зокрема, з $K = j$, збільшуються. Енергії рівнів з $j = 1/2$ ($s_{1/2}, p_{1/2}$) при малих деформаціях взагалі не змінюються, оскільки матричний елемент $\langle \psi_{1/2,1/2} | Y_{20} | \psi_{1/2,1/2} \rangle$ дорівнює нулю згідно з правилами відбору за кутовим моментом. Відзначимо, що при $j > 1/2$ всі рівні з $K = 1/2$ обов'язково зміщуються вниз.

В іншому граничному випадку дуже великих деформацій також досить легко визначити якісні особливості розв'язку (3.164). У першому наближенні можна вважати, що внесок спіно-орбітального компонента в загальний потенціал не залежить від деформації. Тому при великих деформаціях внесок потенціалу V_δ буде набагато більшим від взаємодії $C(ls) + D\hat{l}^2$, яку можна вважати малим збуренням. Однак, якщо впливом спіно-орбітального зв'язку знехтувати, то всі три оператори проекції повного K , орбітального Λ і спінового Σ моментів

комутують з гамільтоніаном (до того ж вони комутують між і собою). Звідси випливає, що у випадку дуже великих деформацій кожна хвильова функція може характеризуватися трьома квантовими числами: K, Λ, Σ ($K = \Lambda + \Sigma$).

У разі великих деформацій, коли членами $C(\hat{I}^2)$ і $D\hat{I}^2$ можна знехтувати, розв'язок зручніше шукати не у сферичній системі координат, а в циліндричній, або навіть у декартовій. В останньому випадку гамільтоніан $\hat{h}$ переходить у гамільтоніан анізотропного осцилятора і є сумою трьох одновимірних осциляторів, що описують коливання частинки уздовж кожної з декартових осей координат. Кожен збуджений стан може бути охарактеризований числами n_x, n_y, n_z квантів коливань з енергіями $\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z$, де нижній індекс визначає вісь, уздовж якої рухається частинка. Повна енергія анізотропного осцилятора має вигляд $E = n_x\hbar\omega_x + n_y\hbar\omega_y + n_z\hbar\omega_z$. Числа n_x, n_y, n_z є кількістю вузлів хвильової функції на відповідній осі. Іноді їх називають числами коливань уздовж відповідних осей. У випадку сферичного гармонічного осцилятора сума цих чисел є головним квантовим числом $N = n_x + n_y + n_z$, що визначає енергію $E_N = E_{jIN} = \hbar\omega_0(N + 3/2)$ одночастинкового стану. Якщо частоти коливань уздовж осей X і Y збігаються, то два взаємно перпендикулярних когерентних коливання можна скласти. Тоді повне збудження можна подати як обертання у площині (X, Y) зі значенням кутового моменту Λ і коливання у напрямку уздовж вісі Z . Така картина відповідає розділенню змінних у гамільтоніані анізотропного осцилятора ($\omega_x = \omega_y$) у циліндричній системі координат.

Таким чином, у випадку дуже великих деформацій кожна хвильова функція може бути охарактеризована такими квантовими числами: N – головне квантове число; n_z – число квантів з енергією $\hbar\omega_z$; K, Λ, Σ – проекції повного, орбітального і спінового моментів. Не всі ці квантові числа є незалежними. Так, наприклад, знаючи N, n_z і K , можна знайти Λ і Σ . Дійсно, з властивостей хвильової функції тривимірного осцилятора витікає співвідношення $(-1)^N = (-1)^{n_z + \Lambda}$, тобто Λ буде парним чи непарним залежно від $N - n_z$. Оскільки $\Lambda = K - \Sigma$, то, знаючи парність величини Λ і значення проекції K , можна визначити Λ і Σ .

У разі дуже великих деформацій таких, що $\omega_\perp \gg \omega_z$, можна легко знайти послідовність рівнів і приписати їм квантові числа. Дійсно, оскільки квантове число осциляторного потенціалу N дорівнює $n_x + n_y + n_z$, то мінімальна енергія рівня відповідає максимальному значенню n_z , а саме: $n_z = N$ і мінімальним значенням n_x, n_y ($n_x = n_y = 0$). Оскільки коливання уздовж осей X, Y при цьому відсутні, то $\Lambda = 0$ і $K = \Sigma = 1/2$. Вищі рівні з $K = 1/2$ відповідають

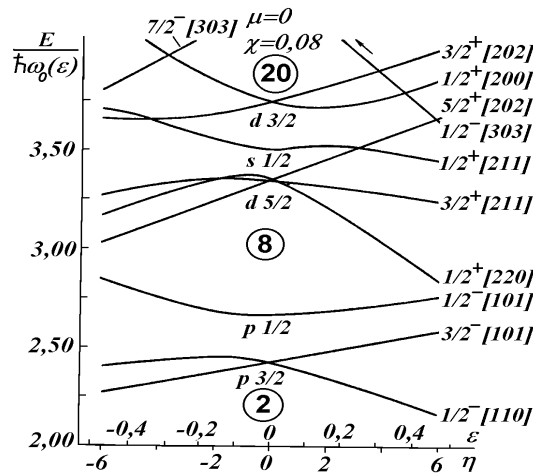


Рис. 3.10. Одночастинкові рівні в потенціалі Нільссона для ядер з кількістю нуклонів в інтервалах $8 < Z < 20$ та $8 < N < 20$

значенням $n_z = N - 1$, $N - 2$ і т. д.. При $K = 3/2$ найнижчий рівень має $n_z = N - 1$ осциляторних квантів і зі збільшенням енергії рівня значення n_z зменшується на одиницю.

Таким чином, у разі великих деформацій усі одночастинкові стани, що відповідають гамільтоніану (3.162), можна класифікувати за трьома незалежними квантовими числами: N , n_z , K . Однак, як правило, також використовують і "залежні" квантові числа Λ , а іноді і Σ . Ці квантові числа зазвичай наводять у такій послідовності: $K^\pi [Nn_z\Lambda]$ або $K [Nn_z\Lambda]$, оскільки значення парності дорівнює $\pi = (-1)^{n_z+\Lambda}$. Іноді замість K символічно вказують значення Σ і використовують позначення $[Nn_z\Lambda] \uparrow$, якщо $K = \Lambda + 1/2$ та $[Nn_z\Lambda] \downarrow$, якщо $K = \Lambda - 1/2$. Замість стрілок, що позначають знак проекції Σ спіну, у літературі зустрічається позначення $[Nn_z\Lambda] +$ для $K = \Lambda + 1/2$ і $[Nn_z\Lambda] -$ для $K = \Lambda - 1/2$.

Приклади схем одночастинкових станів в аксіально-симетричному потенціалі Нільссона для протонів і нейтронів ілюструють рис. 3.10 і 3.11. На рис. 3.10 у дужках наведено магічні числа, а замість значень параметрів потенціалу C , D вказано значення параметрів χ і μ ,

$$\chi = -2C/\omega_0, \quad \mu = 2D/C, \quad (3.166)$$

і параметр деформації

$$\eta = \frac{\delta \omega(\delta)}{\chi \omega_0} = \frac{\delta}{\chi} \left(1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3 \right)^{-1/6}. \quad (3.167)$$

У досконалішій одночастинковій оболонковій моделі деформованого ядра використовують середній ядерний потенціал більш реалістичної форми, ніж потенціальна яма гармонічного осцилятора з незкінченим відштовхуванням на великих відстанях. Як і у випадку сферично симетричних ядер таким потенціалом є середній потенціал у формі Вудса – Саксона, який має кінцеву глибину і розмитий край. Для аксіально-симетричних ядер у вигляді еліпсоїда обертання він має вид суми двох компонентів – центрального

$$V(r, \beta_2, \theta) = -V_0 \left\{ 1 + \exp \left[\frac{r - R_0 (1 + \beta_2 Y_{20}(\theta))}{a} \right] \right\}^{-1} \quad (3.168)$$

і спіно-орбітального

$$V_{ls}(r, \beta_2, \theta) = 2b [\hat{p} \times \hat{s}] \cdot \vec{\nabla} V(r, \beta_2, \theta), \quad (3.169)$$

де b – деяка стала. Кулонівський потенціал, який необхідно враховувати при обчисленні одночастинкових протонних станів, має вигляд

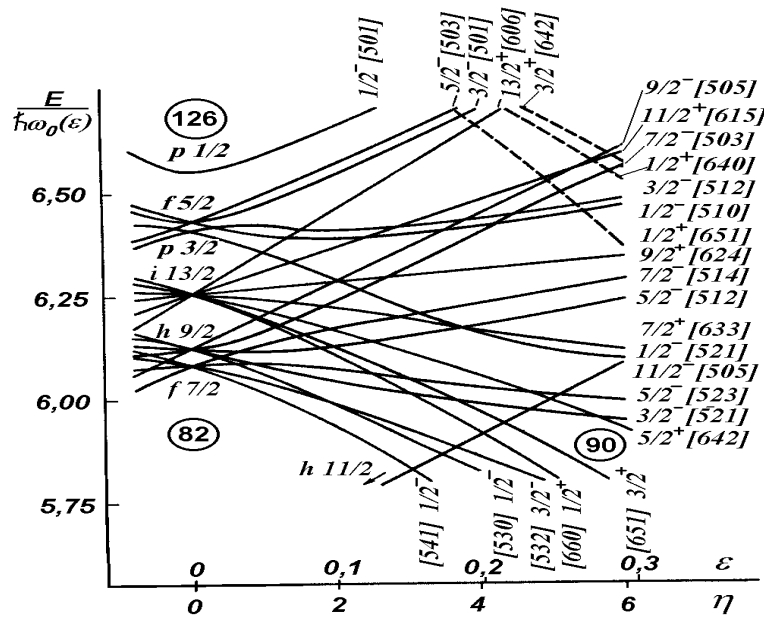


Рис. 3.11. Нейтронні орбіти в потенціалі Нільссона для ядер з кількістю нейтронів в інтервалі $82 < N < 126$

$$V_c(r, \beta_2, \theta) = \frac{3(Z-1)e^2}{4\pi R_0^3} \times \int \frac{dr}{|r-r'|} \left\{ 1 + \exp \left[\frac{r - R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta))}{a} \right] \right\}^{-1}. \quad (3.170)$$

Одночастинкові стани у потенціалі Вудса – Саксона (3.168) – (3.170) часто також класифікують за допомогою набору квантових чисел $K^\pi [N n_z \Lambda]$. Поведінка енергій одночастинкових станів у несферичному потенціалі Вудса – Саксона подібна до обчисленої в потенціалі Нільссона. Матричні елементи периферійних процесів на поверхні ядра, які обчислено з хвильовими функціями потенціалу Нільссона і Вудса – Саксона, можуть значно відрізнятися один від одного. Використання в обчисленнях структури ядра одночастинкових функцій потенціалу Вудса – Саксона значно поліпшує узгодження результатів з експериментом, особливо у тих випадках, де головну роль відіграють процеси на поверхні ядра. Це пояснюється тим, що хвильові функції гармонічного потенціалу Нільссона (3.152) через його нескінченне відштовхування на великих відстанях мають неправильну поведінку поблизу поверхні ядра.

У деформованих ядрах, як і у сферичних, також спостерігається оболонкова структура, тобто в одночастинковому спектрі існують послідовні згущення

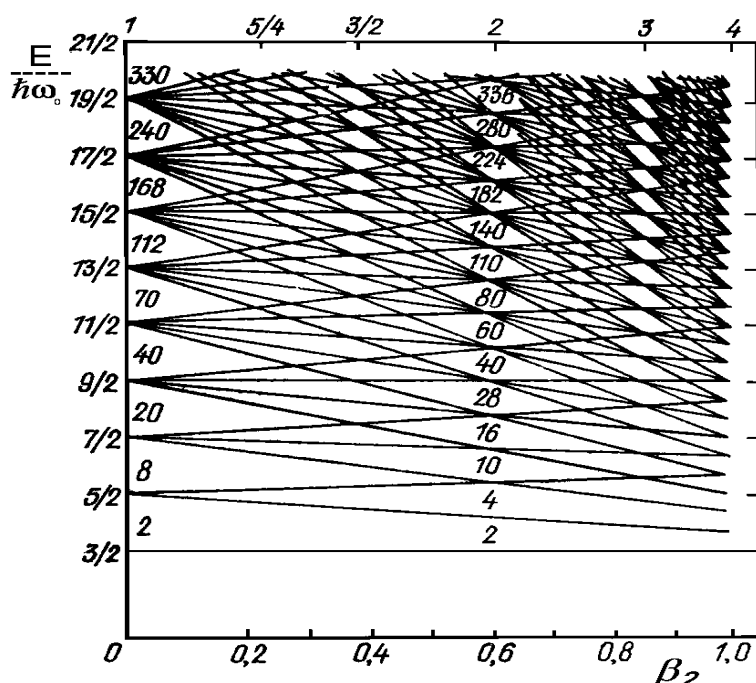


Рис. 3.12. Схема рівнів гармонічного осцилятора для витягнутого еліпсоїда обертання

(оболонки) і розрідження одночастинкових ядерних рівнів. Особливості вияву ядерних оболонок у деформованих ядрах можна спостерігати на рис. 3.12, де показано рівні в потенціалі гармонічного осцилятора для витягнутого еліпсоїда обертання без врахування спін-орбітальної взаємодії, які обчислено з різними значеннями параметра деформації β_2 . Енергії наведено в одиницях $\hbar\omega_0$, на горизонтальній осі зверху вказано відношення півосей еліпсоїда. При нульовій деформації маємо послідовність вироджених рівнів, що приводить до магічних чисел: 2, 8, 20, 40 і т. д. Ці числа є стандартними для сферично-симетричного осциляторного потенціалу без врахування спін-орбітальної взаємодії. Видно, що при деформаціях, які відповідають відношенням довжин великої півосі a еліпсоїда і малої півосі b з $a/b = 3/2$ і 2, також з'являються згущення (оболонки) і розрідження (енергетичні інтервали між оболонками) одночастинкових рівнів. При $a/b = 2$ послідовність магічних чисел така: 2, 4, 10, 16 і т. д. Ці числа відрізняються від магічних чисел у сферичних ядрах. Хоча при врахуванні спін-орбітальної взаємодії послідовності оболонок і магічних чисел будуть іншими, але якісна картина схеми рівнів зберігається.

Оболонкова структура деформованих ядер виявляється, наприклад, у таких фундаментальних явищах, як аномалії в питомій енергії зв'язку, несферичність форми ядер рідкісноземельних елементів і актиноїдів, існування ізомерів фор-

ми, що розпадаються спонтанним поділом, тощо.

Оболонкова структура ядер є явищем універсальним. Вона є результатом загальної закономірності розподілу одночастинкових рівнів у тривимірній потенціальній ямі і зв'язана з особливостями майже незалежного руху частинок у самоузгодженому середньому потенціалі. Згідно з квазікласичною теорією одночастинкового руху положення центрів енергії пучків рівнів, що формують оболонки, визначаються тривимірними класичними періодичними траєкторіями і обумовлені правилами квантування тривимірного руху в обмеженому потенціалі з урахуванням багаторазового відбиття від стінок.

3.9. Вібраційні стани ядер

Розглянемо вібраційні коливання поверхні сферичних ядер, тобто ядер з нульовими значеннями параметрів рівноважних деформацій $\bar{\beta}_{\lambda\mu} = 0$. У адіабатичній узагальненій моделі в сферичних ядрах в якості виразу для енергії вібраційних збуджень можна використовувати квантовий аналог формул (3.110) - (3.112) для повної колективної енергії в лабораторній системі координат. Дійсно, згідно з адіабатичним наближенням до узагальненої моделі (див.ф.(3.149)) внесок ротаційної енергії в повну енергію колективного руху є енергією обертання ядра з рівноважними значеннями параметрів деформації. Так як гідродинамічні моменти інерції сферичного ядра дорівнюють нулю (див. (3.144)), то його ротаційна енергія є нульовою і повна енергія збігається з вібраційною. Цей висновок також узгоджується з розглядом обертань з погляду квантової механіки. Сферично-симетричне ядро є інваріантним відносно обертання навколо довільної осі, що проходить через його центр, але ротаційна енергія навколо такої осі дорівнює нулю, так як обертання нічого не може змінити у даній системі і не існує ніяких умов квантування колективного руху, що привели б до зміни енергії.

У випадку сферичних ядер всі орієнтації ядра у просторі рівноправні, тому масовий параметр та коефіцієнт жорсткості у формулах (3.111), (3.112) не залежать від індекса μ , $B_{\lambda\mu} = B_\lambda$, $C_{\lambda\mu} = C_\lambda$, і вираз для енергії (3.110) приймає наступний вигляд:

$$\mathcal{E}_{vib} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \left(B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right). \quad (3.171)$$

Значення B_λ і C_λ залежать від методу опису ядерного середовища та його характеристик. Зокрема, якщо ядро розглядати як краплину ідеальної нестисливої рідини з рівномірно розподіленим зарядом, то маємо так звані гідродинамічні вирази для масового параметра та коефіцієнта жорсткості:

$$B_\lambda = \frac{\rho_0}{\lambda} R_0^5 = \frac{1}{\lambda} \frac{3}{4\pi} A m R_0^2 \equiv B_\lambda^{(hydr)}, \quad (3.172)$$

$$C_\lambda = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \sigma R^2 - \frac{3}{2\pi} [(\lambda - 1)(2\lambda + 1)] \frac{Z^2 e^2}{R_0} \equiv C_\lambda^{(hydr)},$$

де ρ_0 – густина ядерної рідини; σ – коефіцієнт поверхневого натягу, який визначає коефіцієнт $a_2 = 4\pi\sigma R^2 A^{-2/3} \simeq 20$ (МеВ) поверхневої енергії у формулі Вейцекера (1.17). Перший компонент коефіцієнта жорсткості C_λ обумовлений зміною поверхневої енергії краплини, а другий – кулонівською взаємодією; в формулах (3.142), (3.145) коефіцієнт жорсткості квадрупольних коливань позначався як C : $C_{\lambda=2} \equiv C = C_{\beta\beta}(\beta = 0, \gamma = 0)$.

Для того, щоб перейти від виразу (3.171) для енергії до виразу для квантового гамільтоніана $\hat{H}_{vib}$ необхідно ввести узагальнені імпульси $\hat{\pi}_{\lambda\mu}$

$$\hat{\pi}_{\lambda\mu} \equiv \partial \mathcal{E}_{vib} / \partial \dot{\alpha}_{\lambda\mu} = B_\lambda \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*, \quad (3.173)$$

які канонічно спряжені узагальненим координатам $\alpha_{\lambda\mu}$. Тоді квантовий вібраційний гамільтоніан набуває вигляду

$$\hat{H}_{vib} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \left(\frac{1}{B_\lambda} |\hat{\pi}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\hat{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 \right), \quad (3.174)$$

де $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$ – оператори узагальнених координат, які визначають координати $\alpha_{\lambda\mu}$. Далі вважається, що для операторів $\hat{\pi}_{\lambda\mu}$ і $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$ виконуються такі комутаційні співвідношення:

$$[\hat{\pi}_{\lambda\mu}, \hat{\alpha}_{\lambda'\mu'}] = -i \hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \quad [\hat{\pi}_{\lambda\mu}, \hat{\pi}_{\lambda'\mu'}] = [\hat{\alpha}_{\lambda\mu}, \hat{\alpha}_{\lambda'\mu'}] = 0. \quad (3.175)$$

Енергетичний спектр вібраційних станів, що описується гамільтоніаном (3.174), є еквідистантним і має вигляд

$$E_{vib} = \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{+\lambda} \hbar \omega_\lambda \left(N_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\lambda \geq 2} \hbar \omega_\lambda \left(N_\lambda + \frac{2\lambda + 1}{2} \right), \quad (3.176)$$

де додатні числа $N_\lambda \geq 0$ визначають кількість елементарних збуджень мультипольності λ з характеристичною енергією

$$\hbar\omega_\lambda = \hbar\sqrt{C_\lambda/B_\lambda}. \quad (3.177)$$

Величина $(2\lambda + 1) \hbar\omega_\lambda/2 \equiv E_0$ у співвідношенні (3.176) є енергією нульових коливань і визначає початкову енергію коливань мультипольності λ .

Згідно з квантовою картиною, збудження мультипольності λ з $N_\lambda = 1$ можна трактувати як квазічастинку коливального типу (фонон) зі спіном $I_\lambda = \lambda$ і парністю $(-1)^\lambda$. Стан з $N_\lambda = N$ є виродженим станом з N фононами із значеннями спінів, які знаходять із правил трикутника при векторному додаванні однофоновних спінів ($\vec{I} = \sum^{N_\lambda} \vec{I}_\lambda$) з врахуванням того, що фонони задовільняють статистику Бозе – Ейнштейна (тобто вони нерозрізнені і їх загальна кількість необмежена принципом Паулі).

Розглянемо ядра з квадрупольною динамічною деформацією поверхні ($\lambda = 2$). Тоді спін та парність фонона будуть дорівнювати $I^\pi = 2^+$, а енергетичний спектр має вигляд

$$E_N = \left(N + \frac{5}{2}\right) \hbar\omega_{2^+}, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.178)$$

де, наприклад, для ядра ${}^{114}_{48}\text{Gd}$ енергія $\hbar\omega_{2^+} \cong 0,5$ МеВ. У даному випадку параметр N у формулі (3.178) описує число фононів, кожен з яких має момент кількості руху, що дорівнює двом, та енергію $\hbar\omega_{2^+}$. У основному стані ядра зі спіном $I^\pi = 0^+$ і енергією $E_0 = (5/2)\hbar\omega_{2^+}$ фононів немає ($N = 0$). У першому збудженому стані є один фонон ($N = 1$) і спін стану буде дорівнювати 2^+ , а енергія $E_{N=1} = \hbar\omega_{2^+} + E_0$.

У другому збудженому стані є два фонони ($N = 2$) і тому його енергія дорівнює $E_{N=2} = 2\hbar\omega_{2^+} + E_0$. Обчислимо можливі значення спінів вироджених двофоновних станів. Без врахування тотожності квадрупольних фононів векторне правило додавання моментів кількості руху ($0 \leq I \leq 4$) приводить до таких значень спінів $I = 0, 1, 2, 3, 4$. З цього набору необхідно виключити значення, що пов'язані з можливим подвійним врахуванням тотожних станів. Позначимо m_1 і m_2 проекції на вісь Z моменту кількості руху кожного з двох квадрупольних фононів. Відповідно до правил алгебри кутових моментів, ці проекції можуть набувати значень $0, \pm 1, \pm 2$, а значення проекції спіну двофоновного стану дорівнює $M = m_1 + m_2$. Однофоновні стани, які відрізняються

Таблиця 3.3
Значення проекцій повного кутового моменту M (таблиця Слетера)

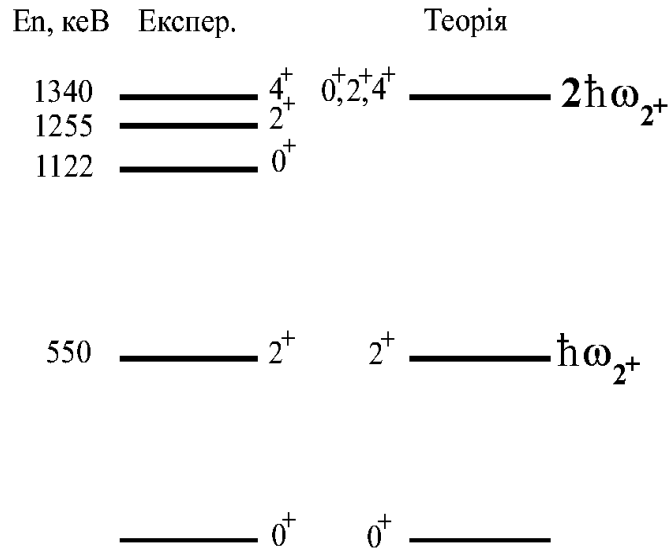
m_1	-2	-1	0	+1	+2
m_2					
-2	-4	-3	-2	-1	0
-1	-3	-2	-1	0	+1
0	-2	-1	0	+1	+2
+1	-1	0	+1	+2	+3
+2	0	+1	+2	+3	+4

обміном проекцій m_1 та m_2 , тотожні і формують один і той же двофононний стан з однаковим значенням M .

Найпростішим способом виключити таке подвійне врахування тотожних станів можна за допомогою так званої таблиці Слетера, в якій вказано всі можливі значення результуючої проекції M . Унаслідок того, що два стани, які відрізняються обміном m_1 і m_2 , є одним і тим же станом, необхідно відкинути значення M , що розташовані нижче діагоналі у таблиці Слетера. Значення на діагоналі відповідають двом фононам, що перебувають у одному і тому ж стані. Такі стани є дозволеними, бо фонони підпорядковуються статистиці Бозе – Ейнштейна. Після виключення значень M , які розташовані нижче діагоналі, отримуємо значення, що відмічені жирним шрифтом у таблиці 3.3. Дозволені величини M можна подати у вигляді трьох наборів: 1) $M = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$; 2) $M = \pm 2, \pm 1, 0$; 3) $M = 0$. Очевидно, що перший набір відповідає спіну $I = 4$, другий – $I = 2$, а третій – $I = 0$.

Таким чином, згідно з моделлю поверхневих коливань, у сферичних ядрах повинен існувати триплет (квадрупольних $\lambda = 2$) вібраційних станів з $I = 0^+, 2^+, 4^+$ з енергією, яка приблизно вдвічі перевищує енергію першого рівня 2^+ . Така ситуація має місце в сферичних парно-парних ядрах. Відповідний приклад показано на рис. 3.13.

Однак необхідно зауважити, що хоча другий збуджений стан для більшості сферичних парно-парних ядер і характеризується значеннями спіну і парності, що дорівнюють значенням $0^+, 2^+$ та 4^+ , але здебільшого збуджені триплетні стани в ядрах не спостерігаються. Загалом таку розбіжність можна пояснити, якщо врахувати вплив неадіабатичності, ангармонічний компонент у вібраційному гамільтоніані, а також можливість флуктуації параметрів B_λ, C_λ унаслідок впливу оболонкових ефектів і парних кореляцій. Для більшості ядер, що мають рівноважну сферичну форму перший збуджений рівень має спін і

Рис. 3.13. Низькоенергетичні вібраційні рівні в ядрі $^{76}_{34}\text{Se}$

парність 2^+ , тобто відповідає колективному вібраційному квадрупольному стану. Енергія $E_{2^+} \equiv E_{N_{2^+}=1}$ цього рівня в середньому зменшується зі зростанням масового числа A . Зокрема, нехтуючи кулонівським компонентом жорсткості, маємо згідно адіабатичній узагальненій моделі, що використовує гідродинамічні вирази для параметрів,

$$E_{2^+}^{(hydr)} \equiv \hbar\omega_{2^+}^{(hydr)} = \hbar \sqrt{\frac{C_{\lambda}^{(hydr)}}{B_{\lambda}^{(hydr)}}} \simeq A^{-1/2}. \quad (3.179)$$

Цей ефект зменшення середнього значення енергії E_{2^+} у сферичних парно-парних ядрах із зростанням масового числа спостерігається експериментально (Рис. 3.14), але з іншою залежністю від кількості нуклонів. Для не дуже важких ядер маємо систематику

$$E_{2^+}^{(exp)} \simeq 30 A^{-2/3}. \quad (3.180)$$

Середні значення енергій квадрупольних станів ядер з довільною деформацією приблизно у п'ять разів менші за гідродинамічні значення.

Загалом коливальну модель з гамільтоніаном (3.174) гармонічного осцилятора можна використовувати для якісного аналізу середні властивостей найнижчих збуджених вібраційних станів у парно-парних сферичних ядрах.

В деформованих ядрах також можливі коливання поверхні навколо рівноважної (несферичної) форми. Якщо у сферичних ядрах коливання мультипольності $\lambda \in (2\lambda + 1)$ -разів вироджені і спін однофононних збуджень співпадає з

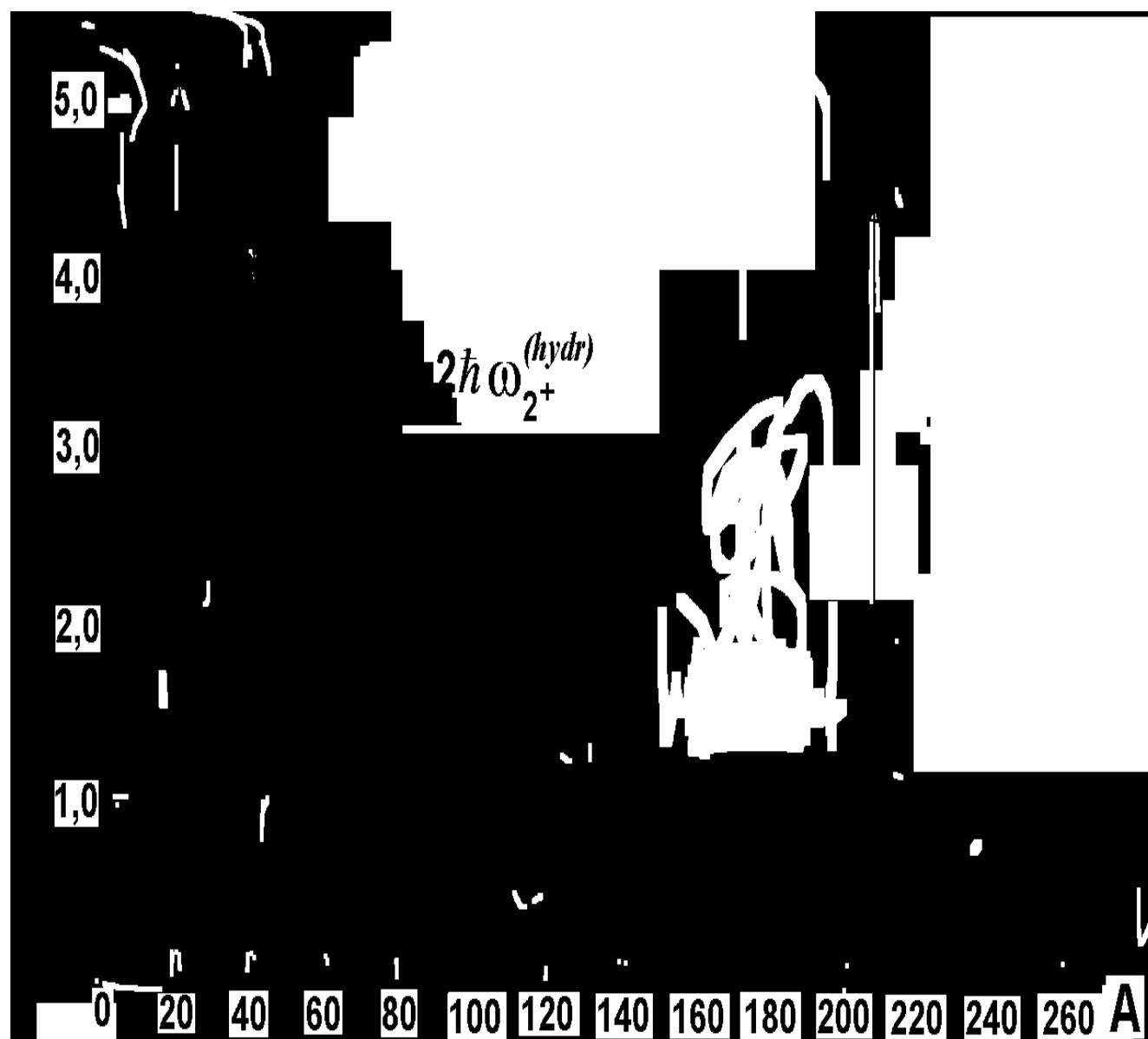


Рис. 3.14. Експериментальні значення енергій квадрупольних вібраційних станів

мультипольністю коливань, то у деформованих ядрах виродження знімається, тобто можливі поверхневі коливання однакової мультипольності λ з різними енергіями, і стани не можливо класифікувати на мові фононів. Вперше вібраційні коливання в квадрупольно-деформованих ядрах дослідили у адіабатичному наближенні Бор і Моттelson. Вони розглядали стани з енергією меншою за енергію одночастинкових збуджень і вважали, що ядро в основному стані є аксіально-симетричним ($\beta_0 \neq 0, \gamma_0 = 0$), а коливальні стани обумовлені малими відхиленнями параметрів β, γ від рівноважних значень β_0, γ_0 . Після квантування виразу (3.143) для енергії коливань класичної краплини вібраційний гамільтоніан, що описує малі квадрупольні коливання деформованого ядра, був отриманий у вигляді двох компонентів:

$$\hat{H}_{vib} = \hat{H}_{vib}^{\beta} + \hat{H}_{vib}^{\gamma}, \quad (3.181)$$

де перший доданок відповідає поздовжнім аксіально-симетричним коливанням (β -коливання):

$$\hat{H}_{vib}^{\beta} = -\frac{\hbar^2}{2\bar{B}_{\beta}\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{2} \bar{C}_{\beta} (\beta - \beta_0)^2, \quad (3.182)$$

а $\hat{H}_{vib}^{\gamma}$ – гамільтоніан поперечних коливань, що порушують аксіальну симетрію ядра (γ -коливання),

$$\hat{H}_{vib}^{\gamma} = -\frac{\hbar^2}{2\bar{B}_{\beta}\beta_0^2} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) - \frac{K^2}{4\gamma^2} \right] + \frac{1}{2} \beta_0^2 \bar{C}_{\gamma} \gamma^2. \quad (3.183)$$

Тут $\bar{C}_{\beta}, \bar{C}_{\gamma}$ – параметри жорсткості згідно (3.143) для β - і γ -коливань, відповідно; K – проекція повного кутового моменту ядра на внутрішню вісь симетрії (Z').

В деформованих ядрах кутовий момент коливань не співпадає з повним кутовим моментом через наявність оберտального кутового моменту (див. § 3.10). Тому в деформованих ядрах кутовий момент коливань окремо не зберігається, але зберігається його проекція на внутрішню вісь симетрії, так як вона збігається з проекцією K повного кутового моменту. Останнє обумовлено рівністю нулю проекції оберտального моменту на внутрішню вісь симетрії в аксіально-симетричних ядрах. Коливання, що пов'язані зі зміною β (β -коливання), зберігають аксіальну симетрію ядра. Вони не створюють оберտального моменту з компонентом уздовж осі симетрії і тому їм відповідають стани з проекціями

$K^\pi = 0^+$. Коливання, що пов'язані із зміною γ (тобто $\beta_{2,\pm 2}$) звуться гамма-коливаннями, їм відповідають стани з $K^\pi = 2^+$. При гамма-коливаннях аксіальна симетрія ядра порушується. Енергія вібраційних станів аксіально-деформованого ядра складається з двох компонентів:

$$E_{vib} = E_{vib}^\beta + E_{vib}^\gamma, \quad (3.184)$$

де E_{vib}^β – енергія β -коливань з $K^\pi = 0^+$,

$$E_{vib}^\beta = \left(n_\beta + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_\beta, \quad \omega_\beta = \sqrt{\bar{C}_\beta / B_2}, \quad n_\beta = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.185)$$

а E_{vib}^γ – енергія γ -коливань з $K^\pi = 2^+$,

$$E_{vib}^\gamma = \left(2n_\gamma + 1 + \frac{|K|}{2}\right) \hbar\omega_\gamma, \quad \omega_\gamma = \sqrt{\bar{C}_\gamma / B_2}, \quad n_\gamma = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.186)$$

3.10. Ротаційні стани ядер

Якщо розглянути рух власної системи координат відносно лабораторної, то в адіабатичному наближенні гамільтоніан системи буде мати вигляд суми вібраційного гамільтоніана вигляду (3.174) та ротаційного гамільтоніана $\hat{H}_{rot}$, що збігається з оператором $\hat{T}_{rot}$ кінетичної енергії обертання системи (§3.7). Оператор $\hat{T}_{rot}$ залежить лише від кутового моменту $\vec{R}$ обертання ядра як цілого. У краплинковій моделі ядра одночастинковий рух нуклонів не враховується і тому обертальний момент $\vec{R}$ збігається з повним моментом кількості руху $\vec{I}$. В узагальненій моделі ядра одночастинковий рух нуклонів враховується і повний момент $\vec{I}$ складається з моменту обертання $\vec{R}$ та внутрішнього кутового моменту $\vec{J}$, що обумовлений одночастинковим рухом нуклонів у деформованій потенціальній ямі (рис. 3.15): Оскільки зберігається лише повний момент, то момент обертального руху може зберігатися лише при нульовому внутрішньому моменті.

Зазвичай ротаційний компонент $\hat{H}_{rot}$ гамільтоніану узагальненої моделі ядра ототожнюють з компонентом оператора обертання T_{rot} (§ 3.7), що не залежить від квадрату внутрішнього кутового моменту: $\hat{H}_{rot} = \hat{T}_{rot}(\vec{R} \simeq \vec{I})$. Інші компоненти оператора обертання відносять до внутрішнього гамільтоніану, $\hat{H}_{int}$, та до взаємодії Каріоліса $\hat{H}_{corr}$, що визначає вплив обертання на одночастинковий

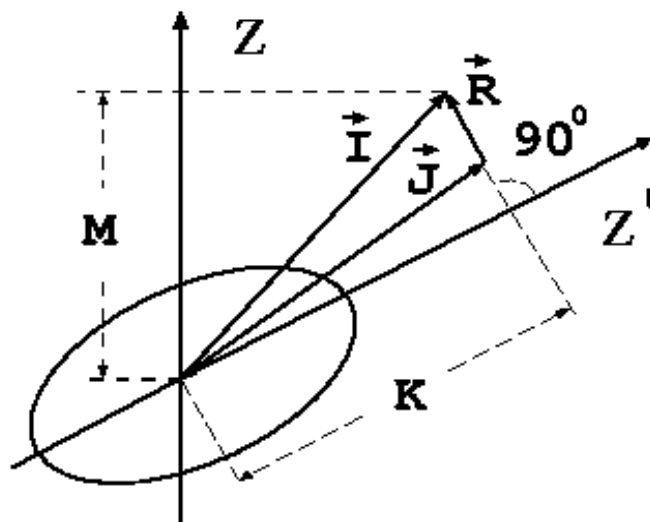


Рис. 3.15. Схема зв'язку кутових моментів для витягнутого еліпсоїда ($\beta_2 > 0$)

рух. Як колективні координати, що описують обертальні (ротаційні) рухи ядра, використовують три кути Ейлера $\{\theta_\alpha\} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Як відмічалось в § 3.7, ці кути описують взаємну орієнтацію лабораторної (нерухомої) системи декартових координат $\mathcal{K}(X, Y, Z)$ відносно власної (рухомої) системи $\mathcal{K}'(X', Y', Z')$.

$$\vec{I} = \vec{R} + \vec{J}, \quad \vec{R}^2 = \vec{I}^2 + \vec{J}^2 - 2\vec{I}\vec{J}. \quad (3.187)$$

У багатьох випадках можна припустити, що ядро є аксіально-симетричним і має форму еліпсоїда. Прикладом можуть бути ядра рідкісноземельних елементів ($155 < A < 190$) та актиноїдів ($225 < A < 250$), яким наближено можна приписати таку форму, оскільки їхні квадрупольні моменти додатні (див. § 1.7). В таких ядрах проекція $I_{z'} = K$ повного моменту I на вісь симетрії є константою руху, а кутовий момент обертання R є перпендикулярним до осі симетрії. Схема зв'язку кутових моментів, у випадку обертання ядра з поверхнею у вигляді витягнутого еліпсоїда ($\beta_2 > 0$), показана на рис. 3.15. Таке ядро обертається навколо осі, що перпендикулярна осі симетрії і схема його обертання наведена на рис. 3.16.

Аксіально-симетричне ядро є інваріантним відносно обертання навколо осі симетрії (рис. 3.16 (а)). З міркувань квантової механіки обертання навколо цієї осі відсутнє, так як воно нічого не може змінити у даній системі і неможливо ввести ніяких умов квантування колективного руху, що привели б до зміни енергії. Але таке ядро є не інваріантним стосовно обертань навколо осі, що лежить у площині $X'OY'$ (рис. 3.16 (б)). Це дає змогу ввести відповідні умови кван-

тування і визначити ротаційну енергію. При обертанні аксіально-симетричне ядро по черзі приймає або вигляд (1), або (2), які зображені на рис. 3.16 (б), і проекція його кутового моменту на вісь симетрії дорівнює нулю: $R_{z'} = 0$. Такий розгляд обертань повністю узгоджується з описом за краплинною моделлю ядра (див. ф. (3.144)).

Повна хвильова функція Ψ_M^I ядра з фіксованими значеннями повного кутового моменту та його спіну є суперпозицією D -функцій Вігнера,

$$\Psi_M^I = \sum_K \varphi_K(q) D_{MK}^I(\{\theta_\alpha\}), \quad (3.188)$$

де функції $\varphi_K(q) \propto \chi \varphi_{vib}$ описують внутрішній та вібраційний рух у ядрі, що обертається з повним кутовим моментом I . Функції Вігнера D_{MK}^I описують поворот системи координат у тривимірному просторі і є власними функціями операторів $\hat{I}^2$, $\hat{I}_z$, $\hat{I}_{z'}$ з власними значеннями I , M , K , відповідно (див. ф. (3.106) – (3.109)).

Ядро з формою еліпсоїда обертання є дзеркально-симетричним відносно площини $X'OY'$ (рис. 3.15, 3.16), що перпендикулярна до вісі симетрії ядра і проходить через його центр, тобто є інваріантним відносно обертання на 180° навколо осі X' або Y' . За таких обертань узагальнені сферичні функції перетворюються за законом $D_{MK}^I \Rightarrow (-1)^{I+K} D_{M-K}^I$. У наслідок інваріантності, внутрішні стани такого ядра є виродженими за знаком проекції K і хвильовим функціям $\varphi_K(q)$, $\varphi_{\bar{K}}(q)$, що описують внутрішні стани зі значеннями проекцій K та $-K$, відповідає однакова енергія. Тому повна нормована хвильова функція, що є суперпозицією функцій станів з різними знаками K , приймає наступний вигляд

$$\Psi_M^I = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2(2-\delta_{K,0})}} \times [D_{MK}^I(\{\theta_\alpha\}) \varphi_K(q) + (-1)^{I+K} D_{M-K}^I(\{\theta_\alpha\}) \varphi_{\bar{K}}(q)]. \quad (3.189)$$

За даного значення проекції K , що визначається властивостями внутрішнього стану ядра, можливі обертальні енергетичні рівні з різними значеннями повного спіну I . Дійсно, оскільки величина K є проекцією цього спіну, то її значення не можуть перевищувати величини спіну, $|K| \leq I$, і тому:

$$I = |K|, \quad |K| + 1, \quad |K| + 2, \quad \dots \quad (3.190)$$

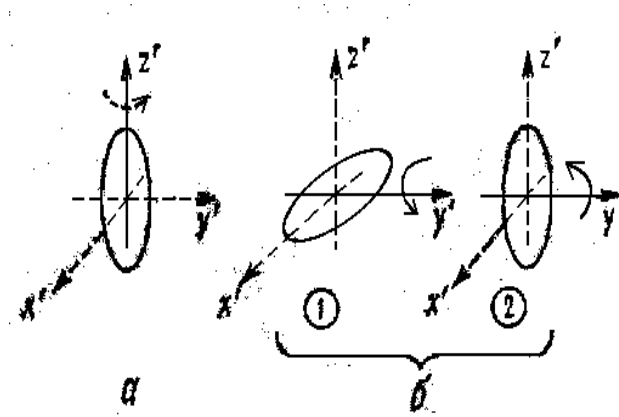


Рис. 3.16. Схема обертання ядра з поверхнею у вигляді витягнутого еліпсоїда; Z' – вісь симетрії

Кожен з рівнів ротаційної смуги розрізняється тільки характером ("швидкістю") обертального руху і має однакову внутрішню структуру, що визначається функцією $\varphi_K(q)$. Набір можливих значень спінів у смугі залежить від співвідношення між внутрішніми хвильовими функціями φ_K і $\varphi_{\bar{K}}$. При $K = 0$ ці функції співпадають з точністю до фазового множника $r = \pm 1$: $\varphi_{\bar{K}} = r \varphi_K$. Тому хвильова функція (3.189) буде відмінною від нуля лише за умови $r(-1)^I = 1$. Таким чином, при $K = 0$ ядро може мати тільки такі значення спінів, які задовільняють умові $(-1)^I = r$, і в цьому випадку можливі дві ротаційні смуги парності $\pi = r$:

$$\begin{aligned} I &= 0^+, \quad 2^+, \quad 4^+, \quad \dots, \quad r = \pi = +1; \\ I &= 1^-, \quad 3^-, \quad 5^-, \quad \dots, \quad r = \pi = -1, \end{aligned} \quad (3.191)$$

які відповідають парним та непарним станам. Нормована хвильова функція при $K = 0$ має вигляд

$$\Psi_M^I = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{M0}^I(\{\theta_\alpha\}) \varphi_{K=0}(q) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} Y_{IM}(\theta, \varphi) \varphi_K(q). \quad (3.192)$$

Енергії обертальних рівнів (ротаційні спектри) можна обчислити за допомо-

гою співвідношень ($\mathcal{F}$ – момент інерції ядра)

$$\begin{aligned} E_I &= \frac{\hbar^2}{2\mathcal{F}} I(I+1), & K &= 0; \\ E_I &= \frac{\hbar^2}{2\mathcal{F}} [I(I+1) - K(K+1)], & K &> \frac{1}{2}; \\ E_I &= \frac{\hbar^2}{2\mathcal{F}} \left[I(I+1) + a_p (-1)^{I+\frac{1}{2}} \left(I + \frac{1}{2} \right) \right], & K &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.193)$$

де коефіцієнт a_p – параметр "розв'язування", що виникає за рахунок доданка $2\vec{I}\vec{J}$ у формулі (3.187). Значення a_p залежить від спіну $\vec{I}$ ядра та від ймовірностей знаходження нуклонів у одночастинкових станах з фіксованими значеннями кутових моментів. Момент інерції $\mathcal{F}$ обчислюється аналогічно краплинній моделі ядра (див.ф.(3.144)) відносно внутрішніх осей $X' Y'$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{X'} = \mathcal{F}_{Y'}. \quad (3.194)$$

У парно-парних ядрах найнижчою є так звана основна ротаційна смуга з $K = 0$ та додатною парністю. Їй відповідають значення спінів $I = 0, 2, 4, \dots$ і згідно з (3.193) для енергій обертальних рівнів виконується співвідношення

$$E_2 : E_4 : E_6 : E_8 : E_{10} : \dots = 1 : \frac{10}{3} (= 3,33) : 7 : 12 : \frac{55}{3} (= 18,33) : \dots, \quad (3.195)$$

яке називають правилом інтервалів для основної ротаційної смуги. Співвідношення (3.195) виконується у сильно деформованих ядрах рідкісноземельних елементів ($155 < A < 190$) і актиноїдах ($225 < A < 250$).

У деформованих ядрах з непарним масовими числами обертальні спектри відповідають значенням $K \neq 0$. Якщо $K \neq 1/2$, то згідно з (3.193) спін основного стану $I_0 = K$, так як ротаційна енергія у цьому стані дорівнює нулю, $E_{I_0} = 0$. Значення спінів окремих станів смуги дорівнюють $I_0, I_0 + 1, I_0 + 2, \dots$ і для відношення енергій збудження з спінами $I_0 + 2, I_0 + 1$ маємо

$$E_{I_0+2}/E_{I_0+1} = 2 + \frac{1}{I_0 + 1}. \quad (3.196)$$

Це співвідношення дозволяє експериментально визначити спіни I_0 основного стану ядра. Наприклад, для ядра $^{181}_{73}\text{Ta}$ маємо $E_{I_0+1} = 136,2$ кеВ, $E_{I_0+2} = 303$ кеВ. Тому $E_{I_0+2}/E_{I_0+1} = 2,23$ і спіни основного стану дорівнює $I_0 = 1/0,23 - 1 = 3,3478$

$= 7/2$. Користуючись експериментальними даними щодо спектрів і формулами (3.193), можна визначити момент інерції $\mathcal{F}$ аксіально-симетричного ядра. Теоретичні значення $\mathcal{F}$ суттєво залежать від внутрішньої структури ядра і можуть бути обчислені у тій чи іншій моделі. У моделі твердого тіла з еліпсоїдальною формою момент інерції $\mathcal{F}$ має вигляд (див.ф.(3.137))

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_{rig} &= \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') (x'^2 + z'^2) = \frac{Am}{5} (R_{X'}^2 + R_{Z'}^2) = \\ &= \frac{2}{5} Am R_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 + \frac{25}{32\pi} \beta_2^2 \right),\end{aligned}\quad (3.197)$$

де Am – маса ядра.

Якщо ядро розглядати як еліпсоїдальну ємність з ядерною рідиною, то при потенціальному безвихровому русі рідини (див.ф.(3.133))

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_{hydr} &= \frac{Am}{5} \frac{(R_{Z'}^2 - R_{X'}^2)^2}{R_{Z'}^2 + R_{X'}^2} = \\ &= \frac{9Am}{4\pi} R_0^2 \beta_2^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 \right)^2}{\left(2 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 + \frac{25}{16\pi} \beta_2^2 \right)}.\end{aligned}\quad (3.198)$$

У формулах (3.197) і (3.198) $R_{a'}$ – головні півосі ядра (див.ф.(3.120)):

$$R_{X'} = R_{Y'} = R_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 \right), \quad R_{Z'} = R_0 \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 \right). \quad (3.199)$$

Відношення моментів інерції, обчислене у гідродинамічній та твердотільній моделях ядра, при малих деформаціях має вигляд

$$\frac{\mathcal{F}_{hydr}}{\mathcal{F}_{rig}} \approx \frac{45}{16\pi} \beta_2^2 \approx 0,9 \beta_2^2, \quad \beta_2 \ll 1. \quad (3.200)$$

Емпіричні значення моментів інерції, отримані підгонкою експериментальних спектрів за допомогою формул (3.193), лежать між значеннями, які передбачені моделлю твердого тіла (3.197) і краплинною моделлю (3.198). Зокрема,

у низькоенергетичних станах з $I \leq 4 \div 6$, експериментальні значення $\mathcal{F}_{exp}$ приблизно удвічі менші ніж $\mathcal{F}_{rig}$ і в п'ять разів більші ніж величини $\mathcal{F}_{hydr}$:

$$\mathcal{F}_{exp} \approx 0,5 \mathcal{F}_{rig} \approx 5 \mathcal{F}_{hydr}. \quad (3.201)$$

Зменшення моменту інерції порівняно з твердотільним значенням обумовлено ефектами спарювання нуклонів, що приводить до зменшення (майже удвічі) ефективної кількості частинок у системі.

Слід зазначити, що формули (3.193) були отримані за умови незалежності моменту інерції від повного кутового моменту ядра I . Насправді така залежність існує, бо у процесі обертання ядро розтягується внаслідок дії відцентрових сил, що призводить до збільшення моменту інерції. Тому енергію обертання при великих значеннях I , і $K \neq 1/2$ можна апроксимувати формулою

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{F}} I(I+1) - B[I(I+1)]^2, \quad B > 0. \quad (3.202)$$

Відхилення від закону $I(I+1)$ виявляються більш виразно, якщо замість залежності енергії E_I від $I(I+1)$ вивчати залежність параметру $\tilde{\mathcal{F}}$, якій є аналогом моменту інерції ротатора класичної механіки, від аналога квадрата частоти обертання ω . Такі величини можна обчислити з експериментальних даних різними способами, що мають збігатися у випадку великих значень кутових моментів, де параметри $\tilde{\mathcal{F}}$ і ω мають вищезгадану класичну інтерпретацію. Зазвичай параметр $\tilde{\mathcal{F}}$ і енергію $\hbar\omega$ визначають за формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} &= \frac{[I(I+1) - (I-2)(I-1)]}{E_I - E_{I-2}} = \frac{(2I-1)}{E_I - E_{I-2}}, \\ \hbar\omega &= \frac{E_I - E_{I-2}}{2}. \end{aligned} \quad (3.203)$$

Так обчислена величина $\tilde{\mathcal{F}}$ збігається з моментом інерції $\tilde{\mathcal{F}}_{cl} = \tilde{\mathcal{F}}\hbar^2$ (в одиницях $\hbar^2$) ротатора з енергією

$$E_I = \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2\tilde{\mathcal{F}}_{cl}}, \quad (3.204)$$

яка за великих значень кутового моменту $I_{cl} \equiv \hbar I \gg 1$ збігається з енергією обертання ротатора класичної механіки

$$E_{cl} = \frac{I_{cl}^2}{\tilde{\mathcal{F}}_{cl}} = \frac{I_{cl} \omega_{cl}}{2}$$

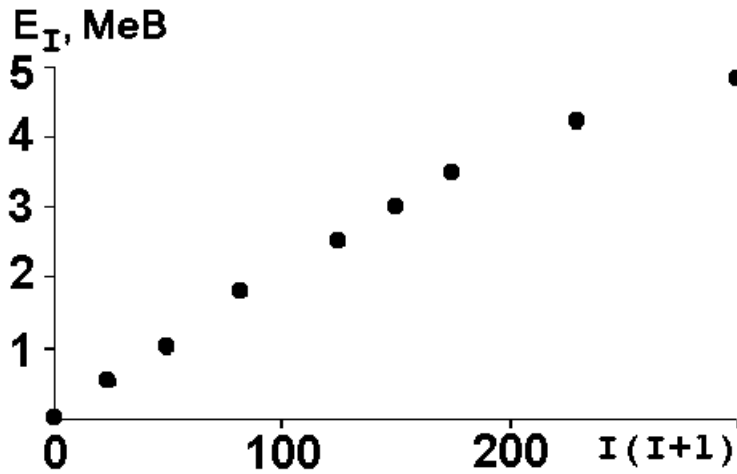


Рис. 3.17. Залежність енергії E_I від $I(I+1)$ для основної оберальної смуги ядра ^{158}Er

з частотою обертання ω_{cl} . Величина ω є аналогом частоти ω_{cl}

$$\omega = \frac{2I-1}{2\hbar\tilde{\mathcal{F}}} \approx \frac{I}{\hbar\tilde{\mathcal{F}}} = \frac{I_{cl}}{\tilde{\mathcal{F}}_{cl}} = \omega_{cl} \equiv \frac{\partial E_{cl}}{\partial I_{cl}}, \quad (3.205)$$

З виразів (3.203) випливає таке співвідношення між $2\tilde{\mathcal{F}}$ і $(\hbar\omega)^2$:

$$2\tilde{\mathcal{F}} = a_I (\hbar\omega)^2, \quad (3.206)$$

де $a_I = (2\tilde{\mathcal{F}})^3 / (2I-1)^2$.

Експериментальні дані для основної оберальної смуги ядра ^{158}Er показано на рис. 3.17 у вигляді залежності E_I від $I(I+1)$, а на рис. 3.18 у вигляді залежності величини $2\tilde{\mathcal{F}} \equiv 2\mathcal{F}/\hbar^2$ від $(\hbar\omega)^2$. При невеликих значеннях спіну $I \leq 10$, як видно з рис. 3.18, момент інерції ядра ^{158}Er плавно (майже лінійно) збільшується зі зростанням квадрата частоти обертання: $a_I \approx \text{const}$ і $\tilde{\mathcal{F}} \simeq (2I-1)^{2/3}$. При $I > 10$ момент інерції збільшується настільки швидко, що частота обертання ядра зменшується і це призводить до відхилення кривої у протилежний бік. Такий вид залежності моменту інерції $\tilde{\mathcal{F}}$ від квадрата частоти називають ефектом бекбендінга (від англ. backbending – зворотний загін). Цей ефект зумовлений значною перебудовою внутрішньої структури ядра при великих кутових моментах.

Співвідношення (3.193) визначають ротаційний енергетичний спектр несферичного ядра у разі, коли воно розглядаються як аксіально-симетричний ротатор. Такий енергетичний спектр не завжди узгоджується з експериментальними даними. У багатьох випадках цю невідповідність можна усунути припустивши, що ядро має форму тривісного еліпсоїда (з ротаційною енергією вигля-

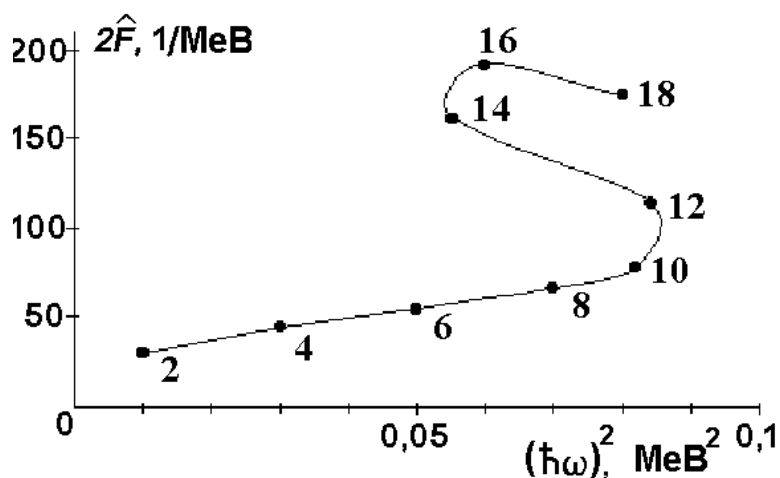


Рис. 3.18. Залежність ефективного моменту інерції від $(\hbar\omega)^2$ для основної ротаційної смуги ядра ^{158}Er

ду (3.129)), обертання якого і визначають ротаційний спектр ядра. Такий підхід, запропонований і розроблений О.С.Давидовим, Г.Ф.Філіпповим (1958 р.) і Давидовим, Чабаном (1960 р.), дав змогу феноменологічно описати багато закономірностей спектрів збуджених станів парно-парних ядер. Зокрема, спектр збуджених станів неаксіального ротатора має такі характерні особливості.

1. Існують так звані "аномальні" смуги обертання, яких немає в моделі аксіально-симетричного ядра і які пов'язані з можливістю обертань навколо різних осей еліпсоїда. В таких смугах одночасно присутні стани з парними та непарними значеннями спінів: перша аномальна смуга утворюється рівнями зі спінами 2, 3, 4, 5, 6, ...; друга — рівнями зі спінами 4, 5, 6, 7, ...; третя — рівнями за спінами 6, 7, ..., тощо. Стан зі спіном 2 першої аномальної смуги розташований або вище (при значенні параметру неаксіальності $\gamma < 22^\circ$), або нижче (при $\gamma > 23^\circ$) ніж стан зі спіном 4 в основній ротаційній смузі. Рівень зі спіном 3 завжди лежить вище рівня зі спіном 4 основної ротаційної смуги.

2. У неаксіальному ядрі змінюється правило інтервалів (3.195). Наприклад, якщо $\gamma = 30^\circ$, то рівні основної ротаційної смуги неаксіального ядра задовільняють таке правило інтервалів:

$$E_2 : E_4 : E_6 : E_8 : E_{10} : \dots = 1 : 2,67 : 5 : 8 : 11,67 : \dots$$

Необхідно відмітити, що при неадіабатичному розгляді збуджень аномальні ротаційні смуги неаксіального ротатора насправді є складними ротаційно-вібраційними збудженнями (І.Фесслер, В.Грайнер, 1962-64pp). Хоча у природі майже не існує ядер з властивостями жорсткого ротатора, але завдяки своїй простоті моделі

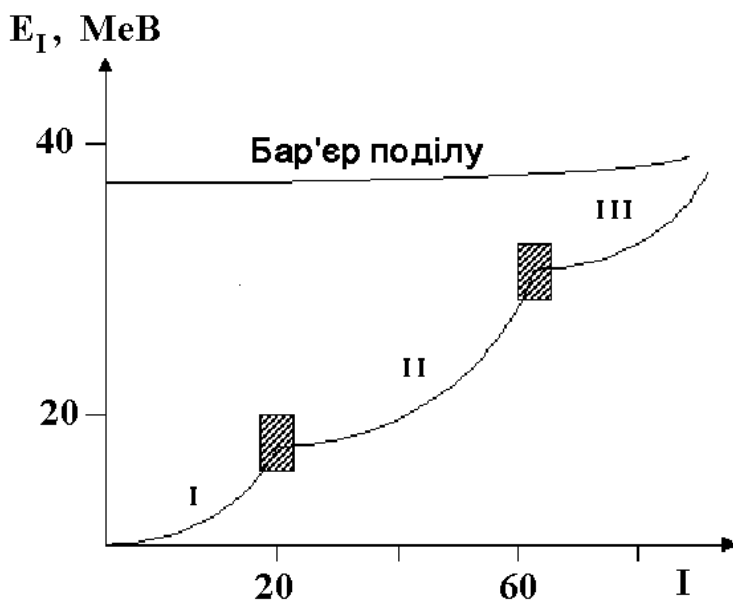


Рис. 3.19. Залежність обертальної енергії від спіну I в області рідкісноземельних ядер

Давидова–Філіппова і Давидова–Чабана й зараз використовуються експериментаторами для інтерпретації властивостей різних станів ядер.

Останнім часом у реакціях з важкими іонами інтенсивно досліджувалася залежність обертальної енергії ядер від спінів у широкому інтервалі їх значень і вивчалися надобертові ядра, тобто ядра у станах з великими значеннями спінів. Схематичне зображення узагальненої кривої такої залежності для ядер рідкісноземельних елементів ілюструє рис. 3.19. При невеликих значеннях $I \leq 15 \div 20$ (область I) ядро має форму витягнутого еліпсоїда обертання з моментом інерції, величина якого залежить від парних кореляцій надплинного типу (див.ф.(3.201)). Із збільшенням I відцентрові та коріолісові сили призводять до руйнування в ядрах парних кореляцій і при $I \geq 20 \div 25$ відбувається перехід ядерної речовини з надплинного стану в нормальний. Ядро набирає форми тривісного еліпсоїда, а моменти інерції збільшуються до своїх твердотільних значень (область II). В області III ($I > 60$) ядро дуже сильно обертається, дуже сильно деформоване і має форму сплюснутого еліпсоїда обертання. Така форма енергетично вигідніша при великих значеннях спінів I порівняно з випадком витягнутого еліпсоїда.

Ламану криву на рис. 3.19, що відповідає енергії обертання ядра за даного значення спіну, називають іраст-лінією (від шведського прикметника "yr", найвищий ступінь якого "yrast" означає запоморочливий, приголомшений). Оскільки повна енергія ядра має бути більшою або дорівнювати обертальній енергії

$E \geq E_I$, то іраст-лінія відповідає нижній межі можливих енергетичних станів ядра з фіксованим значенням спіну I . Тобто вздовж іраст-лінії ядра холодні, бо вся енергія, що перевищує енергію основного стану, відповідає енергії обертання ядра. Нижче іраст-лінії збуджених ядерних станів немає.

При $I \geq 85 \div 100$ ядро стає нестійким щодо поділу на уламки. Це і є максимальні можливі значення спіну ядра. На рис. 3.19 верхня крива відповідає бар'єру поділу ядра. При енергіях, які лежать вище цієї кривої ядро ділиться. Отже всі можливі збуджені енергетичні стани ядер лежать між іраст-лінією і кривою бар'єра поділу.

У цілому за допомогою узагальнених моделей різного типу (зі слабкою і сильною взаємодією нуклонів з остовом) вдається пояснити як спектри низько розміщених рівнів, так і великі значення квадрупольних моментів ядер.

3.11. Гігантські резонанси та їх інтерпретація

Крім вібраційних станів з низькими енергіями, зумовлених коливаннями нуклонів поверхні ядра, існують також й інші типи колективних збуджень, які спричинені різними зміщеннями значних груп нейтронів відносно протонів. У таких коливаннях може брати участь велика кількість нуклонів і тому їхні коефіцієнт жорсткості та енергія будуть значно більшими ніж при поверхневих коливаннях, у яких беруть участь лише нуклони, що розташовані біля поверхні ядра. Високоенергетичні колективні стани зазвичай називають гігантськими резонансами, оскільки вони приводять до кривої резонансного виду для ймовірності процесу поглинання гамма-квантів ядрами. Максимум резонансної кривої фотопоглинання сферичним ядром відповідає енергії E_r гігантського резонансу, а її ширина обумовлена зв'язком гігантського резонансу з іншими станами ядра і є шириною Γ_r розпаду, що визначає ймовірність ($w_r = \Gamma_r/\hbar$) його розпаду.

Уперше явище гігантського резонансу було відкрито при дослідженні поглинання електричних дипольних гамма-квантів і тому відповідний збуджений стан ядра отримав назву гігантського дипольного резонансу (ГДР). Енергії гігантських дипольних резонансів лежать в інтервалі від ≈ 20 МеВ для легких ядер до ≈ 14 МеВ для важких, а ширини – відповідно в межах від ≈ 7 до ≈ 4 МеВ.

Електричний дипольний момент залежить від зміщень координат усіх протонів відносно нейтронів, тому гігантський дипольний резонанс можна інтерпретувати як колективний стан, що пов'язаний з одночасними коливаннями

всіх протонів відносно всіх нейтронів.

Першу колективну модель, яка якісно описала явище резонансного поглинання електричного дипольного випромінювання, запропонував А.Б.Мігдал (1944 р.). У цій моделі ядро розглядалося як сукупність взаємно проникливих стисливих протонної і нейтронної рідин. Зовнішнє електричне поле викликає коливання протонної рідини відносно нейтронної і зміну їх густин. Ядро, таким чином, веде себе як осцилятор, вимушені коливання якого збуджуються зовнішнім електричним полем. Резонанс в ймовірності поглинання гамма-квантів виникає тоді коли частота ω зовнішнього електричного поля збігається з власною частотою $\omega_r = E_r/\hbar$ осцилятора.

Мігдал уперше розглянув вимушені коливання нейтронів відносно протонів. Енергії власних коливань пізніше розглянули Гольдхабер і Теллер (1948 р.), проаналізувавши два можливих варіанти колективних рухів протонів відносно нейтронів, які можуть приводити до формування гігантського дипольного резонансу з енергіями, що зменшуються зі зростанням A (див.Рис.3.20).

1. Протони і нейтрони розглядаються як дві рідини. Припускається, що нуклони на поверхні ядра займають фіксоване положення. Коливання протонів і нейтронів відбуваються тільки всередині ядра і означають зміну густин протонної і нейтронної рідин. У цьому випадку сила пружності коливань на одиницю маси буде пропорційною градієнтам змін густин рідин нуклонів. Для такого зміщення всередині ядра максимальна зміна густини є обернено пропорційною радіусу ядра R_0 , а тому градієнт і сила пружності будуть пропорційними $1/R_0^2$. Таким чином, частота, що при гармонічних коливаннях має змінюватися як квадратний корінь з сили пружності, буде пропорційною $1/R_0$, тобто буде обернено пропорційною кубічному кореню з маси ядра: $\omega_r = E_r/\hbar \sim A^{-1/3}$. У подальшому ця гідродинамічна модель ядра була розвинута Штейнведелем і Йенсеном (1950 р.) і отримала назву моделі Штейнведеля – Йенсена.

2. У другій моделі, яка пізніше отримала назву моделі Гольдхабера – Теллера, припускається, що колективні відносні коливання протонів і нейтронів у ядрі можна розглядати як коливання двох нестисливих і взаємопроникливих сфер. Біля поверхні ядра протонна і нейтронна сфери зміщуються одна відносно другої на деяку відстань $x < a$, де a – радіус дії ядерних сил і тому сили пружності будуть силами, що обумовлені взаємодією зміщених частин протонної і нейтронної сфер з нуклонами внутрішньої частини ядра.

Резонансна частота ω_r осцилятора, як відомо, може бути визначена за фор-

мулою

$$\omega_r = \sqrt{k/M}, \quad (3.207)$$

де k – коефіцієнт пружності, M – маса осцилятора. При малих зміщеннях x кількість (оголених) нуклонів, що не перетинаються, а отже відповідно і коефіцієнт пружності пропорційні поверхні ядра, тобто R_0^2 . Маса ядра пропорційна R_0^3 , тому маємо

$$E_r = \hbar\omega_r = \hbar\sqrt{\frac{k}{M}} = \text{const}\sqrt{\frac{R_0^2}{R_0^3}} = \text{const} A^{-1/6}. \quad (3.208)$$

Дотримуючись розгляду Гольдхабера і Теллера, знаходимо значення константи в цьому виразі з умови рівності при $x = a$ потенціальної енергії $U_G(x)$ зміщення нуклонів з положення рівноваги і мінімальної енергії $U_D(x)$, необхідної для роз'єднання нуклонів, які зміщуються при коливаннях. Якщо зміщення протонної рідини відносно нейтронної незначне і менше радіуса дії ядерних сил ($x < a$), то на кожний нуклон діє пружна сила повернення, що пропорційна x . Тому потенціальна енергія зміщення нуклонів з положення рівноваги визначається виразом

$$U_G(x) = kx^2/2. \quad (3.209)$$

При $x \gg a$ кількість повністю роз'єднаних нуклонів дорівнює $2\pi R_0^2 \rho_0 x/m$, де m – маса нуклона; ρ_0 – густина протонів і нейтронів (вважаємо, що їх густини однакові). Якщо U_0 – глибина ядерного потенціалу притягання, то енергія, необхідна для роз'єднання нуклонів, буде дорівнювати

$$U_D(x) = \frac{2\pi R_0^2 \rho_0 x}{m} U_0. \quad (3.210)$$

З умови рівності виразів (3.209) і (3.210) при $x = a$ ($U_G(a) = U_D(a)$) знаходимо

$$k = \frac{4\pi R_0^2 \rho_0 U_0}{a m}.$$

Оскільки маса ядра M дорівнює $\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0$ і $R_0 = r_0 A^{1/3}$, то отримуємо

$$E_r \equiv E_{GT} = \hbar\sqrt{\frac{k}{M}} = \hbar\sqrt{\frac{3V_0}{aR_0 m}} =$$

$$= \hbar \sqrt{\frac{3V_0}{a r_0 m}} A^{-1/6} \simeq 45 A^{-1/6} (\text{MeV}), \quad (3.211)$$

де були використані такі значення констант: $r_0 = 1,2$ фм, $a = 2$ фм і $V_0 = 40$ МеВ.

Відповідно до першої моделі колективного руху нуклонів у ядрах, енергія гігантського дипольного резонансу пропорційна $A^{-1/3}$, а згідно з другою – енергія E_r залежить від масового числа як $A^{-1/6}$. Оскільки у свій час експериментальних даних було мало і з ними найкраще узгоджувалася залежність $E_r \sim A^{-1/6}$, то Гольдхабер і Теллер віддали перевагу другій моделі, у межах якої знайшли аналітичний вираз (3.211) для енергії гігантського резонансу. Подальші експериментальні дослідження показали, що в середніх і важких ядрах залежність енергії E_r від масового числа майже пропорційна $A^{-1/3}$, тому необхідно детально розглянути першу модель, що і було зроблено Штейнведелем і Йенсеном для сферичних ядер. Схематично моди колективного руху, що відповідають моделям Гольдхабера – Теллера та Штейнведеля – Йенсена, зображені на рис. 3.20.

Згідно з гідродинамічною моделлю Штейнведеля – Йенсена, ядро складається з протонної та нейтронної рідин з густинами протонів $\rho_p(\vec{r}, t)$ і нейтронів $\rho_n(\vec{r}, t)$, які змінюються у просторі та часі і гігантський дипольний резонанс обумовлений зміною густин нейтронів і протонів, тобто локальною зміною кількості протонів і нейтронів при постійній повній густині нуклонів. При динамічному описі колективних вібрацій використовується гідродинамічний вираз для кінетичної енергії, який відповідає течії безвихрової рідини, а вираз для потенціальної енергії відносного руху двох рідин базується на уявленнях моделі рідкої краплі. Штейнведель і Йенсен припустили, що компонент $U_{sym}^{(eq)} \equiv a_{sym} - (A - 2 \cdot Z^2 / A = a_{sym} (N - Z)^2 / A$, $a_{sym} \equiv a_4$ у формулі Вейцзекера (1.17) для питомої енергії зв'язку, який залежить від різниці між кількістю протонів і нейтронів, можна розглядати, як рівноважний компонент потенціальної енергії відносного руху (потенціальної енергії симетрії) U_{sym} , що виникає при локальних зміщеннях протонів відносно нейтронів і протидіє такому зміщенню. Повний вираз для потенціальної енергії симетрії Штейнведель і Йенсен представили у вигляді такого інтегралу від локальних густин:

$$U_{sym} = a_{sym} \int d\vec{r} \frac{(\rho_p(\vec{r}, t) - \rho_n(\vec{r}, t))^2}{\rho_0}. \quad (3.212)$$

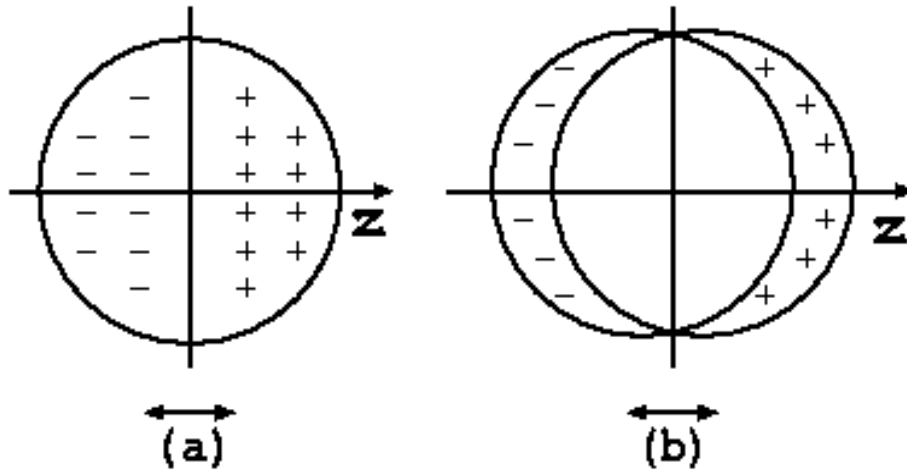


Рис. 3.20. Схематичне зображення дипольних мод коливань в ядрах: *a* – модель Штейнведеля-Йенсена; *b* – модель Голдхабера-Теллера

Цей вираз збігається з формулою для статичного значення енергії $U_{sym}^{(eq)}$ у рівноважному випадку, коли повні густини нуклонів $\rho_p(\vec{r}, t)$, $\rho_n(\vec{r}, t)$ збігаються зі своїми статичними значеннями $\rho_0^{(p)} = Z\rho_0/A$ і $\rho_n^0 = N\rho_0/A$ (3.24).

У наближенні нестисливості ядерної речовини повна густина

$$\rho_0 = \rho_p(\vec{r}, t) + \rho_n(\vec{r}, t) \quad (3.213)$$

вважається сталою, а густини нуклонів відмінні від нуля у внутрішній області і дорівнюють нулю зовні ядра (тобто при $|\vec{r}| > R_0$ у найпростішому випадку сферичного ядра). Умова сталості густин дозволяє подати їх у вигляді

$$\rho_p(\vec{r}, t) = \rho_0^{(p)} + \eta(\vec{r}, t), \quad \rho_n(\vec{r}, t) = \rho_0^{(n)} - \eta(\vec{r}, t); \quad (3.214)$$

$$\eta(\vec{r}, t) \equiv \delta\rho_p(\vec{r}, t) = -\delta\rho_n(\vec{r}, t), \quad \rho_0 = \rho_0^{(p)} + \rho_0^{(n)}, \quad (3.215)$$

де $\delta\rho_p(\vec{r}, t)$, $\delta\rho_n(\vec{r}, t)$ – так звані перехідні густини відповідно протонів і нейтронів, тобто варіації їх густин відносно середніх значень. Функція відхилення $\eta(\vec{r}, t)$ пропорційна перехідній густині $\rho^{(-)}(\vec{r}, t)$, яка є різницею густин протонів і нейтронів відносно її середнього значення $\rho_0^{(-)}(\vec{r}, t)$:

$$\rho^{(-)}(\vec{r}, t) \equiv \rho_p(\vec{r}, t) - \rho_n(\vec{r}, t) = \rho_0^{(-)}(\vec{r}, t) + \delta\rho^{(-)}(\vec{r}, t); \quad (3.216)$$

$$\rho_0^{(-)} \equiv \rho_p^{(0)} - \rho_n^{(0)} = \rho_0(Z - N)/A, \quad \eta(\vec{r}, t) \equiv 2 \cdot \delta\rho^{(-)}(\vec{r}, t). \quad (3.217)$$

Збереження кількості нуклонів різного сорту приводить до умови

$$\int d\vec{r} \eta(\vec{r}, t) = 0. \quad (3.218)$$

Необхідно зазначити, що від перерозподілу протонів залежить і кулонівська енергія, але її зміна набагато менша від зміни енергії симетрії, тому її зазвичай не враховують.

Уведення функції відхилення $\eta(\vec{r}, t)$ приводить до такого виразу для енергії симетрії (3.212):

$$U_{sym} = U_{sym}^{(eq)} + U(\vec{r}, t), \quad U(\vec{r}, t) = \frac{2a_{sym}}{\rho_0} \int d\vec{r} \eta^2(\vec{r}, t). \quad (3.219)$$

Доданок, лінійний за η , зникає через умову (3.218), а функцію $U(\vec{r}, t)$ можна трактувати як потенціальну енергію вібрації густини.

Щоб знайти рівняння на визначення власних коливань густини також необхідно побудувати вираз для кінетичної енергії руху рідин нуклонів. Для цього використовують вираз класичної гідродинаміки для кінетичної енергії системи, що складається з двох рідин:

$$T = \frac{m}{2} \int d\vec{r} (\rho_p \vec{v}_p^2 + \rho_n \vec{v}_n^2), \quad (3.220)$$

де m – маса нуклона; $\vec{v}_p(\vec{r}, t)$ і $\vec{v}_n(\vec{r}, t)$ – локальні швидкості течій протонних і нейтронних рідин відповідно. Переходимо до відносної швидкості та швидкості течії центра мас:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_p(\vec{r}, t) - \vec{v}_n(\vec{r}, t);$$

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = (\rho_p(\vec{r}, t) \vec{v}_p(\vec{r}, t) + \rho_n(\vec{r}, t) \vec{v}_n(\vec{r}, t)) / \rho_0. \quad (3.221)$$

Вираз (3.220) для кінетичної енергії набуває вигляду

$$T = \frac{m}{2} \int d\vec{r} (\rho_0 \vec{V}^2 + \rho_{red} \vec{v}^2), \quad (3.222)$$

де введена зведена густина

$$\rho_{red}(r, t) = \frac{\rho_p \rho_n}{\rho_p + \rho_n} = \frac{\rho_0^{(p)} \rho_0^{(n)}}{\rho_0} + \frac{\rho_0^{(n)} - \rho_0^{(p)}}{\rho_0} \eta - \frac{\eta^2}{\rho_0}. \quad (3.223)$$

Далі припускаємо, що середня швидкість V дорівнює нулю; останнє справедливо для ядер, що перебувають в основному стані і не рухаються. Оскільки відносна швидкість і перехідна густина мають однаковий порядок малості, то у найнижчому наближенні тільки перший доданок у виразі (3.223) для зведеної густини дає внесок до кінетичної енергії, тоді отримуємо

$$T = \frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho_0 \int d\vec{r} \vec{v}^2. \quad (3.224)$$

Для знаходження рівняння руху протон-нейтронної системи додержуємося розгляду Даноса і користуємося варіаційним принципом найменшої дії або принципом Гамільтона, згідно з яким система рухається таким чином, що функція дії мінімальна, тобто її варіація має дорівнювати нулю:

$$\delta \int dt L = 0, \quad (3.225)$$

де $L = T - U$ – лагранжіан системи. З урахуванням співвідношень (3.219) і (3.224) лагранжіан системи має вигляд

$$L = \frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho_0 \int d\vec{r} \vec{v}^2 - \frac{4a_{sym}}{\rho_0} \int d\vec{r} \eta^2. \quad (3.226)$$

Відзначимо, що при $V = 0$ швидкості течій нуклонів визначаються відносними швидкостями:

$$\vec{v}_p = \frac{N}{A} \vec{v}, \quad \vec{v}_n = \frac{Z}{A} \vec{v}. \quad (3.227)$$

При отриманні рівнянь необхідно врахувати закон збереження кількості частинок, який приводить до рівнянь неперервності для густини нуклонів

$$\frac{\partial \rho_{p,n}}{\partial t} + \nabla (\rho_{p,n} \vec{v}_{p,n}) = 0 \quad (3.228)$$

з граничною умовою, що потік крізь поверхню, яка обмежує систему, має зникати:

$$\vec{r} \cdot \vec{v}_{p,n} \big|_{|r|=R_0} = 0. \quad (3.229)$$

Перепишучи рівняння неперервності для протонів, отримуємо в нижчому порядку диференціальне співвідношення між функцією відхилення та відносною швидкістю:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\nabla \left[\left(\rho_p^{(0)} + \eta \right) \vec{v}_p \right] \approx -\rho_p^{(0)} \nabla \vec{v}_p = -\frac{ZN}{A^2} \rho_0 \nabla \vec{v}, \quad (3.230)$$

де використано також формули (3.227).

Варіаційний принцип (3.225) набуває вигляду

$$\delta \int dt \int d\vec{r} \left(\frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho \vec{v}^2 - \frac{4a_{asym}}{\rho_0} \eta^2 \right) = 0. \quad (3.231)$$

Виникає питання, щодо яких змінних потрібно брати варіацію. Очевидно, що механічним ступеням вільності рідини відповідає зміщення частинок з часом, яке визначає як відносну швидкість потоку рідин нуклонів, так і варіацію густини. Тобто рух кожного елемента потоку можна характеризувати залежним від часу положенням $\vec{s}(\vec{r}, t)$, якщо початкове положення є $\vec{s}(\vec{r}, t = 0)$. Зміщення для протонів і нейтронів мають бути визначені незалежно, але у даному випадку вони зв'язані, тому швидкість можна подати за допомогою відносного зміщення, а саме:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial t}, \quad \delta \vec{v} = \frac{\partial \delta \vec{s}}{\partial t}. \quad (3.232)$$

Відносне відхилення густини η згідно з (3.230) має вигляд

$$\delta \eta = -\frac{ZN}{A^2} \rho_0 \nabla \delta \vec{s}. \quad (3.233)$$

Тепер можна обчислити варіацію дії, якщо підставити ці вирази для $\delta \vec{v}$ і $\delta \eta$ у (3.231), виконуючи одноразове інтегрування за частинами (за часом у першому і за простором у другому підінтегральних виразах). Тоді

$$\begin{aligned} \delta \int dt L &= \int dt \int d\vec{r} \left(\frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho \vec{v} \delta \vec{v} - \frac{8a_{asym}}{\rho_0} \eta \delta \eta \right) = \\ &= \int dt \int d\vec{r} \left(\frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} - 8a_{asym} \frac{ZN}{A^2} \eta \nabla \delta \vec{s} \right) = \\ &= \int dt \int d\vec{r} \left(-\frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} - 8a_{asym} \frac{ZN}{A^2} \nabla \eta \right) \delta \vec{s} = 0. \end{aligned} \quad (3.234)$$

Зміщення в різних точках простору та часу незалежні і тому отримуємо рівняння

$$m \frac{ZN}{A^2} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -8a_{asym} \frac{ZN}{A^2} \nabla \eta. \quad (3.235)$$

Взявши дивергенцію від цього рівняння і скориставшись співвідношенням

$$\frac{\partial \nabla \vec{\nu}}{\partial t} = -\frac{A^2}{ZN\rho_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (3.236)$$

що впливає з рівняння неперервності, знаходимо рівняння руху для η :

$$m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 8a_{sym} \frac{ZN}{A^2} \nabla^2 \eta. \quad (3.237)$$

Таким чином, перехідна густина є розв'язком хвильового рівняння

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla^2 \eta, \quad (3.238)$$

що описує розповсюдження звукових хвиль зі швидкістю u :

$$u^2 = \frac{ZN}{A^2} \frac{8a_{sym}}{m}. \quad (3.239)$$

Для $a_{sym} \simeq 23 \text{ MeV}$ отримуємо $u \simeq c/5$, де c – швидкість розповсюдження світла. Розв'язок хвильового рівняння знаходимо за умови періодичної часової залежності варіації $\eta(\vec{r}, t) = \bar{\eta}(\vec{r}) \exp(i\omega t)$, звідси отримуємо рівняння Гельмгольца:

$$\Delta \bar{\eta} + k^2 \bar{\eta} = 0, \quad k = \frac{\omega}{u}. \quad (3.240)$$

Розв'язки цього рівняння мають вигляд добутку сферичних функцій Бесселя і сферичних гармонік з деякими фіксованими значеннями кутових моментів

$$\bar{\eta}(\vec{r}) = C_\lambda j_\lambda(kr) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}), \quad (3.241)$$

де C_λ – деяка стала.

Гранична умова (3.229) зникнення швидкості через поверхню ядра не залежить від часу і у випадку сферичного ядра її можна переписати за допомогою формули (3.235) у вигляді

$$\hat{e}_r \nabla \bar{\eta}(\vec{r})|_{r=R_0} \equiv \left. \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} \right|_{r=R_0} = \left. \frac{\partial j_\lambda(kr)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (3.242)$$

де $\hat{e}_r$ – одиничний орт у радіальному напрямку.

Таким чином, значення коефіцієнтів $k = k_n$, а отже і власних частот $\omega \equiv \omega_n = k_n u$, визначаються з умови рівності нулю похідних від сферичної функції Бесселя

$$\omega_n = u \frac{X_n}{R_0}, \quad j'_\lambda(X_n) = 0. \quad (3.243)$$

Для дипольних коливань з $\lambda = 1$ найменше значення кореня дорівнює $X_{n=1} = 2,081576$, звідки $k_{n=1} \simeq 2,08/R_0$. Тому енергію $E_r = \hbar\omega_{n=1} = \hbar u k_{n=1}$ найнижчого гігантського дипольного колективного стану можна записати у вигляді

$$E_r \equiv E_{SJ} = \hbar \sqrt{\frac{8ZN}{A^2} \frac{a_{sym}}{m} \frac{2,08}{R_0}} = \sqrt{\frac{4ZN}{A^2}} 76,5 A^{-1/3} (\text{MeV}), \quad (3.244)$$

де було використано значення $R_0 = 1,2 A^{1/3}$ фм. Величина $\sqrt{4ZN/A^2}$ у цій формулі слабо залежить від масового числа і при $Z = N$ маємо

$$E_r \equiv E_{SJ} \simeq 76,5 A^{-1/3} (\text{MeV}). \quad (3.245)$$

Такий вираз для енергії гігантського дипольного резонансу в середньому апроксимує експериментальні дані для ядер з $A \gtrsim 50$ при не дуже високій енергії теплових збуджень ядер.

Згідно з співвідношеннями (3.215), (3.241) та (3.243) у гідродинамічній моделі Штейнведеля – Йенсена перехідна густина розподілу заряду у стані гігантського дипольного резонансу з найменшою енергією описується формулою

$$\begin{aligned} \delta\rho_p(\vec{r}, t) &\equiv \delta\rho_p^{(SJ)}(\vec{r}, t) = \alpha_{SJ}(t) \delta\bar{\rho}_p^{(SJ)}(\vec{r}), \\ \delta\bar{\rho}_p^{(SJ)}(\vec{r}) &= \rho_0 j_1(k_1 r) Y_{1\mu}(\hat{r}), \\ \alpha_{SJ}(t) &= \alpha_{SJ}^{(0)} \exp(i E_r t/\hbar), \quad k_1 = \frac{2,08}{R_0}, \end{aligned} \quad (3.246)$$

де індекс μ може набувати трьох значень $0, \pm 1$, які відповідають трьом виродженим стоячим хвилям вздовж напрямків ортів циклічної системи координат з хвильовим вектором, обернено пропорційним радіусу ядра. У формулі (3.246) замість сталої C_λ з (3.241) введено сталу $\alpha_{SJ}^{(0)} = C_\lambda/\rho_0$. Усі інші перехідні густини визначаються перехідною густиною розподілу заряду за допомогою співвідношень (3.215) та (3.217): $\eta(\vec{r}, t) = \delta\rho_p(\vec{r}, t)$, $\delta\rho_n(\vec{r}, t) = -\delta\rho_p(\vec{r}, t)$, $\delta\rho^{(-)}(\vec{r}, t) = \delta\rho_p(\vec{r}, t)/2$.

Коливання нуклонів у моделі Штейнведеля–Йенсена можна інтерпретувати як ізовекторні об'ємні коливання ядерної матерії, які відповідають зміні спіну-ізоспінового компонента $\rho_{ST}(\vec{r}, t)$ густини у станах з двома нуклонами із значеннями повного спіну $S = 0$ та ізоспіну $T = 1$. Оскільки нуклон може перебувати у двох спінових і двох ізоспінових станах (§ 1.6, 2.4), то загалом у двокомпонентній системі нуклонів можна ввести чотири типи густин, а саме: густин протонів $\rho_{p\uparrow}(\vec{r}, t)$, $\rho_{p\downarrow}(\vec{r}, t)$ і нейтронів $\rho_{n\uparrow}(\vec{r}, t)$, $\rho_{n\downarrow}(\vec{r}, t)$ із спінами, напрямленими відповідно вздовж і проти осі квантування. Повні густини протонів і нейтронів будуть дорівнювати $\rho_p(\vec{r}, t) = \rho_{p\uparrow}(\vec{r}, t) + \rho_{p\downarrow}(\vec{r}, t)$, $\rho_n(\vec{r}, t) = \rho_{n\uparrow}(\vec{r}, t) + \rho_{n\downarrow}(\vec{r}, t)$. Вони відповідають станам двох нуклонів з повним спіном $S = 0$, а різниця повних густин протонів і нейтронів збігається з ізоспіною густиною $\rho_{S=0, T=1}(\vec{r}, t)$ у нескінченній ядерній речовині:

$$\rho^{(-)}(\vec{r}, t) \equiv \rho_p(\vec{r}, t) - \rho_n(\vec{r}, t) = \rho_{S=0, T=1}(\vec{r}, t). \quad (3.247)$$

Тому говорять, що об'ємні коливання нуклонів, які супроводжують збудження гігантського дипольного резонансу в моделі Штейнведеля–Йенсена, відповідають повному ізоспіну $T = 1$. Такий гігантський резонанс називають ізовекторним, оскільки його збудження обумовлено відмінним від нуля значення ізоспіну двох нуклонів ядерної матерії, а ізоспін є вектором у ізоспіновому просторі.

Густина розподілу заряду в стані гігантського дипольного резонансу згідно з моделлю Гольдхабера – Теллера була обчислена Тассі (1956р). На відміну від гідродинамічної моделі Штейнведеля – Йенсена у цьому випадку перехідна густина розподілу заряду зосереджена біля поверхні ядра і має вигляд

$$\begin{aligned} \delta\rho_p(\vec{r}, t) &\equiv \delta\rho_p^{(GT)}(\vec{r}, t) = \alpha_{GT}(t) \cdot \delta\bar{\rho}_p^{(GT)}(\vec{r}), \\ \delta\bar{\rho}_p^{(GT)}(\vec{r}) &= \delta\bar{\rho}_p^{(GT)}(\vec{r}) \frac{\partial\rho_0}{\partial r} Y_{1\mu}(\hat{r}), \\ \alpha_{GT}(t) &= \alpha_{GT}^{(0)} \exp(i E_r t/\hbar). \end{aligned} \quad (3.248)$$

Інтенсивні експериментальні і теоретичні дослідження показали, що в дійсності ізовекторний гігантський дипольний резонанс формується як об'ємними, так і поверхневими збудженнями. Загалом середні експериментальні значення енергій ГДР у всіх ядрах (при не дуже високих енергіях теплових збуджень) краще описуються виразом

$$E_r = 31,2 A^{-1/3} + 20,6 A^{-1/6} (\text{MeV}), \quad (3.249)$$

ніж формулою (3.245).

Радіальну залежність перехідної густини розподілу заряду також можна подати у вигляді суміші об'ємного $\delta\bar{\rho}_p^{(SJ)}(\vec{r})$ (3.246) і поверхневого $\delta\bar{\rho}_p^{(GT)}(\vec{r})$ (3.248) компонентів:

$$\delta\bar{\rho}_p(\vec{r}) = c \left[\delta\bar{\rho}_p^{(GT)}(\vec{r}) + \beta_{SJ} \delta\bar{\rho}_p^{(SJ)}(\vec{r}) \right], \quad (3.250)$$

де c – деяка загальна стала; параметр β_{SJ} характеризує частку об'ємного компоненту в густині. Згідно з результатами Майерса, Святецькі та інших (Myers, Swiatecki et al, 1977 р.), отриманими в межах краплинної моделі ядра, вагу моди Штейнведеля – Йенсена можна наближено записати у вигляді

$$\beta_{SJ} = 0,15 A^{1/3}. \quad (3.251)$$

Величина цього коефіцієнта зростає зі збільшенням масового числа і набуває значення від 0,6 до $\approx 0,9$ при зростанні A від 60 до 220. Відзначимо, що якщо подати енергію ГДР у вигляді, аналогічному (3.250),

$$E_r = \tilde{c} [E_{GT} + \beta_{SJ} E_{ST}], \quad (3.252)$$

з енергіями об'ємної та поверхневої мод згідно з виразами (3.221) і (3.245), то порівнюючи цей вираз із систематикою (3.249), отримуємо $\beta_{ST} \simeq 0,9$, що для не дуже легких ядер якісно узгоджується з виразом (3.251).

У розглянутих вище найпростіших моделях не враховувалися сили тертя і гігантський резонанс описувався як стаціонарний стан. Урахування сил тертя приводить до в'язкості ядерної рідини, що веде до нестаціонарності колективного резонансного стану, а саме до його розпаду з часом: $\{\alpha_{SJ}(t), \alpha_{GT}(t)\} \propto \exp(-\Gamma_r t/2\hbar)$, де Γ_r – ширина резонансу. Згідно з експериментальними даними середнє значення ширини розпаду ГДР у сферичних холодних (з нульовою енергією теплових збуджень) ядрах можна подати у такому вигляді

$$\Gamma_r = 0,026 E_r^{1,91} \text{ (MeV)}. \quad (3.253)$$

За допомогою гідродинамічної колективної моделі Штейнведеля – Йенсена збудження гігантських дипольних резонансів було успішно розглянуто і у важких деформованих ядрах. Для ядер, які мають форму аксіально-симметричного еліпсоїда, ізовекторні ГДР вперше теоретично вивчалися в роботах Даноса (1958 р.)

і Окамото (1959 р.), а вирази для енергій ГДР у випадку неаксіальних еліпсоїдальних ядер були отримані Є.В.Інонім (1960 р.). Згідно з співвідношеннями (3.244), (3.246) у сферичних ядрах існують три вироджені гігантські дипольні коливання, які відповідають стоячим хвилям уздовж трьох довільних напрямків зі зведеною довжиною хвилі, пропорційною радіусу ядра $\lambda_i = 1/k_i \propto R_0$. Тому за аналогією з цим випадком можна очікувати, що у випадку деформованих ядер з поверхнею у формі неаксіального еліпсоїда будуть існувати три моди коливання, що відповідають стоячим хвилям уздовж трьох головних осей еліпсоїда зі зведеною довжиною хвилі $\lambda_i = 1/k_i \propto R_i$, де R_i – величина i -ї головної півосі еліпсоїда, тобто при збудженні ГДР мають існувати три колективні стани з частотами $\omega_i \propto 1/R_i$, $i = 1 \div 3$. Детальні обчислення показали, що такі співвідношення дійсно виконуються. Зокрема в аксіально-симетричних деформованих ядрах, що мають форму еліпсоїда обертання, існують дві групи гігантських дипольних колективних збуджень ізовекторного типу: одна мода збуджень відповідає коливанню вздовж осі симетрії еліпсоїда, а інша – двом виродженим коливанням у площині, перпендикулярній до вісі симетрії. Відповідно до результатів Даноса (Danos, 1958 р.), енергії ізовекторних ГДР у таких ядрах можна подати у вигляді

$$E_b = E_r \frac{1}{b} \left[1 - 1,51 \cdot 10^{-2} (a^2 - b^2) \right];$$

$$E_a = E_b / \left[0,911 \frac{a}{b} + 0,089 \right], \quad (3.254)$$

де величини a і b – відносні півосі еліпсоїда вздовж осі обертання і у перпендикулярному напрямку,

$$a = R(\theta = 0) / R_0, \quad b = R(\theta = \pi/2) / R_0, \quad (3.255)$$

а $R(\theta) = R'_0 (1 + \alpha_2 P_2(\cos \theta))$ – радіус ядра з формою еліпсоїда обертання (див. (1.51)). Звідси видно, що при малих деформаціях величина розщеплення енергії ГДР пропорційна параметру деформації

$$E_a \simeq E_r [1 - \alpha_2], \quad E_b \simeq E_r [1 + 0,5\alpha_2], \quad (3.256)$$

$$E_b - E_a \simeq 1,5\alpha_2 E_r.$$

Крім ізовекторних дипольних гігантських резонансів, які пов'язані з рухом у

протифазі протонів і нейтронів, також можливі й інші типи гігантських коливань – монопольні, квадрупольні, октупольні тощо, мультипольність яких збігається з значенням мультипольності перехідної густини. У ядрах також існують ізоскалярні мультипольні резонанси, що відповідають коливання протонів і нейтронів у фазі.

Теоретичні й експериментальні дослідження показують, що енергії ГДР більш стійки відносно теплових збуджень ядер, ніж поверхневі вібраційні коливання низьких енергій. Найбільш стійкими виявляються ізовекторні дипольні коливання. Енергії таких коливань добре описуються виразом (3.249) у ядрах з енергіями теплових збуджень до ≈ 2 МеВ на один нуклон.

Література

Базова

1. *Айзенберг И., Грайнер В.* Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления. – М.: Атомиздат, 1975.– 454 с.; Микроскопическая теория ядра.– М.: Атомиздат, 1976.– 488 с.
2. *Ахієзер О.І., Березной Ю.А.* Теорія ядра. – К.: Вища шк., 1995.– 256 с.
3. *Блан Д.* Ядра, частицы, ядерные реакторы. – М.: Мир, 1989. – 336 с.
4. *Булавін Л.А., Тартаковський В.К.* Ядерна фізика. – К.: Київський університет, 2002. – 272 с.
5. *Валантэн Л.* Субатомная физика: ядра и частицы. Т.1. Элементарный подход. – М.: Мир, 1986. – 272 с.; Т.2. Дальнейшее развитие. – М.: Мир, 1986. – 330 с.
6. *Капитонов И.М.* Введение в физику ядра и частиц . – М.: УРСС, 2002. – 384 с.
7. *Маляров В.В.* Основы теории атомного ядра. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
8. *Михайлов В.М., Крафт О.Е.* Ядерная физика. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988, 328 с.
9. *Мухин К.Н.* Экспериментальная ядерная физика. Т.І. Физика атомного ядра. – М.: Атомиздат, 1974. – 584 с.; Т.ІІ. Физика элементарных частиц.– М.: Атомиздат, 1974. – 336 с.
10. *Ситенко О.Г., Тартаковський В.К.* Теорія ядра. – К.: Либідь, 2000.– 608 с.
11. *Соловьев В.Г.* Теория атомного ядра. Ядерные модели. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 296 с.
12. *Широков Ю.М., Юдин Н.П.* Ядерная физика. – М.: Наука, 1972. – 672 с.

Додаткова

13. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. – М.: Мир, Т.1, 1971. – 456 с.; Т.2, 1977. – 664 с.
14. Bowler M.G. Nuclear physics. – Oxford: Pergamon press, 1973. – 420 p.
15. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. – Л.: Наука, 1975. – 450 с.
16. Гопыч П.М., Залюбовский И.И. Ядерная спектроскопия. Х.: Вища шк., 1980. – 384 с.
17. Давыдов А.С. Возбужденные состояния атомных ядер. – М.: Атомиздат, 1967. – 264 с.
18. Джелепов Б.С., Драницина Г.Ф., Михайлов В.М. Свойства деформированных ядер с $K = 1/2$. – Л.: Наука, 1971. – 251 с.
19. Danos M. Nucl.Phys. **5** (1958) 23.
20. Hodgson P.G. Nuclear reactions and nuclear structure. – Oxford: Clarendon press, 1971. – 661 p.
21. Lodhi M.A.K., Waak B.T. Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 431.
22. Marmier P., Sheldon E. Physics of nuclei and particles. V.I. – NY: Acad. Press, 1969. – 1 - 810 p.; V.II. – NY: Acad. Press, 1970, – 811 - 1482 p.
23. Myers W.D., Swiatecki W.J., Kodama T., et all. Phys. Rev. **C15** (1977). 2032
24. Ring P., Schuck P. The nuclear many-body problem. – NY: Springer Verlag, 1980. – 716 p.